基于 DLM 的桥梁结构承载力的贝叶斯预测

樊学平，吕大刚

（哈尔滨工业大学 土木工程学院，150090 哈尔滨）

摘 要：为结合检测信息和承载力的先验模型来对桥梁结构性能进行预测，认为结构性能随时间变化的动态测量为一个时间序列，然后引入了动态线性模型（DLM）对结构性能进行预测. 考虑到桥梁结构性能的时变特性，运用贝叶斯动态模型建立了退化抗力的状态方程和观测方程，并通过贝叶斯因子来对检测信息进行监控，然后结合参数的先验信息，对退化抗力的状态参数进行贝叶斯后验概率推断，建立了一个动态线性模型来对结构抗力短期的变化趋势进行预测. 为了结构性能线性模型的贝叶斯动态修正，确定了一步向前预测分布和滤波分布. 基于检测信息，考虑到变量估计主观认识的不确定性，引入折扣因子来确定状态误差方差矩阵. 最后，通过算例论证了本文方法的适用性.

关键词：贝叶斯方法；动态线性模型；结构抗力；结构可靠性；贝叶斯预测

中图分类号：TU391；TU392.5 **文献标志码**：A **文章编号**：0367－6234(2012)12－0013－05

Bayesian prediction of structural bearing capacity of aging bridges based on dynamic linear model

FAN Xue-ping, LÜ Da-gang

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, 150090 Harbin, China)

Abstract: To predict the bridge structure performance based on inspection information and the priori model of bearing capacity, the dynamic measure of structural performance over time is treated as a time series, a Bayesian dynamic linear model (DLM) is then introduced. Considering the time-dependent characteristics of structural performance of the considered bridge, this paper proposes the probability method of bridge resistance degradation predication. State equation and observation equation of resistance degradation are established with Bayesian dynamic linear model. Combining parameters' prior information with the early resistance observation data containing noise, the resistance degradation state parameters are deduced with Bayesian Posterior Probability. A dynamic linear model is built to forecast the short-term trend of structural resistance. The one-step-ahead forecast distribution and the filtering distribution are determined for Bayesian dynamic updating. To allow for the epistemic uncertainty in variance estimation based on inspection information, a discount factor approach is made for specification of unknown variance matrix. Finally, a RC girder is taken as an illustration example to demonstrate the applicability of the proposed method.

Key words: bayesian method; dynamic linear model; structural resistance; structural reliability; bayesian prediction

结构性能的退化是个不可逆过程. 评估和预测结构性能，进而分析结构性能退化对结构可靠性的影响，是结构时变可靠性研究的关键问题[1].

关于结构性能的退化预测方法，国内外已有很多研究成果[2-5]，但这些方法都存在着一定的局限性，如逐次回归分析法具有静态的局限性；时间序列分析法只适合于预报随机性的平稳数据序列；灰色模型只适合于预报强趋势性的数据序列，

收稿日期：2012－03－27.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(50978080, 50678057).
作者简介：樊学平(1985—)，男，博士研究生；
吕大刚(1970—)，男，教授，博士生导师.
通信作者：吕大刚，ludagang@hit.edu.cn.

等等. 而桥梁结构性能的退化是个时变过程,利用上面的方法进行预测很难反映桥梁结构性能的退化规律,而且上述方法多为离线预测,很难实现结构性能的实时预测和实时监控.

基于上述问题,结构性能随时间变化的动态测量为一个时间序列,而且贝叶斯动态线性模型能够实现结构性能的在线即时预测,因而引入贝叶斯动态线性模型. 考虑桥梁结构性能的时变特性,建立了一个贝叶斯动态线性模型来对结构短期的承载力和可靠度变化趋势进行监控与预测.

1 贝叶斯动态线性模型

贝叶斯动态模型是利用客观信息和主观信息相结合的方法实现预测,建立动态模型,利用检测到的结构性能信息不断修正相关参数的先验模型,从而得到更符合实际情况的预测结果[1,6-14].

所谓动态线性模型[15]是由两个方程确定的系统构成,这个系统可描述为:(1)过程的观测如何随机地依赖于当前的状态参数;(2)状态参数如何随时间变化,表示了系统内部的动态变化和随机扰动.

若假定观测量与状态参数均为正态随机变量,则称这类动态线性模型为正态动态线性模型,所表示的观测方程,状态方程以及初始先验信息,分别见式(1)~(3).

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_t + \boldsymbol{\nu}_t,\quad \boldsymbol{\nu}_t \sim N[0,\boldsymbol{V}_t], \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{G}_t\boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t,\quad \boldsymbol{\omega}_t \sim N[0,\boldsymbol{W}_t]$$
$$(t = 1,2\cdots,T), \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{\theta}_{t-1} \mid \boldsymbol{D}_{t-1}) \sim N[\boldsymbol{m}_{t-1},\boldsymbol{C}_{t-1}]. \tag{3}$$

式中:$\boldsymbol{y}_t$ 为 r 维观测向量,$\boldsymbol{\theta}_t$ 为 n 维状态参数向量,均为正态随机变量. $\boldsymbol{\nu}_t$ 为 r 维观测误差向量,$\boldsymbol{\omega}_t$ 为 n 维状态误差向量,均为零均值正态随机变量. $\boldsymbol{D}_{t-1}$ 为 $t-1$ 时刻及其以前时刻所有有效信息的集合.

对于每一个时刻 t,模型对应一个四元素组合 $\{\boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{G}_t, \boldsymbol{V}_t, \boldsymbol{W}_t\}$,其中 $\boldsymbol{F}_t$ 表示观测方程的回归矩阵;$\boldsymbol{G}_t$ 表示状态转移矩阵;$\boldsymbol{V}_t$ 是方差阵,表示观测误差的不确定性;$\boldsymbol{W}_t$ 是方差阵,表示模型由 $t-1$ 时刻递推到 t 时刻过程中的不确定性. $\boldsymbol{\nu}_t$ 为观测噪声,$\boldsymbol{\omega}_t$ 为状态噪声,在本文中 $\boldsymbol{\nu}_t$ 和 $\boldsymbol{\omega}_t$ 相互独立而且各自独立[5].

由式(1)~(3)可导出观测向量与状态参数向量之间的关系为

$$(\boldsymbol{y}_t \mid \boldsymbol{\theta}_t) \sim N[\boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{V}_t],\ (\boldsymbol{\theta}_t \mid \boldsymbol{\theta}_{t-1}) \sim N[\boldsymbol{G}_t\boldsymbol{\theta}_{t-1},\boldsymbol{W}_t]. \tag{4}$$

贝叶斯动态模型的建模和修正过程见图 1.

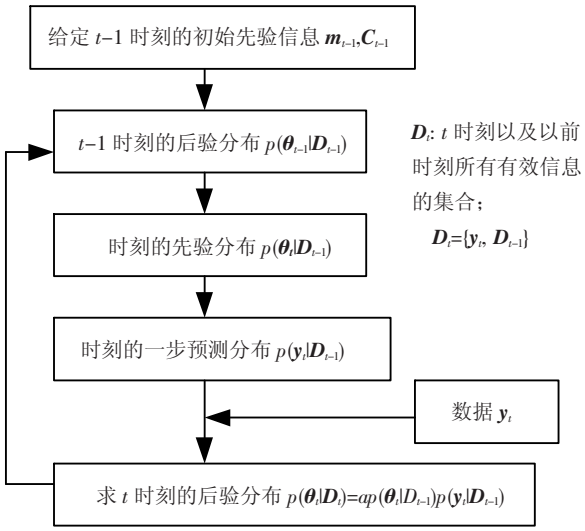


图 1 贝叶斯动态建模和修正过程

2 桥梁退化抗力的贝叶斯动态预测

2.1 退化抗力或承载力贝叶斯动态线性模型的建立

考虑到钢筋混凝土梁抗力退化的特性,本文选择了线性增长的结构性能模型[1,6,16],它能够预测结构可靠性在短期内的变化趋势. 即

$$\boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}} = [1\ 0],\boldsymbol{G}_t = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

从而可得线性增长的贝叶斯动态模型的观测方程,状态方程以及初始先验信息. 如式(5)~(7)所示.

$$\boldsymbol{y}_t = [1\ 0][\mu_t\quad \beta_t]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nu}_t,\ \boldsymbol{\nu}_t \sim N[0,\boldsymbol{V}_t], \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}\mu_t\\ \beta_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{t-1}\\ \beta_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_{t1}\\ \omega_{t2}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\omega}_t \sim N[0,\boldsymbol{W}_t],\ (t = 1,2\cdots,T), \tag{6}$$

$$(\boldsymbol{\mu}_0\quad \boldsymbol{\beta}_0) \sim N[\boldsymbol{m}_0,\boldsymbol{C}_0]. \tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{y}_t$ 为结构性能指标在 t 时刻的观测值;μ_t 为 t 时刻观测值的平均值;β_{t-1} 为结构性能指标(如:退化速度)均值在 $t-1$ 与 t 时刻之间的变化,均是正态随机变量;$\boldsymbol{\nu}_t$ 为观测的误差;ω_{t1} 与 ω_{t2} 表示在 $t-1$ 向 t 时刻递推过程中的不确定性,均是零均值正态随机变量.

建立动态线性模型需要确定的参数:$\theta_0 = (\mu_0\quad \beta_0)$ 的先验分布参数 $\boldsymbol{m}_0,\boldsymbol{C}_0$;观测误差 $\boldsymbol{\nu}_t$ 和状态误差 $\boldsymbol{\omega}_t$ 的分布参数.

$\boldsymbol{V}_t$ 根据检测样本信息来进行估计,$\boldsymbol{W}_t$ 主要来源于知识不完善引发的主观不确定性[16],经常根据主观经验赋予先验参数,根据文献[17]的研究,引入折扣因子,即

$$\boldsymbol{W}_t = -\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_{t-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + \frac{\boldsymbol{C}_{t-1}}{\delta}. \tag{8}$$

式中 δ 为折扣因子，根据经验一般取 0.95 ~ 0.98.

2.2 受弯承载力贝叶斯动态线性模型的递推与修正

贝叶斯动态预测模型适合对未来和过去的状态参数进行预测和推断，它的递推求解过程类似卡尔漫滤波过程[6, 15, 17-19]，具体步骤如下.

1）$t-1$ 时刻状态参数的后验分布对于均值 $\boldsymbol{m}_{t-1}$ 和方差矩阵 $\boldsymbol{C}_{t-1}$ 有

$$(\boldsymbol{\theta}_{t-1} \mid \boldsymbol{D}_{t-1}) \sim N[\boldsymbol{m}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1}], \tag{9}$$

2）t 时刻状态参数的先验分布

$$(\boldsymbol{\theta}_t \mid \boldsymbol{D}_{t-1}) \sim N[\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{R}_t], \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{m}_{t-1}, \boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{G}_t \boldsymbol{C}_{t-1} \boldsymbol{G}_t^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{W}_t$.

3）t 时刻一步预测分布

$$(\boldsymbol{y}_t \mid \boldsymbol{D}_{t-1}) \sim N[\boldsymbol{f}_t, \boldsymbol{Q}_t], \tag{11}$$

式中

$$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}_t \mid \boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_t,$$
$$\boldsymbol{Q}_t = \mathrm{var}(\boldsymbol{y}_t \mid \boldsymbol{y}_{1:t-1}) = \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_t \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{V}_t.$$

4）t 时刻状态参数的后验分布

$$(\boldsymbol{\theta}_t \mid \boldsymbol{D}_t) \sim N[\boldsymbol{m}_t, \boldsymbol{C}_t], \tag{12}$$

式中

$$\boldsymbol{m}_t = E(\boldsymbol{\theta}_t \mid \boldsymbol{D}_t) = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{A}_t \boldsymbol{e}_t,$$
$$\boldsymbol{C}_t = \mathrm{var}(\boldsymbol{\theta}_t \mid \boldsymbol{D}_t) = \boldsymbol{R}_t - \boldsymbol{A}_t \boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_t,$$
$$\boldsymbol{A}_t = \boldsymbol{R}_t \boldsymbol{F}_t \boldsymbol{Q}_t^{-1}, e_t = y_t - f_t \text{（一步预测误差）}.$$

3 贝叶斯动态模型的模型监控

所谓模型监控，就是通过构造监控模型来对模型的监测信息进行监控，发掘信息里面的异常信息，以提高贝叶斯动态模型的预测精度.

本文处理模型监控问题的主要思想是通过使用一个备择模型进行比较而评价模型性能.

在文献[17]中，正态假定下模型的监控是通过贝叶斯因子值的变化来实现的. 其主要思想是：建立备择模型，与现有模型对照来构造贝叶斯因子.

本文采用的一步预测模型和备择模型的概率密度函数为

$$p_0 = (2\pi)^{-0.5} \exp(-0.5 e_{te}^2), \tag{13a}$$
$$p_1 = (2\pi k^2)^{-0.5} \exp(-0.5 e_{te}^2 / k^2). \tag{13b}$$

式中：$e_{te} = (y_t - f_t)/Q_t^{0.5}$ 为标准化预测误差.

贝叶斯因子公式为

$$H(t) = \frac{p_0(y_t \mid D_{t-1})}{p_1(y_t \mid D_{t-1})}, \tag{14a}$$

进一步计算可得

$$H(t) = k \exp\{-0.5 e_{te}^2 (1 - k^{-2})\}. \tag{14b}$$

式中 $p_0(\cdot)$ 为现有模型的一步预测概率模型.

由式（13）、（14）可知贝叶斯因子随备择模型的标准差 k 的变化曲线见图 2.

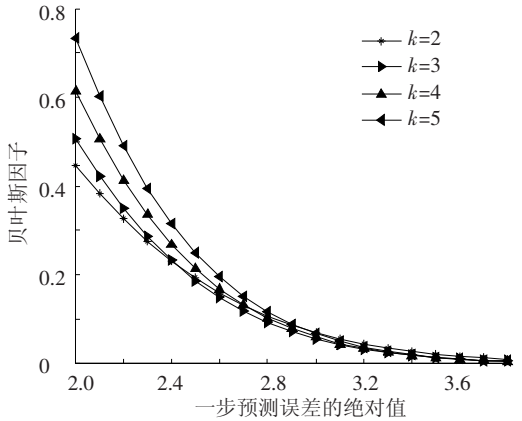


图 2　贝叶斯因子、一步预测误差以及备择模型标准差的影响变化曲线

参考图 2，本文采用的模型监控判断准则为：$k = 3$ 时，$H(t)$ 小于 0.15，则此检测值为异常值，需去除.

4 桥梁可靠度的贝叶斯预测

通过动态线性模型来对退化抗力进行预测，则荷载效应信息也可以通过建立相同的动态线性模型来进行预测. 最后利用预测的抗力与荷载效应信息来对结构的可靠度进行预测.

由于通过建立抗力与荷载效应的动态线性模型来对各自的变量分别进行预测，因而假定抗力与荷载效应相互独立，对于抗力与荷载效应相关的情况需要进一步研究.

假设结构的功能函数为：$Z = R - S = 0$，R 为抗力，S 为荷载效应，且抗力与荷载效应相互独立，已知它们的概率密度函数分别为：$f_R(r)$，$f_S(s)$.

通过抗力与荷载效应的先验概率密度函数以及抗力与荷载效应的检测值，建立贝叶斯动态线性模型，从而可以对它们的概率分布参数进行实时更新，进一步实现失效概率和可靠指标的实时更新，失效概率与可靠指标的计算公式见式（15）、（16）.

$$P_f = P(Z \leqslant 0) = P(R \leqslant S) = \iint_{R \leqslant S} f_R(r) f_S(s) \mathrm{d}r\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s) f_S(s) \mathrm{d}s, \tag{15}$$

可靠指标 β 与失效概率 P_f 之间的一一对应关系为

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f). \tag{16}$$

式中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为逆标准正态分布函数.

5　算例分析

5.1　承载力的贝叶斯预测(贝叶斯因子监控)

本算例结合锈蚀钢筋混凝土构件承载力的计算模型[20],根据影响结构构件承载力的各项随机变量的概率特性[6]模拟计算得到承载力. 然后分析统计得到的承载力数据,得到承载力由于钢筋腐蚀而退化的两阶段特点,第一阶段为时不变过程,第二阶段为时变过程,且两阶段的分界点为第12年.

本算例结合钢筋混凝土梁[6, 21]的检测信息,选取受弯承载力均值 R 作为性能指标,建立贝叶斯动态线性模型对受弯承载力进行预测.

假定梁的受弯承载力 R 与退化速度 g 服从正态分布,知抗力在第12年开始退化,对初始抗力分布及其退化速度的先验预测为

$$\boldsymbol{m}_0 = [102.71, -0.261]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{bmatrix} 168.03 & 1.146 \\ 1.146 & 0.007\,82 \end{bmatrix}.$$

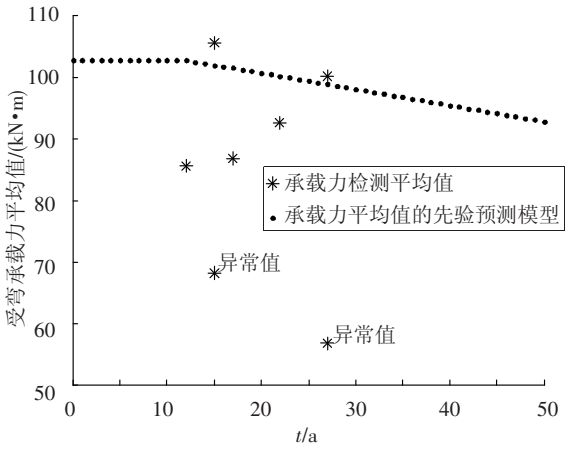
本文认为钢筋开始锈蚀之前(第12年之前)的受弯承载力为随机变量,从而形成了梁承载力退化的两阶段全过程模型. 假设在第12年,15年,17年,22年和27年对此钢筋混凝土梁进行5次检测,得到一系列受弯承载力的检测数据(表1),数据来源文献[6]. 因为5次检测数据是假定或模拟得到的,因而需要对数据的优劣进行判断,本文引入贝叶斯因子来对数据进行判断.

表1　钢筋混凝土梁受弯承载力的检测资料[6]

t/a	平均值 m/(kN·m)	变异系数
12	85.5	0.1
15	105.6	0.1
15	68.2	0.1
17	86.7	0.2
22	92.6	0.1
27	100.1	0.1
27	56.8	0.1

将承载力的先验模型与观测数据同时绘在图3中,可以发现先验模型和观测数据存在明显差异,需要考虑二者的综合. 取折扣因子 $\delta = 0.98$ 建立贝叶斯线性递推模型. 检测数据的监控利用贝叶斯因子和监控准则来进行监控.

检测数据对模型的更新效果见图4、5. 模型更新的效果基本上符合梁的受弯承载力的变化趋势. 第15年和第27年分别有一个数据被识别为异常数据加以舍弃,排除了异常数据对模型的干扰. 从而可知,要建立退化承载力的贝叶斯动态预测模型,选择合适的性能指标和相对准确的检测信息非常关键.



(注:异常值指的是使模型的贝叶斯因子小于0.15的检测值,图中"*"号右上角标有"异常值"字样的点)

图3　先验承载力退化模型与检测数据的分析比较

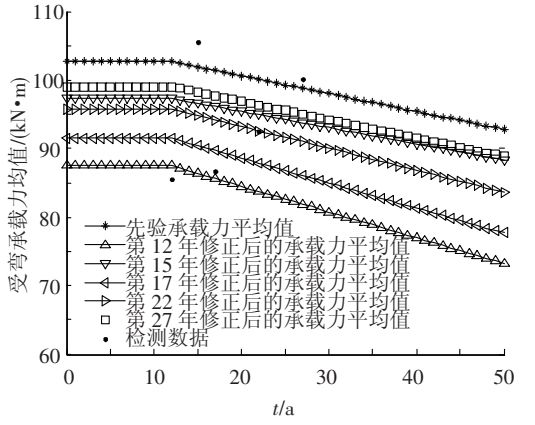


图4　承载力均值随检测信息修正而不断变化的曲线

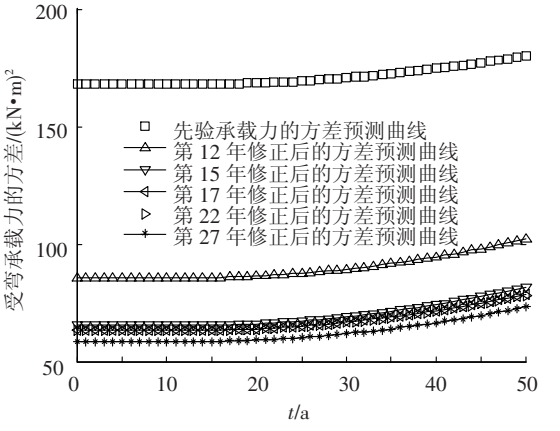


图5　一步预测承载力方差的变化曲线

6 结　论

1）从检测数据对承载能力模型或抗力模型的更新效果上看,预测的均值随着时间的变化越来越小,预测的方差随着时间的变化越来越大,均符合钢筋混凝土梁受弯承载力变化的基本规律.而且随着检测信息对承载能力模型进行不断地修正,可知更新修正后模型的方差(纵坐标)越来越小,可知预测的主观不确定性越来越小,即预测的客观性越来越好.

2）与传统的预测方法相比,贝叶斯动态线性模型随着检测或监测信息而不断修正更新,能够反映承载力时变的退化特点.相对于传统的静态模型,贝叶斯动态模型更适于结构体系的可靠性评估;

3）作者只通过一个桥梁结构构件的的模拟数据验证了贝叶斯动态线性模型的优越性,对于复杂桥梁结构体系健康监测或检测信息,建立多层次的非线性贝叶斯动态模型,实现结构体系可靠度的在线预测有待进一步研究.

参考文献:

[1] 王剑, 刘西拉. 结构生命周期的可靠性管理[J]. 岩石力学和工程学报, 2005, 24(17): 3125 - 3130.

[2] 钟才根,丁文其,王茂和. 神经网络模型在高速公路软基沉降预测中的应用[J]. 中国公路学报, 2003,16(2): 31 - 34.

[3] 兰孝奇,杨永平,黄庆, 等. 建筑物沉降的时间序列分析与预报[J]. 河海大学学报:自然科学版, 2006, 34(4): 426 - 429.

[4] 张仪萍,俞亚南,张土乔, 等. 沉降预测中的灰色模型理论与 Asaoka 法[J]. 系统工程理论与实践, 2002(9):141 - 144.

[5] 魏冠军, 党亚民, 章传银. 应用贝叶斯动态模型的地基沉降概率分析与预测[J]. 测绘科学, 2012, 37(2), 52 - 53.

[6] 王剑. 基于信息更新的混凝土结构性能预测和可靠性管理[D]. 北京:清华大学, 2006.

[7] 张孝令,刘福升,张承进,等. 贝叶斯动态模型及其预测[M]. 济南:山东科技技出版社,1992.

[8] KOCH K R. Bayesian inference with geodetic appliances [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[9] SANKARAN M, SMITH N. Bayesian networks for system reliability reassessment [J]. Structural Safety, 2001, 23(3): 231 - 251.

[10] MORI Y, ELLINGWOOD B R. Maintaining reliability of concrete Structures I: Role of Inspection/Repair[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120(3): 824 - 845.

[11] ELLINGWOOD B R. Reliability-based condition assessment and LRFD for existing structures[J]. Structural Safety, 1996, 18(2): 67 - 80.

[12] STEWART M G. Time-dependent reliability of existing RC structures[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1997, 123(7): 896 - 901.

[13] MADSEN H O. Random fatigue crack growth and inspection [C]//Proceedings of ICOSSAR'85. Kobe: [s. n.], 1985.

[14] IGUSA T, BUONOPANE S G, ELLINGWOOD B R. Bayesian analysis of uncertainty for structural engineering applications[J]. Structural Safety, 2002, 24(3): 165 - 186.

[15] 王剑,刘西拉. 结构性能退化的评估和贝叶斯动态预测[J]. 岩石力学与工程学报, 2007,19(增刊 1): 3170 - 3176.

[16] ENRIGHT M P, FRANGOPOL D M. Condition prediction of deteriorating concrete bridges using bayesian updating[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1999, 125(10): 1118 - 1125.

[17] WEST M, HARRISON J. Bayesian forecasting and dynamic models[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[18] PETRIS G, PETRONE S, CAMPAGNOLI P. Dynamic linear models with R[M]. New York: Springer-Verlag, 2009.

[19] 茆诗松, 贝叶斯统计[M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.

[20] 牛荻涛. 混凝土结构耐久性与寿命预测[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[21] 樊学平. 基于实时监测信息的混凝土连续梁桥时变可靠度评定[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2010.

(编辑　赵丽莹)