

空间飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 控制

马清亮, 郑建飞, 蔡宗平, 孔祥玉

(第二炮兵工程大学 控制工程系, 710025 西安)

摘要: 提出一种基于平方和优化的空间飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 控制方法. 为适应飞行器大角度姿态机动的要求, 采用修正的 Rodrigues 参数描述卫星的姿态运动, 并将飞行器姿态运动学和动力学方程转化为线性参数可变 (LPV) 系统; 为降低设计的保守性, 通过引入附加松弛变量, 提出一种系统矩阵与 Lyapunov 矩阵分离的混合 H_2/H_∞ 性能准则; 基于该性能准则, 运用 Lyapunov 方法和平方和优化技术, 推导出飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件, 并将混合 H_2/H_∞ 控制器设计问题转化为具有平方和约束的参数优化问题.

关键词: 姿态控制; 混合 H_2/H_∞ 控制; 大角度姿态机动; 平方和优化

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2012)11-0105-07

Mixed H_2/H_∞ control of spacecraft large angle attitude maneuvers

MA Qing-liang, ZHENG Jian-fei, CAI Zong-ping, KONG Xiang-yu

(Dept. of Control Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: A novel approach to mixed H_2/H_∞ control of spacecraft large angle attitude maneuvers is proposed based on sum of squares (SOS) optimization. By using modified Rodrigues parameters, the attitude dynamics of the spacecraft is represented in terms of linear parameter varying (LPV) systems. To reduce the designed conservativeness, a new mixed H_2/H_∞ performance criterion is presented by introducing additional slack matrix variables, which eliminates the coupling terms between system matrices and Lyapunov matrix. Based on this, a sufficient condition for the existence of mixed H_2/H_∞ controller is derived by using Lyapunov approach and SOS optimization. Finally, the H_2/H_∞ controller design problem is converted into a parameter optimization problem with SOS constraints.

Key words: attitude control; mixed H_2/H_∞ control; large angle attitude maneuver; sum of squares optimization

姿态机动对于空间飞行器完成精确定向、跟踪等期望的飞行任务至关重要^[1]. 对于飞行器大角度机动的姿态控制问题, 目前已提出了变结构控制、解耦控制以及模糊控制等多种方法. 文献[2]应用滑模控制方法解决飞行器姿态控制的不确定性. 文献[3-4]运用 Lyapunov 方法和平方和优化技术, 设计了用于飞行器大角度姿态机动的非线性镇定控制器. 在考虑外部干扰的情况下,

文献[5]进一步研究了飞行器大角度姿态机动的非线性 H_∞ 控制问题.

另一方面, 混合 H_2/H_∞ 控制是目前控制理论研究的一个热点, 它综合了 H_2 控制和 H_∞ 控制的优点, 能够使系统同时具有较强的鲁棒性能和良好的调节性能^[6]. 据作者所知, 对于空间飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 控制问题, 相关的研究成果目前尚未见报道.

本文在文献[3-5]的基础上, 进一步研究空间飞行器大角度姿态机动的混合 H_2/H_∞ 控制问题. 为适应飞行器大角度姿态机动要求, 采用修正的 Rodrigues 参数 (MRP) 描述卫星的姿态运动,

收稿日期: 2011-10-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61104223, 61074072).

作者简介: 马清亮 (1974—), 男, 博士, 副教授.

通信作者: 马清亮, mql99@sohu.com.

并将非线性飞行器姿态运动学和动力学方程转化为线性参数可变(LPV)系统. 为降低设计的保守性,通过引入附加松弛变量,提出一种系统矩阵与 Lyapunov 矩阵分离的混合 H_2/H_∞ 性能准则;基于该性能准则,运用平方和优化技术和 Lyapunov 方法,推导出飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件,并将混合 H_2/H_∞ 控制器设计问题转化为具有平方和(SOS)约束的参数优化问题.

1 问题描述

采用修正 Rodrigues 参数描述飞行器的姿态运动,具有结构简单、计算量小等优点^[3,7].

修正的 Rodrigues 参数可由四元数得到. 设 $q_i(i = 1, \cdots, 4)$ 为四元数参数, $\sigma_i(i = 1, 2, 3)$ 表示修正的 Rodrigues 参数, $\boldsymbol{e}$ 为刚体飞行器转动轴的单位矢量, $\boldsymbol{e}_i$ 为 $\boldsymbol{e}$ 的方向余弦, θ 为刚体飞行器绕转动轴转动的角度,则有

$$\sigma_i = \frac{q_i}{1 + q_0} = \frac{e_i \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} = e_i \tan \frac{\theta}{4},$$

$i = 1, 2, 3.$

采用修正的 Rodrigues 参数描述刚体飞行器的姿态运动学方程为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & 2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) & 2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2) \\ 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3) & 1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2 & 2(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1) \\ 2(\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2) & 2(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1) & 1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^\text{T}$ 为刚体飞行器绕转动轴转动的角速度.

考虑刚体飞行器的动力学方程:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + T_x + d_x; \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_z \omega_x + T_y + d_y; \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + T_z + d_z. \end{cases} \tag{2}$$

式中: $I_i(i = x, y, z)$ 表示绕星体坐标系第 i 个主轴的转动惯量; T_i, d_i 分别表示绕第 i 个主轴的控制力矩和干扰力矩.

联立刚体飞行器姿态运动学方程(1)和动力学方程(2),可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}. \tag{3}$$

式中:

$$\begin{aligned} f_1 &= [(I_y - I_z)/I_x] \omega_y \omega_z; \\ f_2 &= [(I_z - I_x)/I_y] \omega_z \omega_x; \\ f_3 &= [(I_x - I_y)/I_z] \omega_x \omega_y; \\ f_4 &= \frac{1}{4} [1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2] \omega_x + \frac{1}{4} [2(\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3)] \omega_y + \frac{1}{4} [2(\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2)] \omega_z; \\ f_5 &= \frac{1}{4} [2(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3)] \omega_x + \frac{1}{4} [1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2] \omega_y + \frac{1}{4} [2(\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1)] \omega_z; \\ f_6 &= \frac{1}{4} [2(\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2)] \omega_x + \frac{1}{4} [2(\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1)] \omega_y + \frac{1}{4} [1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2] \omega_z. \end{aligned}$$

为完成规定的大角度姿态机动任务,将修正的 Rodrigues 参数作为系统的被调输出,即

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

定义含有角速度和修正 Rodrigues 参数的状态向量 $\boldsymbol{x}(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^\text{T}$, 控制向量 $\boldsymbol{u}(t) = [T_x \ T_y \ T_z]^\text{T}$ 以及干扰向量 $\boldsymbol{w}(t) = [d_x \ d_y \ d_z]^\text{T}$, 则式(3)和(4)可改写为线性参数可变(LPV)系统的形式,具体如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t)) \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_u \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{w}(t); \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t)) \boldsymbol{x}(t). \end{cases} \tag{5}$$

式中:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= [(I_y - I_z)/I_x]\omega_z, \quad a_{23} = [(I_z - I_x)/I_y]\omega_x; \\ a_{31} &= [(I_x - I_y)/I_z]\omega_y, \quad a_{41} = \frac{1}{4}[1 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2]; \\ a_{42} &= \frac{1}{4}[2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)], \quad a_{43} = \frac{1}{4}[2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2)]; \\ a_{51} &= \frac{1}{4}[2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3)], \quad a_{52} = \frac{1}{4}[1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2]; \\ a_{53} &= \frac{1}{4}[2(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1)], \quad a_{61} = \frac{1}{4}[2(\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2)]; \\ a_{62} &= \frac{1}{4}[2(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1)], \quad a_{63} = \frac{1}{4}[1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2]; \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

定义与系统状态 $\mathbf{x}(t)$ 和控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 相关的 H_2 性能指标

$$J_2 = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt. \tag{6}$$

式中: $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 是给定的对称正定矩阵.

在状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t). \tag{7}$$

的作用下,相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(t); \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t). \end{cases} \tag{8}$$

式中: $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}_u\mathbf{K}(\mathbf{x}(t))$.

本文研究的问题是:对于由式(5)描述的 LPV 系统,要求设计状态反馈控制器(7),使得相应的闭环系统(8)是稳定的,同时满足如下性能指标:

1) H_∞ 性能:对于给定的标量 $\gamma > 0$,从 $\mathbf{w}(t)$ 到 $\mathbf{z}(t)$ 的闭环传递函数 $T_{zw}(s)$,其 H_∞ 范数小于

γ ;

2) H_2 性能:由式(6)定义的系统 H_2 性能指标达到最小.

对于系统(8),若 $\mathbf{w}(t) = 0$,则称其为无外扰系统. 简便起见,以下分别用 $\mathbf{x}, \mathbf{w}$ 表示 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{w}(t)$,用 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \mathbf{C}(\mathbf{x})$ 表示 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(t))$ 和 $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t))$.

2 混合 H_2/H_∞ 性能分析

本节首先介绍多项式平方和分解技术,然后分别推导出 LPV 系统的 H_2 和 H_∞ 性能准则,在此基础上,提出一种系统矩阵与 Lyapunov 矩阵分离的混合 H_2/H_∞ 性能准则.

2.1 平方和分解

定义 1 对于 n 元实系数多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,若存在一组多项式 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$,使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^m g_i^2(x).$$

则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为平方和(SOS)多项式.

平方和分解为多元多项式的非负性判定提供了一个充分条件. 记 Σ_{SOS} 表示所有平方和多项式的集合. 根据定义 1 可知,若 $f(x) \in \Sigma_{\text{SOS}}$,则对于任意 $x \in \mathbf{R}^n$,均有 $f(x) \geq 0$ 成立.

下述命题给出了一个更为简便的判定多元多项式是否为 SOS 多项式的方法^[8].

命题 1 设 $f(x)$ 是一个次数不高于 $2d$ 的 n 元多项式, $\mathbf{Z}(x)$ 是由次数不高于 d 的单项式组成的列向量,则 $f(x)$ 为 SOS 多项式的充要条件是存在一个正定矩阵 $\mathbf{Q}$,使得

$$f(x) = \mathbf{Z}^T(x)\mathbf{Q}\mathbf{Z}(x).$$

在多项式平方和分解的基础上,下述引理给出了一个判定多项式矩阵是否为正定(半正定)矩阵的方法^[9].

引理 1 设矩阵 $\mathbf{F}(x)$ 是次数为 $2d$ 的对称多项式矩阵, $\mathbf{Z}(x)$ 是由次数不高于 d 的单项式组成的列向量,考虑如下 3 个条件:

- 1) 对于所有的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$,均有 $F(x) \geq 0$;
- 2) $\mathbf{v}^T \mathbf{F}(x) \mathbf{v}$ 是 SOS 多项式,其中 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N$ 是与不相关的向量;

3) 存在一个正定矩阵 $\mathbf{Q}$,使得 $\mathbf{v}^T \mathbf{F}(x) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{Z}(x))^T \mathbf{Q} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{Z}(x))$;
则有: (1) $\Leftrightarrow$ (2) and (2) $\Leftrightarrow$ (3).

2.2 H_2 性能准则

记 $\mathbf{A}_i(x)$ 表示多项式矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 的第 i 行.
以下定理以矩阵不等式的形式,给出了判定 LPV 系统 H_2 性能指标的方法.

定理 1 如果存在对称正定多项式矩阵 $X_2(x)$, 使得如下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} F_1 & * & * \\ X_2(x) & -Q^{-1} & * \\ K(x)X_2(x) & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

式中: $F_1 = \bar{A}(x)X_2(x) + X_2(x)\bar{A}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_2(x)}{\partial x_j} \bar{A}_j(x)x$, 则无外扰闭环系统(8) 是稳定的, 且系统的 H_2 性能指标满足 $J_2 < x^T(0)X_2^{-1}(x(0))x(0)$.

为了推导出与定理 1 等价的扩展 H_2 性能准则, 首先给出如下引理^[10].

引理 2 给定矩阵 $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $m, k < n$, 则存在矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{m \times k}$, 使得

$$H + UYV + (UYV)^T < 0, \quad (10)$$

当且仅当

$$U^\perp H U^{\perp T} < 0, V^{\perp T} H V^\perp < 0. \quad (11)$$

结合定理 1 和引理 2, 可推导出一个系统矩阵与 Lyapunov 矩阵分离的扩展 H_2 性能准则.

定理 2 如果存在对称正定多项式矩阵 $X_2(x)$, 多项式矩阵 $F_2(x)$ 和 $G_2(x)$, 使得

$$\begin{bmatrix} F_2 & * & * & * \\ F_3 & -G_2(x) - G_2^T(x) & * & * \\ F_2(x) & G_2(x) & -Q^{-1} & * \\ K(x)F_2(x) & K(x)G_2(x) & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

式中:

$$F_2 = \bar{A}(x)F_2(x) + F_2^T(x)\bar{A}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_2(x)}{\partial x_j} \bar{A}_j(x)x;$$

$F_3 = X_2(x) - F_2(x) + G_2^T(x)\bar{A}^T(x)$; 则无外扰闭环系统(8)是稳定的, 且系统的 H_2 性能指标满足 $J_2 < x^T(0)X_2^{-1}(x(0))x(0)$.

证明 只需证明式(12)与式(9)等价即可. 为此, 将式(12)表示为式(10)的形式, 式中:

$$H = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^n \frac{\partial X_2(x)}{\partial x_j} \bar{A}_j(x)x & X_2(x) & 0 & 0 \\ X_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix},$$

$$U = [\bar{A}^T(x) \quad -I \quad I \quad K^T(x)]^T,$$

$$Y = [F_2(x) \quad G_2(x)], V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{选取 } N_U = \begin{bmatrix} I & \bar{A}(x) & 0 & 0 \\ 0 & K(x) & 0 & I \\ 0 & I & I & 0 \end{bmatrix}, N_V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

则根据引理 2 可知, 式(12) 与式(9) 等价. 定理得证.

根据定理 2 可知, 判定 LPV 系统的 H_2 性能指标需要求解一个无限维线性矩阵不等式 (LMI) 问题. 为便于求解, 下述定理以 SOS 的形式, 给出了一个判定 LPV 系统 H_2 性能指标的方法.

定理 3 如果存在对称多项式矩阵 $X_2(x)$, 多项式矩阵 $F_2(x)$ 和 $G_2(x)$, 满足如下条件

$$v_1^T(X_2(x) - \varepsilon_1(x)I)v_1 \in \Sigma_{\text{sos}}, \quad (13)$$

$$-\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_2 + \varepsilon_2(x)I & * & * & * \\ F_3 & -G_2(x) - G_2^T(x) & * & * \\ F_2(x) & G_2(x) & -Q^{-1} & * \\ K(x)F_2(x) & K(x)G_2(x) & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \in \Sigma_{\text{sos}}. \quad (14)$$

式中: $\varepsilon_1(x)$ 和 $\varepsilon_2(x)$ 为非负多项式, 且对于所有的 $x \neq 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$; v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 是与 x 不相关的向量, 则无外扰闭环系统(8) 是稳定的, 且系统的 H_2 性能指标满足 $J_2 < x^T(0)X_2^{-1}(x(0))x(0)$.

证明 结合引理 1 和定理 2 易证得该定理, 略.

2.3 H_∞ 性能准则

定理 4 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 如果存在对称正定多项式矩阵 $X_\infty(x)$, 使得如下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} F_4 & * & * \\ B_w^T & -\gamma^2 I & * \\ C(x)X_\infty(x) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

式中: $F_4 = \bar{A}(x)X_\infty(x) + X_\infty(x)\bar{A}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_\infty(x)}{\partial x_j} \bar{A}_j(x)x$, 则闭环系统(8) 是稳定的, 且具有 H_∞ 性能 γ .

在定理 4 的基础上, 采用与定理 2 类似证明方法, 可推导出一个系统矩阵与 Lyapunov 矩阵分离的 H_∞ 性能准则.

定理 5 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 如果存在对称多项式矩阵 $X_\infty(x)$, 多项式矩阵 $F_\infty(x)$ 和 $G_\infty(x)$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Gamma_5 & * & * & * \\ \Gamma_6 & -\mathbf{G}_\infty(x) - \mathbf{G}_\infty^T(x) & * & * \\ \mathbf{B}_w^T & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}(x)\mathbf{F}_\infty(x) & \mathbf{C}(x)\mathbf{G}_\infty(x) & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

式中:

$$\Gamma_5 = \bar{\mathbf{A}}(x)\mathbf{F}_\infty(x) + \mathbf{F}_\infty^T(x)\bar{\mathbf{A}}^T(x) -$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{X}_\infty(x)}{\partial x_j} \bar{\mathbf{A}}_j(x)x;$$

$$\Gamma_6 = \mathbf{X}_\infty(x) - \mathbf{F}_\infty(x) + \mathbf{G}_\infty^T(x)\bar{\mathbf{A}}^T(x).$$

则闭环系统(8)是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ .

结合引理1和定理5,下述定理给出了一个判定 LPV 系统的 H_∞ 性能的平方和方法.

定理6 对于给定的常数 $\gamma > 0$,如果存在对称多项式矩阵 $\mathbf{X}_\infty(x)$, 多项式矩阵 $\mathbf{F}_\infty(x)$ 和 $\mathbf{G}_\infty(x)$, 满足如下条件:

$$\mathbf{v}_1^T(\mathbf{X}_\infty(x) - \varepsilon_1(x)\mathbf{I})\mathbf{v}_1 \in \Sigma_{SOS}, \quad (17)$$

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_5 & * & * & * \\ \Gamma_6 & -\mathbf{G}_\infty(x) - \mathbf{G}_\infty^T(x) & * & * \\ \mathbf{B}_w^T & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}(x)\mathbf{F}_\infty(x) & \mathbf{C}(x)\mathbf{G}_\infty(x) & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}. \quad (18)$$

式中: $\varepsilon_1(x)$ 和 $\varepsilon_2(x)$ 为非负多项式,且对于所有的 $x \neq 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 和 $\mathbf{v}_5$ 是与 x 不相关的向量,则闭环系统(8)是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ .

2.4 混合 H_2/H_∞ 性能准则

在定理3和定理6的基础上,通过选取一个公共的多项式矩阵 $\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_\infty(x) = \mathbf{F}_2(x)$, 可得 LPV 系统的 H_2/H_∞ 性能准则.

定理7 给定常数 $\gamma > 0$,如果存在对称多项式矩阵 $\mathbf{X}_2(x)$ 和 $\mathbf{X}_\infty(x)$, 多项式矩阵 $\mathbf{F}(x)$ 、 $\mathbf{G}_2(x)$ 和 $\mathbf{G}_\infty(x)$, 满足如下条件:

$$\mathbf{v}_1^T(\mathbf{X}_2(x) - \varepsilon_1(x)\mathbf{I})\mathbf{v}_1 \in \Sigma_{SOS}, \quad (19)$$

$$\mathbf{v}_2^T(\mathbf{X}_\infty(x) - \varepsilon_2(x)\mathbf{I})\mathbf{v}_2 \in \Sigma_{SOS}, \quad (20)$$

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_7 + \varepsilon_3(x)\mathbf{I} & * & * & * \\ \Gamma_8 & -\mathbf{G}_2(x) - \mathbf{G}_2^T(x) & * & * \\ \mathbf{F}(x) & \mathbf{G}_2(x) & -\mathbf{Q}^{-1} & * \\ \mathbf{K}(x)\mathbf{F}(x) & \mathbf{K}(x)\mathbf{G}_2(x) & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}, \quad (21)$$

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{v}_7 \\ \mathbf{v}_8 \\ \mathbf{v}_9 \\ \mathbf{v}_{10} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_9 + \varepsilon_4(x)\mathbf{I} & * & * & * \\ \Gamma_{10} & -\mathbf{G}_\infty(x) - \mathbf{G}_\infty^T(x) & * & * \\ \mathbf{B}_w^T & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}(x)\mathbf{F}(x) & \mathbf{C}(x)\mathbf{G}_\infty(x) & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_7 \\ \mathbf{v}_8 \\ \mathbf{v}_9 \\ \mathbf{v}_{10} \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}. \quad (22)$$

式中:

$$\Gamma_7 = \bar{\mathbf{A}}(x)\mathbf{F}(x) + \mathbf{F}^T(x)\bar{\mathbf{A}}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{X}_2(x)}{\partial x_j} \bar{\mathbf{A}}_j(x)x;$$

$$\Gamma_8 = \mathbf{X}_2(x) - \mathbf{F}(x) + \mathbf{G}_2^T(x)\bar{\mathbf{A}}^T(x);$$

$$\Gamma_9 = \bar{\mathbf{A}}(x)\mathbf{F}(x) + \mathbf{F}^T(x)\bar{\mathbf{A}}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{X}_\infty(x)}{\partial x_j} \bar{\mathbf{A}}_j(x)x;$$

$$\Gamma_{10} = \mathbf{X}_\infty(x) - \mathbf{F}(x) + \mathbf{G}_\infty^T(x)\bar{\mathbf{A}}^T(x);$$

$\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x)$ 和 $\varepsilon_4(x)$ 为非负多项式,且对于所有的 $x \neq 0$, 有 $\varepsilon_1(x) > 0, \varepsilon_2(x) > 0$; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8, \mathbf{v}_9$ 和 $\mathbf{v}_{10}$ 是与 x 不相关的向量,则闭环系统(8)是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ , 同时系统的 H_2 性能指标满足

$$J_2 < x^T(0)\mathbf{X}_2^{-1}(x(0))x(0).$$

在定理7所给出的混合 H_2/H_∞ 性能准则,通过引入附加松弛变量 $\mathbf{F}(x)$ 、 $\mathbf{G}_2(x)$ 和 $\mathbf{G}_\infty(x)$, 实现了系统矩阵与 Lyapunov 矩阵的分离,使得系统能够采用不同的 Lyapunov 矩阵,即 $\mathbf{X}_2(x)$ 和 $\mathbf{X}_\infty(x)$, 分别满足系统的 H_2 和 H_∞ 性能设计要求. 定理7仅对松弛变量 $\mathbf{F}(x)$ 进行约束,避免了引入公共 Lyapunov 矩阵这一苛刻条件,而且松弛变量 $\mathbf{F}(x)$ 、 $\mathbf{G}_2(x)$ 和 $\mathbf{G}_\infty(x)$ 的引入,能够为控制器的设计提供更多的自由度. 因此,与采用公共 Lyapunov 矩阵的设计方法相比,基于定理7设计混合 H_2/H_∞ 控制器,可以有效降低设计的保守性.

定理7中的所有条件均以 SOS 的形式给出,并且能够方便地运用 MATLAB SOSTOOLS 工具箱进行求解,从而有效避免了直接求解无限维线性矩阵不等式问题的困难^[11].

3 混合 H_2/H_∞ 控制器设计

在定理7的基础上,可推导出空间飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的存

在条件和设计方法.

定义 $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ 表示由矩阵 $B = [B_u \ B_w]$ 的全零行标志构成的集合,即

$$J = \{j \mid e_j^T [B_u \ B_w] = 0, \forall x \in \mathbf{R}^n\}. \quad (23)$$

假设集合 J 中有 k_m 个元素,令

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{k_m}]^T, j_1 < \dots < j_m, j_k \in J, k = 1, \dots, k_m. \quad (24)$$

定理 8 考虑系统(5),给定常数 $\gamma > 0, \alpha$ 和 β ,如果存在对称多项式矩阵 $X_2(\bar{x})$ 和 $X_\infty(\bar{x})$,以及多项式矩阵 $F(\bar{x})$ 和 $Y(x)$,满足

$$v_1^T (X_2(\bar{x}) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \in \Sigma_{SOS}, \quad (25)$$

$$v_2^T (X_\infty(\bar{x}) - \varepsilon_2(x)I) v_2 \in \Sigma_{SOS}, \quad (26)$$

$$-\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{II} + \varepsilon_3(x)I & * & * & * \\ \Gamma_{II} & -\alpha F(\bar{x}) - \alpha F^T(\bar{x}) & * & * \\ F(\bar{x}) & \alpha F(\bar{x}) & -Q^{-1} & * \\ Y(x) & \alpha Y(x) & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}, \quad (27)$$

$$-\begin{bmatrix} v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{II} + \varepsilon_4(x)I & * & * & * \\ \Gamma_{II} & -\beta F(\bar{x}) - \beta F^T(\bar{x}) & * & * \\ B_w^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C(x)F(\bar{x}) & \beta C(x)F(\bar{x}) & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}. \quad (28)$$

式中:

$$\Gamma_{II} = A(x)F(\bar{x}) + B_u Y(x) + F^T(\bar{x})A^T(x) + Y^T(x)B_u^T - \sum_{j \in J} \frac{\partial X_2(\bar{x})}{\partial x_j} A_j(x)x;$$

$$\Gamma_{II} = X_2(\bar{x}) - F(\bar{x}) + \alpha F^T(\bar{x})A^T(x) + \alpha Y^T(x)B_u^T;$$

$$\Gamma_{II} = A(x)F(\bar{x}) + B_u Y(x) + F^T(\bar{x})A^T(x) + Y^T(x)B_u^T - \sum_{j \in J} \frac{\partial X_\infty(\bar{x})}{\partial x_j} A_j(x)x;$$

$\Gamma_{II} = X_\infty(\bar{x}) - F(\bar{x}) + \beta F^T(\bar{x})A^T(x) + \beta Y^T(x)B_u^T$; $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x)$ 和 $\varepsilon_4(x)$ 为非负多项式,且对于所有的 $x \neq 0$,有 $\varepsilon_1(x) > 0, \varepsilon_2(x) > 0$; $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ 和 v_{10} 是与 x 不相关的向量,则闭环系统(8)是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ ,

同时系统的 H_2 性能满足 $J_2 < x^T(0)X_2^{-1}(\bar{x}(0))x(0)$.

进一步的,如果式(25)~(28)存在一个可行解 $(X_2(\bar{x}), X_\infty(\bar{x}), F(\bar{x}), Y(x))$,则系统(5)的混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器(7)中的多项式矩阵 $K(x)$ 可由下式构造

$$K(x) = Y(x)F^{-1}(\bar{x}). \quad (29)$$

证明 考虑系统的 H_2 和 H_∞ 性能设计要求,分别选取如下形式的候选 Lyapunov 函数

$$V_2(x) = x^T X_2^{-1}(\bar{x})x, \quad (30)$$

$$V_\infty(x) = x^T X_\infty^{-1}(\bar{x})x. \quad (31)$$

显然,若条件式(25)和(26)成立,则有 $X_2(\bar{x}) > 0, X_\infty(\bar{x}) > 0$. 于是,由 $X_2(\bar{x})$ 和 $X_\infty(\bar{x})$ 的正定性可知函数 $V_2(x)$ 和 $V_\infty(x)$ 是正定的.

根据定理 7 可知,闭环系统(8)是稳定的且具有 H_∞ 性能 γ ,同时系统的 H_2 性能满足 $J_2 < x^T(0)X_2^{-1}(\bar{x}(0))x(0)$,其充分条件是存在对称多项式矩阵 $X_2(\bar{x})$ 和 $X_\infty(\bar{x})$,多项式矩阵 $F(\bar{x})$ 、 $G_2(\bar{x})$ 和 $G_\infty(\bar{x})$,使得式(25)和(26)成立,并且

$$-\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_7 + \varepsilon_3(x)I & * & * & * \\ \tilde{\Gamma}_8 & -G_2(\bar{x}) - G_2^T(\bar{x}) & * & * \\ F(\bar{x}) & G_2(\bar{x}) & -Q^{-1} & * \\ K(x)F(\bar{x}) & K(x)G_2(\bar{x}) & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}, \quad (32)$$

$$-\begin{bmatrix} v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_9 + \varepsilon_4(x)I & * & * & * \\ \tilde{\Gamma}_{10} & -G_\infty(\bar{x}) - G_\infty^T(\bar{x}) & * & * \\ B_w^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C(x)F(\bar{x}) & C(x)G_\infty(\bar{x}) & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} \in \Sigma_{SOS}. \quad (33)$$

式中:

$$\tilde{\Gamma}_7 = \bar{A}(x)F(\bar{x}) + F^T(\bar{x})\bar{A}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_2(\bar{x})}{\partial x_j} \bar{A}_j(x)x;$$

$$\tilde{\Gamma}_8 = X_2(\bar{x}) - F(\bar{x}) + G_2^T(\bar{x})\bar{A}^T(x);$$

$$\tilde{\Gamma}_9 = \bar{A}(x)F(\bar{x}) + F^T(\bar{x})\bar{A}^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_\infty(\bar{x})}{\partial x_j} \bar{A}_j(x)x;$$

$$\tilde{\Gamma}_{10} = X_\infty(\bar{x}) - F(\bar{x}) + G_\infty^T(\bar{x})\bar{A}^T(x).$$

将式(32)和(33)展开,并令 $G_2(\bar{x}) = \alpha F(\bar{x})$,

$G_\infty(\bar{x}) = \beta F(\bar{x})$, $Y(x) = K(x)F(\bar{x})$ 经整理即可得到式(27)、(28). 定理的其余部分很容易从前面的分析得到, 定理得证.

考虑如下关系:

$$J_2 < x^T(0)X_2^{-1}(\bar{x}(0))x(0) \leq \lambda, \quad (34)$$

根据 Schur 补引理, 上式可改写为

$$\begin{bmatrix} \lambda & x^T(0) \\ x(0) & X_2(\bar{x}(0)) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (35)$$

由引理 1 可知, 若式

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda & x^T(0) \\ x(0) & X_2(\bar{x}(0)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \in \Sigma_{\text{sos}} \quad (36)$$

成立, 式中 v_{11} 和 v_{12} 是与 x 不相关的向量, 则有式(35)成立.

综合以上分析和定理 8 可知, 混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器设计可归结为一个具有平方和约束的参数 λ 最小化问题.

推论 1 对于系统(5), 给定常数 $\gamma > 0$, 若如下优化问题

$$\begin{cases} \min_{X_2(\bar{x}), X_\infty(\bar{x}), F(\bar{x}), Y(x), \alpha, \beta} \lambda; \\ \text{s. t. (36) ~ (39), (49).} \end{cases} \quad (37)$$

有解, 则结合定理 8, 利用该优化问题的最优解 $(X_2^*(\bar{x}), X_\infty^*(\bar{x}), F^*(\bar{x}), Y^*(x), \alpha^*, \beta^*)$, 可设计系统(5)的 H_2/H_∞ 状态反馈控制器

$$u = Y^*(x)F^{*-1}(\bar{x})x. \quad (38)$$

相应闭环系统 H_2 性能的上界是 λ^* .

4 结 论

本文研究了基于平方和优化的空间飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 控制问题. 首先采用修正 Rodrigues 参数描述空间飞行器的姿态运动; 然后通过引入附加松弛变量, 提出一种系统矩阵与 Lyapunov 矩阵分离的混合 H_2/H_∞ 性能准则; 在此基础上, 以平方和的形式, 给出飞行器大角度姿态机动混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件, 并将混合 H_2/H_∞ 控制器设计问题转化为具有平方和(SOS)约束的参数优化问题.

参考文献:

[1] ZHENG Q, WU F. Nonlinear H_∞ control design with ax-

isymmetric spacecraft control [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2009, 32(3): 850–858.

- [2] SINGH S N, IYER A. Nonlinear decoupling sliding mode control and attitude control of spacecraft [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems, 1989, 25(5): 752–768.
- [3] GOLLU N, RODRIGUES L. Control of large angle attitude maneuvers for rigid bodies using sum of squares [C]//Proceedings of the 2007 American Control Conference. Piscataway: IEEE, 2007: 3156–3160.
- [4] GOLLU N. Switched control of satellites for global stabilization and local performance: a sum of squares [C]//Proceedings of the 2008 American Control Conference. Piscataway: IEEE, 2008: 2987–2992.
- [5] 王佳, 曾鸣, 苏宝库. 基于平方和的卫星大角度姿态机动非线性 H_∞ 控制 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(5): 1024–1028.
- [6] 马清亮, 胡昌华. 基于多目标进化算法的混合 H_2/H_∞ 优化控制 [J]. 控制与决策, 2004, 19(6): 699–701.
- [7] Chen J Z, YUAN J P, FANG Q. Flight vehicle attitude determination using the modified Rodrigues parameters [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(5): 433–440.
- [8] PARRILO P. A. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry method in robustness and optimization [D]. Pasadena: California Institute Technology, 2000: 37–42.
- [9] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, Wu F. Nonlinear control synthesis by sum-of-squares optimization: a Lyapunov-based approach [C]//Proceedings of the Asian Control Conference. Piscataway: IEEE, 2004: 157–165.
- [10] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, BALADRISHNAN V. Linear matrix inequalities in systems and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 22–23.
- [11] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, PARRILO P A. Introducing SOSTOOLS: A general purpose sum of squares programming solver [C]//Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision Control. Piscataway: IEEE, 2004: 741–746.

(编辑 苗秀芝)