

预应力曲杆的 Cosserat 动力学模型

曹登庆, 宋救洵

(哈尔滨工业大学 航天学院, 150001 哈尔滨)

摘要: 为了更方便地使用 Cosserat 杆模型对各种细长结构进行动力学建模, 在该杆模型的框架下通过引入描述固连在杆横截面随其一起运动的初始变形、初始横截面转动以及横截面间的初始接触力和力矩等变量, 建立了考虑预应力的细长曲杆的 Cosserat 动力学模型. 在得到的模型的框架下, 基于相应的物理假设, 从数学演绎的角度推导了桥梁建设中广泛应用的具有初始垂度的拉索以及圆拱梁的动力学方程, 结果与文献中采用其他方法得到的相应的动力学方程一致. 由于 Cosserat 理论采用了精确的几何构形, 这里导出的细长预应力曲杆动力学模型不仅保留了所有的几何非线性特征, 而且具有很好的普适性, 通过它可以容易地导出实际工程问题中细长结构的非线性动力学模型.

关键词: Cosserat 杆模型; 预应力曲杆; 具有初始垂度的拉索; 圆拱梁

中图分类号: O326; O341

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2012)11-0001-06

Dynamic modeling of pre-stressed curved Cosserat rods

CAO Deng-qing, SONG Mi-tao

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: To dynamically model slender structures conveniently by Cosserat rod theory, the dynamic equations for pre-stressed curved Cosserat rods are established within the framework of this rod theory by defining variables to describe their initial configurations, their pre-stresses and their initial deformations, which move along with their cross sections. Based on their corresponding specific assumptions, the dynamic equations for a cable with initial sag and a circular arch beam, which have wide applications in bridge structures, are explored within the framework of pre-stressed curved Cosserat rods, respectively. The results are in agreement with their corresponding equations obtained by other methods in references. Since the Cosserat theory is geometrically exact, the dynamic equations for pre-stressed curved Cosserat rods derived here are not only retaining all geometric nonlinear characteristics but also of universality, which can be effectively and efficiently exploited to nonlinear dynamically model for slender structures in practical engineering situations.

Key words: Cosserat rod; pre-stressed curved rod; cable with initial sag; circular arch beam

18 世纪的 Bernoulli 和 Euler 认为梁之所以能抗弯是梁在运动过程中轴向伸缩的结果, 且梁横截面受到的弯矩正比于梁轴线的曲率. Euler-Bernoulli 梁模型用梁轴线的挠度描述梁的运动, 梁横截面的转动用挠度对空间坐标的导数来描述. Coulomb 于 1776 年首次将力和力矩的平衡方程用于对梁微元进行力学分析, 建立了较 Euler-Ber-

noulli 梁更为精确的动力学方程, 并开始考虑梁承受扭矩的情况^[1]. Kirchhoff 于 1859 年计算了杆单元的应变, 从能量的角度得到了杆的动力学方程, 并提出了基于 Kirchhoff 动力学比拟^[2-3]的 Kirchhoff 弹性杆模型. 该模型忽略杆轴线的伸缩变形和横截面的剪切变形, 并将杆横截面视为刚体, 以描述杆轴线的 3 个线位移参数以及描述各横截面的 3 个姿态参数为未知变量建立杆的动力学方程. Rayleigh 于 1877 年引入梁横截面惯性矩的影响, 考虑轴向和横向振动对梁进行建模, 并指出在高频振动时该修正是很必要的^[1]. Timoshen-

收稿日期: 2012-02-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10772056).

作者简介: 曹登庆(1958—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 曹登庆, dqcao@hit.edu.cn.

ko^[4-5]引入梁横截面间剪切力的影响对梁进行建模,并指出 Euler-Bernoulli 梁和 Rayleigh 梁为 Timoshenko 梁的两种特殊情况.更加精确的杆的动力学模型的问世随着工程设计和分析的需要而显得越来越必要和迫切.

近年来,基于 Cosserat 兄弟和其他人的早期工作,形成了关于细长杆的 Cosserat 介质理论. Antman^[6]在他的著作中运用该理论的基本思想建立了柔性杆和薄壳的 Cosserat 模型. Tucker 和 Wang^[7]和 Cao 等^[8-9]进一步完善了 Cosserat 杆理论,并分别应用于对钻柱的非线性动力学研究和 MEMS 中复杂结构三维非线性动力学模拟. Burton 和 Tucker^[10]回顾了 Cosserat 杆模型的发展以及它近年来在各个领域中的应用.国内学者在 Cosserat 杆模型上也做了很多重要的工作.刘延柱等^[11-12]从更侧重于力学分析的角度得到了任意初始构形圆截面 Cosserat 杆的动力学方程,在其框架下推导了 Rayleigh 梁、Kirchhoff 杆、以及 Timoshenko 梁的动力学方程,并对基于精确的 Cosserat 杆模型螺旋杆进行了稳定性分析. Cosserat 杆模型在 Kirchhoff 杆模型的基础上考虑了杆轴向的伸缩变形以及横截面间剪切力引起的横截面的转动,由于所作的假设更少, Cosserat 杆模型较以往的杆模型都更为精确.

鉴于 Antman 所建立的 Cosserat 杆模型^[6]几何形式的直观性,本文的工作将在其框架下进行.本质上 Cosserat 杆模型适用于对具有任何初始构形和预应力的杆进行建模,但为了讨论的方便,以往文献中给出 Cosserat 杆动力学方程的同时,在 Cosserat 杆的本构关系中实际上都只将杆的由预应力引起的初始变形用 1 个抽象的符号表示,或者直接只考虑无预应力直杆 (Non-Prestressed Straight Rod, NPSR) 的情况^[7-9],而且在 Cosserat 杆的动力学方程中,他们并没有对初始量和动力学意义上的量进行区分.如何在 Cosserat 杆动力学方程以及其本构关系中加入杆的初始构形和预应力项以描述具有预应力的曲杆 (Prestressed Curved Rod, PCR) 的动力学行为是关键.本文的目的便是依据文献中 NPSR 的 Cosserat 模型的基本思想,用 Cosserat 杆模型对 PCR 进行建模,并称得到的模型为 PCR 的 Cosserat 动力学模型.在该模型的框架下,再根据具体的假定,便可以很明确地从数学演绎的角度推导各种特殊情况下的一维细长结构的动力学模型.本文中,矢量用小写斜体黑体字母表示,如 \mathbf{u} , \mathbf{v} 和 \mathbf{w} ; 张量用大写斜体黑体字母表示,如 \mathbf{K} , \mathbf{I} 和 \mathbf{J} ; 重复下标为哑指标,表示

采用爱因斯坦求和约定; 运算符 \otimes 为两张量间的张量积运算.

1 NPSR 的 Cosserat 模型

考虑一根细长杆,在初始时刻 t_0 时各横截面质心组成的曲线(质心线)上定义拉格朗日弧坐标 s , $s \in [0, L^0]$, L^0 为杆的初始长度.如图 1 所示,假设运动过程中 t 时刻杆的质心线为 $\mathbf{r}(s, t)$, 分别以 $\mathbf{r}(s, t)$ 上的各点为原点定义局部的右手笛卡尔直角坐标系 $s \in [0, L^0] \mapsto \{\mathbf{d}_1(s, t), \mathbf{d}_2(s, t), \mathbf{d}_3(s, t)\}$, 并将坐标系固定在相应位置处杆的横截面上.将 $\mathbf{d}_1(s, t)$ 垂直于相应位置处杆的横截面,将 $\mathbf{d}_2(s, t)$ 和 $\mathbf{d}_3(s, t)$ 置于相应位置处杆横截面内.忽略杆运动和变形过程中密度和横截面面积的变化,于是 Cosserat 杆模型的动力学方程可以由牛顿第二定律得到:

$$\rho(s)A(s)\ddot{\mathbf{r}}(s, t) = \mathbf{n}'(s, t) + \mathbf{f}(s, t), \quad (1a)$$

$$\partial_i(\mathbf{I}(s, t) \cdot \mathbf{w}(s, t)) = \mathbf{m}'(s, t) + \mathbf{r}'(s, t) \times \mathbf{n}(s, t) + \mathbf{I}(s, t). \quad (1b)$$

式中: $\rho(s)$ 为杆的密度; $A(s)$ 为杆的横截面面积; $\mathbf{n}(s, t)$ 和 $\mathbf{m}(s, t)$ 分别为杆横截面间接触力和接触力矩; $\mathbf{f}(s, t)$ 和 $\mathbf{I}(s, t)$ 分别为外力密度和外力矩密度(可以包括重力, 阻尼力, 电磁力, 气动力等); $\mathbf{I}(s, t)$ 为截面的惯性矩张量.

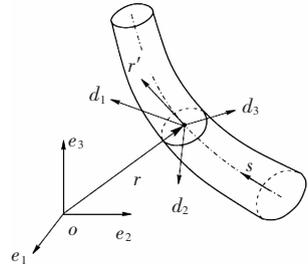


图 1 Cosserat 杆模型

由于 Cosserat 杆模型考虑了剪切力引起的杆横截面的转动,于是 $\mathbf{r}'(s, t)$ 不再始终垂直于相应位置处的横截面,令

$$\mathbf{r}'(s, t) = \mathbf{v}(s, t). \quad (2)$$

将 t_0 时刻的 $\mathbf{d}_i(s, t)$ ($i = 1, 2, 3$) 记为 $\mathbf{d}_i^0(s)$, 即 $\mathbf{d}_i^0(s) = \mathbf{d}_i(s, t_0)$. 若杆为 NPSR, 即在 t_0 时刻横截面与横截面间接触力和接触力矩为零的直杆, 则 $\mathbf{d}_1^0(s)$ 实际上并不依赖于变量 s , 记为 \mathbf{d}_1^0 . 同时, 沿着 s 的方向将 $\mathbf{d}_2^0(s)$ 和 $\mathbf{d}_3^0(s)$ 保持不变, 即 $\mathbf{d}_2^0(s)$ 和 $\mathbf{d}_3^0(s)$ 也独立于变量 s , 分别记为 \mathbf{d}_2^0 和 \mathbf{d}_3^0 . 于是, 可以通过固连在横截面上的局部坐标系定义矢量 $\mathbf{u}(s, t)$ 和 $\mathbf{w}(s, t)$ 以分别度量杆横截面的转动随 s 和 t 的变化,

$$\mathbf{d}'_k(s, t) = \mathbf{u}(s, t) \times \mathbf{d}_k(s, t), \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_k(s, t) = \mathbf{w}(s, t) \times \mathbf{d}_k(s, t). \quad (4)$$

式(3)和(4)分别意味着(参见文献[6-9])

$$\mathbf{u}(s, t) = 0.5 \mathbf{d}_k(s, t) \times \mathbf{d}'_k(s, t), \quad (5)$$

$$\mathbf{w}(s, t) = 0.5 \mathbf{d}_k(s, t) \times \dot{\mathbf{d}}_k(s, t). \quad (6)$$

于是, Cosserat 杆的本构关系可以表示为如下形式:

$$\mathbf{n}(s, t) = \mathbf{K}(s, t) \cdot (\mathbf{v}(s, t) - \mathbf{d}_1(s, t)), \quad (7a)$$

$$\mathbf{m}(s, t) = \mathbf{J}(s, t) \cdot \mathbf{u}(s, t). \quad (7b)$$

式(7)中的张量 $\mathbf{K}(s, t)$ 和 $\mathbf{J}(s, t)$ 以及式(1b)中的张量 $\mathbf{I}(s, t)$ 的分量形式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{K}(s, t) = K_{ii}(s) \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i, \\ \mathbf{J}(s, t) = J_{11}(s) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \sum_{i,j=2}^3 J_{ij}(s) \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j, \\ \mathbf{I}(s, t) = I_{11}(s) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \sum_{i,j=2}^3 I_{ij}(s) \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j. \end{cases}$$

其中:

$$\begin{cases} K_{11} = E(s)A(s), & K_{22} = K_{33} = \kappa(s)G(s)A(s), \\ J_{11} = \int_{A(s)} G(s) \left(\xi^2 + \eta^2 + \xi \frac{\partial \Psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) dA, \\ J_{22} = \int_{A(s)} E(s) \xi^2 dA, & J_{33}(s) = \int_{A(s)} E(s) \eta^2 dA, \\ J_{23} = J_{32} = - \int_{A(s)} E(s) \xi \eta dA, \\ I_{11} = \int_{A(s)} \rho(s) (\xi^2 + \eta^2) dA, & I_{22} = \int_{A(s)} \rho(s) \xi^2 dA, \\ I_{33} = \int_{A(s)} \rho(s) \eta^2 dA, & I_{23} = I_{32} = - \int_{A(s)} \rho(s) \xi \eta dA. \end{cases} \quad (8)$$

式中: $E(s)$ 为杆的弹性模量; $G(s)$ 为杆的剪切模量; $dA = d\xi d\eta$, η 和 ξ 分别为坐标系基矢量 $\mathbf{d}_2(s, t)$ 和 $\mathbf{d}_3(s, t)$ 对应坐标轴的坐标; $\Psi(\xi, \eta)$ 为横截面的翘曲函数, 由圣维南原理知其对于所有横截面都相同^[13]; $\kappa(s)$ 为 Timoshenko 剪切系数, 现有不同的理论对其进行物理意义上的解释, Shames 和 Dym^[14] 系统探讨过这个问题, 但不论哪种解释, $\kappa(s)$ 的值都取决于横截面的形状. 张量 $\mathbf{I}(s, t)$ 和 $\mathbf{J}(s, t)$ 可以通过选择 $\mathbf{d}_2(s, t)$ 和 $\mathbf{d}_3(s, t)$ 的方向达到对角化, 以使得它们的形式变得更为简洁.

下面阐述式(7)中 NPSR 的 Cosserat 模型本构关系背后的力学依据. 式(7a)中出现的 $\mathbf{d}_1(s, t)$ 表示 t_0 时刻杆的质心线没有剪切变形, 只有沿着杆相应处横截面法向的变形. 由于采用了杆初始构形上的弧坐标, 于是初始时刻质心线对弧坐标的微分总是为 \mathbf{d}_1^0 . 杆初始构形上任意一微元 ds 便可以用 $ds \mathbf{d}_1^0$ 作为其长度和方向的度量, 它随着杆的整体运动而运动, 作为微元的初始状态始终垂直于相应位置处的横截面, 于是变为 $ds \mathbf{d}_1(s, t)$. 同

时, 变形后的微元为 $\mathbf{v}(s, t) ds$. 于是微元的正应变(沿 $\mathbf{d}_1(s, t)$ 的方向)以及剪切应变(分别沿着 $\mathbf{d}_2(s, t)$ 和 $\mathbf{d}_3(s, t)$ 的方向)分别为

$$\frac{(\mathbf{v}(s, t) - \mathbf{d}_1(s, t)) ds}{\| ds \mathbf{d}_1(s, t) \|} = \mathbf{v}(s, t) - \mathbf{d}_1(s, t)$$

在 $\mathbf{d}_1(s, t)$, $\mathbf{d}_2(s, t)$ 和 $\mathbf{d}_3(s, t)$ 上的投影. 至此, 便不难得到式(7a). 式(7b)表示横截面间的接触力矩由横截面间相对转角来度量, 对其分析可类似于对式(7a)所作的分析那样, 通过定义随着杆整体运动的杆横截面的初始转角而实现. 由于在前面定义的初始时刻局部坐标系间没有相对转角, 于是初始时刻横截面间无相对转角. 由上面分析可见, 本构关系(7)的获得, 关键在于定义随着杆横截面一起运动的各种初始量, 这给 PCR 的本构关系的建立及分析预应力对动力学方程的影响提供了思路.

2 PCR 的 Cosserat 模型

假如细长杆为 PCR, 即杆的横截面与横截面间接触力 $\mathbf{n}(s, t)$ 和接触力矩 $\mathbf{m}(s, t)$ 在 $t = t_0$ 时不为零(即 $\mathbf{n}^0(s) = \mathbf{n}(s, t_0) \neq 0$, $\mathbf{m}^0(s) = \mathbf{m}(s, t_0) \neq 0$), 则在静平衡位置处杆在预应力和初始外力 $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}(s, t_0)$ 和初始外力矩 $\mathbf{l}^0 = \mathbf{l}(s, t_0)$ 作用下保持平衡, 由牛顿第二定律得

$$\mathbf{n}^{0'} + \mathbf{f}^0 = \mathbf{0}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{m}^{0'} + \mathbf{r}^{0'} \times \mathbf{n}^0 + \mathbf{l}^0 = \mathbf{0}. \quad (9b)$$

其中 $\mathbf{r}^0(s) = \mathbf{r}(s, t_0)$ 为静平衡位置时杆的质心线. 杆质心线上各质点的线位移分为静位移 $\mathbf{r}^0(s)$ 和动位移 $\mathbf{r}^d(s, t)$ 两部分, 即

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}^d(s, t) + \mathbf{r}^0(s). \quad (10)$$

在运动过程中, 杆的各微元一方面有着自身的变形和运动, 一方面又随着杆的整体运动而运动. 杆横截面间的初始接触力、初始接触力矩、初始相对转角以及杆的初始变形固连在定义在相应位置处横截面上的局部坐标系上, 它们随着杆的整体运动而运动. 它们相对于局部坐标系不随时间变化, 然而相对于全局坐标系却是不断变化的, 也即预应力矢量和初始变形矢量是随时间变化的变量, 于是可以将杆质心线的初始变形以及杆横截面间的初始相对转角、初始接触力、初始接触力矩分别记为 $\hat{\mathbf{v}}(s, t)$ 、 $\hat{\mathbf{u}}(s, t)$ 、 $\hat{\mathbf{n}}(s, t)$ 和 $\hat{\mathbf{m}}(s, t)$. 于是

$$\mathbf{n}(s, t) = \mathbf{n}^d(s, t) + \hat{\mathbf{n}}(s, t), \quad (11a)$$

$$\mathbf{m}(s, t) = \mathbf{m}^d(s, t) + \hat{\mathbf{m}}(s, t). \quad (11b)$$

式中:

$$\mathbf{n}^d(s, t) = \mathbf{K}(s, t) \cdot (\mathbf{v}(s, t) - \hat{\mathbf{v}}(s, t)), \quad (12a)$$

$$\mathbf{m}^d(s, t) = \mathbf{J}(s, t) \cdot (\mathbf{u}(s, t) - \hat{\mathbf{u}}(s, t)). \quad (12b)$$

式(11)和(12)中

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} = \hat{n}_i \mathbf{d}_i = n_i^0(s) \xi_{ij}(s,t) \mathbf{d}_j^0, \\ \hat{\mathbf{m}} = \hat{m}_i \mathbf{d}_i = m_i^0(s) \xi_{ij}(s,t) \mathbf{d}_j^0, \\ \hat{\mathbf{v}} = \hat{v}_i \mathbf{d}_i = v_i^0(s) \xi_{ij}(s,t) \mathbf{d}_j^0, \\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{u}_i \mathbf{d}_i = u_i^0(s) \xi_{ij}(s,t) \mathbf{d}_j^0. \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中 $v_i^0(s)$ 和 $u_i^0(s)$ 分别为

$$\mathbf{v}^0(s) = \mathbf{v}(s, t_0), \quad (14)$$

$$\mathbf{u}^0(s) = \mathbf{u}(s, t_0) \quad (15)$$

在初始局部坐标系下的分量. $\xi_{ij}(s,t) = \mathbf{d}_i^0(s) \cdot \mathbf{d}_j(s,t)$. 由第1节的内容知道 $u_i^0(s)$ 由 $d_i^0(s)$ 的定义决定. 为了保证类似于式(5)的定义有意义, 应将 $\mathbf{d}_i^0(s)$ 取为 s 个连续的单位矢量函数. 曲杆无法做到像直杆那样将 $\mathbf{d}_i^0(s)$ 独立于 s . 不考虑杆运动过程中产生裂缝的情况, $\mathbf{d}_i^0(s)$ 取为垂直于相应位置处的横截面能保证 $\mathbf{d}_i^0(s)$ 连续. 同时, 取 $\mathbf{d}_2^0(s)$ 和 $\mathbf{d}_3^0(s)$ 为任意的连续单位矢量函数都不会影响到最后的结果. 因为 $\mathbf{d}_i^0(s)$ 的选取影响着 $u_i^0(s)$ 的同时, 也影响着 $\mathbf{d}_i(s,t)$, 进而导致 $\mathbf{u}(s,t) - \hat{\mathbf{u}}(s,t)$ 的值不依赖于 $\mathbf{d}_i^0(s)$ 的选取. 将外力(外力矩)分为初始力(初始力矩)和动态力(动态力矩)两部分, 即

$$\begin{cases} \mathbf{f}(s,t) = \mathbf{f}^d(s,t) + \mathbf{f}^0(s), \\ \mathbf{l}(s,t) = \mathbf{l}^d(s,t) + \mathbf{l}^0(s). \end{cases} \quad (16)$$

将式(10) - (16)代入式(1)中, 并将得到的两方程分别减去式(9)中的两个方程得到 Cosserat 模型的动力学方程为

$$\rho A \ddot{\mathbf{r}}^d = (\mathbf{n}^d + \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}^0)' + \mathbf{f}^d, \quad (17a)$$

$$\partial_i(\mathbf{l} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{m}^d + \hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}^0)' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{n}^d + \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{r}^{0'} \times \mathbf{n}^0 + \mathbf{l}^d. \quad (17b)$$

当 \mathbf{n}^0 、 \mathbf{m}^0 和 \mathbf{r}^0 为零时, 式(17)退化为式(1)的形式.

值得注意的是, 拉索可以视为杆忽略弯扭刚度以及横截面间剪切刚度的特殊情况, 于是具有初始垂度的拉索的动力学方程可以由方程(17a)来描述, 而且此时张量 \mathbf{K} 需要退化成如下形式:

$$\mathbf{K}(s,t) = K_{11}(s,t) \mathbf{d}_1(s,t) \otimes \mathbf{d}_1(s,t).$$

另外需要注意的是, 前面的推导是在假定曲杆的横截面、初始质心线、横截面间初始接触力以及初始接触力矩为已知的前提下进行的. 实际在一般情况下, 对于曲杆, 特别是具有预应力的曲杆, 如何选择杆横截面并不是一件容易的事情. 同时, 求解杆的预应力也非易事. 不过, 这并非我们所关心的主要问题. 而且, 对于很多特殊情况, 确定杆的上述初始量并不困难, 作为例子我们将在

第3节中采用本节建立的 PCR 的 Cosserat 模型推导具有初始垂度的空间拉索以及圆拱梁的动力学方程的过程中可以看到.

3 两类特殊 PCR 的动力学建模

3.1 具有初始垂度的空间拉索动力学建模

如图2所示, 在全局右手笛卡尔直角坐标系 $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下, 具有初始垂度的拉索运动过程中的形状为

$$\mathbf{r} = (x^0 + W_1) \mathbf{e}_1 + (y^0 + W_2) \mathbf{e}_2 + (z^0 + W_3) \mathbf{e}_3. \quad (18)$$

其中 $W_1(s,t)$, $W_2(s,t)$ 和 $W_3(s,t)$ 分别为拉索各质点在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 \mathbf{e}_3 方向的线位移.

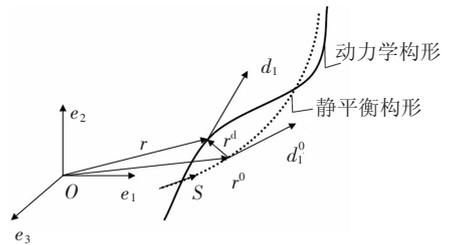


图2 具有初始垂度的空间拉索的运动示意图

由于不考虑拉索横截面间剪切力的影响, 于是 $\mathbf{d}_1(s,t)$ 沿着拉索的切线方向, 即

$$\mathbf{d}_1 = (ds^*)^{-1} [(1 + W'_1) \mathbf{e}_1 + (y^{0'} + W'_2) \mathbf{e}_2 + (z^{0'} + W'_3) \mathbf{e}_3]. \quad (19)$$

其中

$$ds^* = \sqrt{(1 + W'_1)^2 + (y^{0'} + W'_2)^2 + (z^{0'} + W'_3)^2}.$$

将式(18)代入式(2)得

$$\mathbf{v} = (1 + W'_1) \mathbf{e}_1 + (y^{0'} + W'_2) \mathbf{e}_2 + (z^{0'} + W'_3) \mathbf{e}_3. \quad (20)$$

全局坐标系下张量 \mathbf{K} 写成矩阵形式为

$$\begin{cases} \bar{K}_{11} = (K_{11}/ds^{*2})(1 + W'_1)^2, \\ \bar{K}_{22} = (K_{11}/ds^{*2})(y^{0'} + W'_2)^2, \\ \bar{K}_{33} = (K_{11}/ds^{*2})(z^{0'} + W'_3)^2, \\ \bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = (K_{11}/ds^{*2})(1 + W'_1)(y^{0'} + W'_2), \\ \bar{K}_{13} = \bar{K}_{31} = (K_{11}/ds^{*2})(1 + W'_1)(z^{0'} + W'_3), \\ \bar{K}_{23} = \bar{K}_{32} = (K_{11}/ds^{*2})(y^{0'} + W'_2)(z^{0'} + W'_3). \end{cases} \quad (21)$$

将式(19) - (21)代入式(12a), 并根据式(13)得

$$\mathbf{n}^d = K_{11}(ds^* - 1)/ds^* [(1 + W'_1) \mathbf{e}_1 + (y^{0'} + W'_2) \mathbf{e}_2 + (z^{0'} + W'_3) \mathbf{e}_3]. \quad (22)$$

另一方面拉索的动应变 $e(s,t)$ 为

$$e(s,t) = (ds^* - 1)/ds^* \approx W'_1 + y^{0'} W'_2 + z^{0'} W'_3 + 0.5 W_2'^2 + 0.5 W_3'^2. \quad (23)$$

于是由式(22)和(23)得

$$\mathbf{n}^d = (E A e / ds^*) [(1 + W'_1) \mathbf{e}_1 + (y^{0'} +$$

$$W'_2) \mathbf{e}_2 + (z^{0'} + W'_3) \mathbf{e}_3]. \quad (24)$$

若拉索初始张力为 H , 则

$$\mathbf{n}^0 = H \mathbf{d}_1^0, \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = H \mathbf{d}_1. \quad (26)$$

式(25)中

$$\mathbf{d}_1^0 = \frac{1}{ds} (\mathbf{e}_1 + y^{0'} \mathbf{e}_2 + z^{0'} \mathbf{e}_3). \quad (27)$$

上式中 $ds = \sqrt{1 + (y^{0'})^2 + (z^{0'})^2}$. 由式(24) - (27) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^d + \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}^0 = & \left[\frac{EAe(1+W'_1)}{ds^*} + \frac{(1+W'_1)H}{ds^*} - \frac{H}{ds} \right] \mathbf{e}_1 + \\ & \left[\frac{EAe(y^{0'}+W'_2)}{ds^*} + \frac{(y^{0'}+W'_2)H}{ds^*} - \frac{y^{0'}H}{ds} \right] \mathbf{e}_2 + \\ & \left[\frac{EAe(z^{0'}+W'_3)}{ds^*} + \frac{(z^{0'}+W'_3)H}{ds^*} - \frac{z^{0'}H}{ds} \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (28)$$

将式(28)进行泰勒级数展开, 忽略高于一阶的小量并整理得

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^d + \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}^0 = & EAe \mathbf{e}_1 + [EAe(y^{0'} + W'_2) + HW'_2] \mathbf{e}_2 + \\ & [EAe(z^{0'} + W'_3) + HW'_3] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (29)$$

将阻尼从外力中分离出来, 即

$$\mathbf{f}^d(s, t) = -c \mathbf{r}^d(s, t) + \bar{\mathbf{f}}^d(s, t). \quad (30)$$

其中 c 为阻尼系数. 将式(18), (29) 和(30) 代入式(17a) 中得到拉索动力学方程为

$$\begin{cases} (EAe)' + \bar{f}_1^d = \rho A \ddot{W}_1 + c \dot{W}_1, \\ [EAe(y^{0'} + W'_2) + HW'_2]' + \bar{f}_2^d = \rho A \ddot{W}_2 + c \dot{W}_2, \\ [EAe(z^{0'} + W'_3) + HW'_3]' + \bar{f}_3^d = \rho A \ddot{W}_3 + c \dot{W}_3. \end{cases} \quad (31)$$

其中 \bar{f}_1^d, \bar{f}_2^d 和 \bar{f}_3^d 分别为拉索在方向 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 \mathbf{e}_3 所受到的时变分布力. 假如拉索在平面内运动, 取式(31) 的平面形式, 可以发现其与文献[15] 中用广义 Hamilton 原理得到的结果一致.

3.2 圆拱梁的动力学建模

如图 3 所示, 初始时刻圆拱梁圆心为 o . 如果不考虑圆拱梁的预应力, 则可以通过如下方式选取圆拱梁的横截面: 通过 o 点, 取垂直于圆拱梁所在平面的平面, 并让它与圆拱梁相截, 则截出的圆拱梁的截面即可选为圆拱梁的横截面.

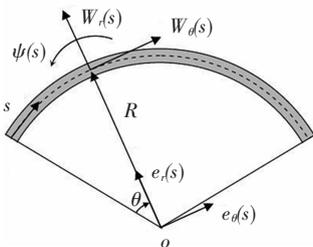


图 3 圆拱梁的初始构形及坐标系的定义

在圆拱梁初始构形上对质心线每个质点 s 建立右手笛卡尔直角坐标系 $\{o; \mathbf{e}_\theta(s), \mathbf{e}_r(s),$

$\mathbf{e}_z(s)\}$, 其中 $\mathbf{e}_\theta(s)$ 沿着质心线在 s 处的切线方向并且指向 s 增加的方向, $\mathbf{e}_r(s)$ 从 o 指向 s , $\mathbf{e}_z(s) = \mathbf{e}_\theta(s) \times \mathbf{e}_r(s)$. 可见, $\mathbf{e}_z(s)$ 实际上不随 s 而变化. 圆拱梁初始时刻质心线为

$$\mathbf{r}^0(s) = R \mathbf{e}_r(s), \quad s \in [0, L^0]. \quad (32)$$

圆拱梁在运动过程中质心线的形状为

$$\mathbf{r}(s, t) = W_\theta(s, t) \mathbf{e}_\theta + (R + W_r(s, t)) \mathbf{e}_r. \quad (33)$$

其中 $W_\theta(s, t)$ 和 $W_r(s, t)$ 分别为 t 时刻质点 s 在 $\mathbf{e}_\theta(s)$ 和 $\mathbf{e}_r(s)$ 方向的线位移. 取

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^0(s) \\ \mathbf{d}_2^0(s) \\ \mathbf{d}_3^0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}. \quad (34)$$

记圆拱梁横截面相较于初始构形转过的角度为 $\psi(s, t)$, 并以逆时针转动为正, 于是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}. \quad (35)$$

将式(32)和(33)分别代入式(2), 将式(34)代入式(6), 将式(35)分别代入式(5)和(6), 并根据式(13) - (15) 得

$$\begin{cases} \mathbf{v} = (1 + W'_\theta + W_r/R) \mathbf{e}_\theta + (W'_r - W_\theta/R) \mathbf{e}_r, \\ \hat{\mathbf{v}}_0 = \cos \psi \mathbf{e}_\theta + \sin \psi \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{w} = \dot{\psi} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{u} = (-R^{-1} + \psi') \mathbf{e}_z, \\ \hat{\mathbf{u}}_0 = -\mathbf{e}_z/R. \end{cases} \quad (36)$$

由于不考虑圆拱梁的预应力, 即

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^0 = \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m}^0 = \mathbf{0}. \quad (37)$$

二维情况下, 张量 \mathbf{K} 在坐标系 $\{o; \mathbf{e}_\theta(s), \mathbf{e}_r(s), \mathbf{e}_z(s)\}$ 中的分量形式为

$$\begin{cases} \bar{K}_{11} = K_{11} \cos^2 \psi + K_{22} \sin^2 \psi, \\ \bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = (K_{11} - K_{22}) \sin \psi \cos \psi, \\ \bar{K}_{22} = K_{11} \sin^2 \psi + K_{22} \cos^2 \psi, \\ \bar{K}_{13} = \bar{K}_{23} = \bar{K}_{31} = \bar{K}_{32} = \bar{K}_{33} = 0. \end{cases} \quad (38)$$

张量 \mathbf{J} 和 \mathbf{I} 在坐标系 $\{o; \mathbf{e}_\theta(s), \mathbf{e}_r(s), \mathbf{e}_z(s)\}$ 中的分量形式分别为

$$\bar{J}_{33} = J_{33}, \quad \bar{I}_{33} = I_{33}. \quad (39)$$

同样地将阻尼从外力中分离出来, 并将式(33), (36) - (39) 代入式(17) 中得到圆拱梁的动力学方程为

$$\begin{cases} \rho A \ddot{W}_\theta = -c \dot{W}_\theta + n_\theta^{D'} + n_r^D/R + \bar{f}_\theta, \\ \rho A \ddot{W}_r = -c \dot{W}_r + n_r^{D'} - n_\theta^D/R + \bar{f}_r, \\ I_{33} \ddot{\psi} = (J_{33} \dot{\psi}')' + n_r^D + n_r^D W'_\theta - n_\theta^D W'_r + \\ \quad (n_\theta^D W_\theta + n_r^D W_r)/R + l_z. \end{cases} \quad (40)$$

其中 \bar{f}_θ 和 \bar{f}_r 分别为圆拱梁在 e_θ 和 e_r 方向上所受到的分布力, l_z 为圆拱梁在 e_z 方向上所受到的分布弯矩, 并且

$$\begin{cases} n_\theta^D = [\bar{K}_{11}(1 + W'_\theta + W_r/R - \cos \psi) + \\ \quad \bar{K}_{12}(W'_r - W_\theta/R - \sin \psi)], \\ n_r^D = [\bar{K}_{21}(1 + W'_\theta + W_r/R - \cos \psi) + \\ \quad \bar{K}_{22}(W'_r - W_\theta/R - \sin \psi)]. \end{cases} \quad (41)$$

若圆拱梁为小变形, 则可以用式(40)的线性化形式来描述圆拱梁的运动, 此时式(41)退化为

$$\begin{cases} n_\theta^D = K_{11}(W'_\theta + W_r/R), \\ n_r^D = K_{22}(W'_r - W_\theta/R - \psi). \end{cases} \quad (42)$$

将式(42)和(8)代入式(40), 并忽略非线性项得

$$\begin{cases} \rho A \ddot{W}_\theta = -c \dot{W}_\theta + [EA(W'_\theta + W_r/R)]' + \\ \quad (\kappa GA/R)(W'_r - W_\theta/R - \psi) + \bar{f}_\theta, \\ \rho A \ddot{W}_r = -c \dot{W}_r + [\kappa GA(W'_r - W_\theta/R - \psi)]' - \\ \quad (EA/R)(W'_\theta + W_r/R) + \bar{f}_r, \\ \rho I \ddot{\psi} = (EI\psi')' + \kappa GA(W'_r - W_\theta/R - \psi) + l_z. \end{cases} \quad (43)$$

若忽略阻尼和外力, 式(43)和文献[16]中用广义 Hamilton 原理得到的圆拱梁的线性动力学方程一致。

4 结 论

1) 建立了初始局部坐标系下杆各初始量(质心线的初始变形, 横截面的初始转角, 横截面间的初始接触力和接触力矩)与运动过程中它们反映在 PCR 的 Cosserat 动力学方程和本构关系式中的相应的初始变量的具体关系。

2) 将初始变量耦合进 Cosserat 杆动力学模型及其本构关系中建立了 PCR 的 Cosserat 动力学模型及其本构关系。

3) 作为特例, 桥梁中广泛使用的具有初始垂度的空间拉索以及圆拱梁的动力学方程在 PCR 的 Cosserat 动力学模型的框架下作了推导。其过程体现了 Cosserat 杆模型包容性强以及数学推导的透明性和一贯性, 简化了繁杂的物理和力学层面上的分析过程。PCR 的 Cosserat 动力学模型的建立使得各种特殊的一维细长结构的动力学建模变成了一个很纯粹的数学推导过程, 极大地方便了使用 Cosserat 杆模型对各种特殊的一维细长结构的建模。

参考文献:

- [1] ARAFAT H N. Nonlinear response of cantilever beams [D]. Blacksburg, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1999: 17-18.
- [2] LOVE A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity[M]. New York: Dover, 1944: 399-400.
- [3] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 14-18.
- [4] TIMOSHENKO S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars [J]. Philosophical Magazine, 1921, 41(1): 744-747.
- [5] TIMOSHENKO S P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross section [J]. Philosophical Magazine, 1922, 43(1): 125-131.
- [6] ANTMAN S S. Nonlinear problems in elasticity [M]. New York: Springer-Verlag, 1995: 13-359.
- [7] TUCKER R W, WANG C. Torsional vibration control and Cosserat dynamics of a drill-rig assembly [J]. Meccanica, 2003, 38(1): 143-159.
- [8] CAO Dengqing, LIU Dongsheng, WANG C H-T. Nonlinear dynamic modelling for MEMS components via the Cosserat rod element approach [J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2005, 15(6): 1334-1343.
- [9] CAO Dengqing, TUCKER R W. Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: modelling and simulation [J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45(2): 460-477.
- [10] BURTON D A, TUCKER R W. Practical applications of simple Cosserat methods [C]// Mechanics of Generalized Continua. In: Advances in Mechanics and Mathematics. Berlin: Springer, 2010, 21: 87-98.
- [11] LIU Yan-zhu. On dynamics of elastic rod based on exact Cosserat model [J]. Chinese Physics B, 2009, 18(1): 1-8.
- [12] 刘延柱, 薛纭. 基于精确 Cosserat 模型的螺旋杆稳定性分析 [J]. 应用数学和力学, 2011, 32(5): 570-578.
- [13] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity [M]. New York: McGraw-Hill, 1951: 275-313.
- [14] SHAMES I H, DYM C L. Energy and finite element methods in structural mechanics [M]. Chaman Offset, Delhi, India: New Age International Publishers, 1991: 197-203.
- [15] SOFI A, MUSCOLINO G. Dynamic analysis of suspended cables carrying moving oscillators [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(21): 6725-6743.
- [16] JAVID F, ESMAILZADEH E, YOUNESIAN D. An investigation into the vehicle-curved bridge dynamic interaction [J]. International Journal of Automotive Engineering, 2011, 1(3): 235-243.

(编辑 张 宏)