

考虑应力扩散时桩端土对桩体阻抗的影响

王 宁^{1,2},王奎华^{1,2},房 凯¹

(1. 浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 310058 杭州; 2. 浙江省土木工程灾变控制重点创新团队, 310058 杭州)

摘 要:为研究桩端土体对桩体阻抗的影响,提出了一种模拟桩土相互作用的新模型.在该模型中,桩端应力扩散到下部土体中,土体中产生的附加应力符合圆形荷载下的 Boussinesq 应力解.相同附加应力形成三维等值面,将等值面包裹的土体区域看作虚土桩.虚土桩底部与基岩接触,限制竖向位移.根据虚土桩底部的边界条件,结合阻抗传递法可得到虚土桩顶部阻抗,将其作为实体桩的实际支撑参数,进而可求得整个桩体的阻抗响应.通过该模型计算得到的桩体阻抗与 Novak 的计算结果进行对比,发现考虑桩端应力扩散效应可以较为真实地反映桩端土体对桩体阻抗响应的影响.桩体刚度与桩端土厚度成反比,阻尼反之.对于长径比较小的桩体,桩端土体的影响更大.

关键词:桩体阻抗;支撑刚度;Boussinesq 解;虚土桩;应力扩散

中图分类号: TU473. 1

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2012)12-0089-06

Influence of stress diffusion of soil surrounding pile tip on the pile impedance

WANG Ning^{1,2}, WANG Kui-hua^{1,2}, FANG Kai¹

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, 310058 Hangzhou, China;
2. Key Creative Team of Disaster Control Engineering, 310058 Hangzhou, China)

Abstract: A model for simulating the pile-soil interaction was presented in this paper to investigate the influence of soil under pile tip on the pile impedance. In this model, the diffusion of additional stress in the soil surrounding pile tip coincides with the Boussinesq's solution under circular loading. The soil in the main zone of the stress diffusion is treated as a fictitious soil pile. The vertical displacement at the bottom of the fictitious soil pile is restrained by bedrock. The impedance on the fictitious soil pile top is obtained via the boundary conditions at the bottom of fictitious pile and impedance transfer method. This serves as the supporting condition of the actual pile, which can be further used to solve the impedance response of the whole pile system. Results of the proposed model are compared with those obtained by Novak's method. It is found that it can yield more accurate prediction of impedance response of pile when considering the stress diffusion in base stratum. Pile damping is proportional to the thickness of base stratum, while the stiffness is on the contrary. For the pile with smaller slenderness ratio, the influence of the stratum under pile tip is more obvious on impedance.

Key words: pile impedance;brace stiffness;boussinesq's solution;fictitious soil pile;stress diffusion

动刚度和阻尼是桩基振动分析中的重要元素.桩土相互作用对动刚度和阻尼的影响很大,土体性质不同时,桩顶的动刚度和阻尼也会不同.

Novak 等^[1]对浅基础的动刚度和动阻尼的取

值进行了讨论,指出基础底部动刚度和动阻尼与基底土体性质、基础半径及荷载频率有关,Chehab 等^[2-3]及 Wang 等^[4]均采用该方法对锤击基础振动特性进行了进一步研究.根据文献[1]的成果,Novak^[5-6]分别在 1974 年和 1977 年对端承桩和摩擦桩的动刚度进行了分析.对基础振动进行计算时,Lysmer 等^[7]指出在合理的振动频率范围内,可以采用模拟公式来代替动阻抗. Meyerhof^[8]则通过极限承载力理论分析指出桩端刚度与土层

收稿日期: 2012-03-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50879077).

作者简介: 王 宁(1983—),男,博士研究生;

王奎华(1965—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 王奎华, zdwkh0618@zju.edu.cn.

不排水强度、桩体横截面相关. 近年来,对桩体纵向振动的研究多集中于考虑土体的三维波动效应,如文献[9-11]的有限元法.

上述研究,土体环境大多被假设为弹性半空间体,忽略桩端土体的成层性,与工程现状存在较大差距. 这样的假设减弱了桩土体系中土体的作用,对土体的性质及分层情况考虑不够充分,尤其是桩端下部土体. 桩端下部土体直接决定了桩端的承接情况,对桩端刚度和阻尼影响很大,对桩体的承载力起着重要作用,因此对桩端下部土体的研究十分必要.

为研究桩端土体与桩体间的耦合效应,本文提出一种虚土桩模型. 虚土桩是一种研究桩端土的独特模型,可以考虑桩端的应力扩散效应,分析桩端土的成层性,模拟桩端沉渣现象,可以方便研究桩端的动刚度和动阻尼,不需要对桩端弹簧和阻尼系数进行假设,实现桩端土与桩体较为严格的耦合联系.

1 理论模型及控制方程

1.1 数学模型的建立

1.1.1 虚土桩模型的建立

假设桩端对土体的作用为均布荷载形式,根据 Boussinesq 解可以求出桩端土中附加应力的分布形式. 对于圆形均布荷载,建立如图 1 的轴对称坐标系,通过积分求得地基中任意点的竖向应力分布为

$$\sigma_z = \frac{3p_b z^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{r dr d\theta}{(z^2 + r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta)^{\frac{5}{2}}} \cdot (1)$$

式中: r_0 表示圆形荷载的半径(桩体半径), p_b 表示均布荷载(桩端平均应力). 上述公式经过积分后,竖向应力 σ_z 变成关于 p_b 、 z 和 R 的函数.

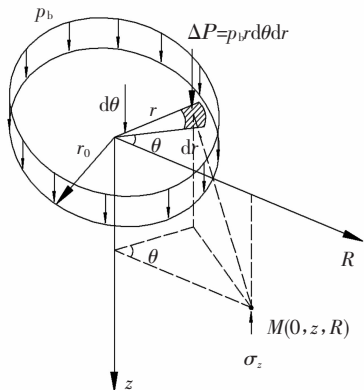


图1 附加应力计算模型

令 $\bar{\sigma} = \sigma_z / p_b$, 表示应力分布线. 相同数值的应力分布线互相连接, 就可形成一个三维的包围 z 轴的应力等值面. 由于桩体竖向振动模型中主要

控制竖向应力和竖向位移, 假设等值面外部土体应力很小, 将等值面内部的土体看作受荷主体, 即作为虚土桩的主体部分.

1.1.2 桩土相互作用模型的建立

图2表示考虑桩端应力扩散效应时的桩土相互作用模型. 虚土桩模型底部与岩床接触, 可避免对桩端刚度参数进行假设. 通过虚土桩底部的位移条件结合阻抗传递法可求得虚土桩顶部的复刚度, 该复刚度可作为实体桩底部的实际支撑刚度. 图2中 l 和 h 分别表示实体桩和虚土桩的长度, m 表示桩侧土体的分布情况, n 表示桩端土的分布情况. 计算时, 将虚土桩划分为很薄的圆柱体进行计算, 计算精度由单元数 N 控制. 桩体根据桩侧土的分层情况划分为相应的 m 个单元.

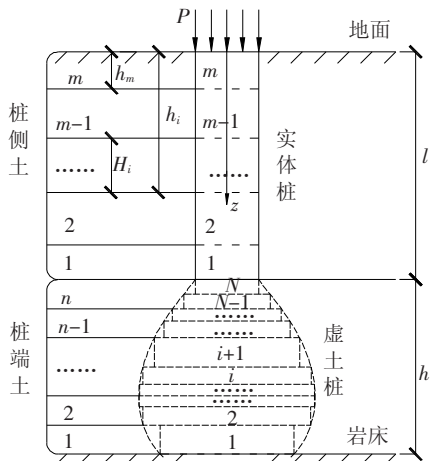


图2 桩土体系模型

以 r_0 表示桩体半径, 用 E_p 、 ρ_p 、 V_p 和 A_p 分别表示桩体弹性模量、密度、桩体纵波波速和截面面积; G_s 、 ρ_s 、 V_s 和 v 表示土体的剪切模量、密度、剪切波速和泊松比; $u_i(r, t)$ 表示第 i 层土体随时间变化的竖向位移, $w_i(z, t)$ 表示对应第 i 层土体的桩体竖向位移; K_b 、 C_b 表示虚土桩底部阻抗系数, K 、 C 表示实体桩端阻抗系数, K_p 、 C_p 表示实体桩顶阻抗系数.

土体和桩体存在以下假设条件:

- 1) 土体为均质、各向同性的粘弹性介质, 虚土桩底部刚度无穷大;
- 2) 土体上表面自由, 无正应力和剪应力;
- 3) 桩体为弹性、竖直、圆形均质截面桩, 振动为小变形谐和振动;
- 4) 桩体径向变形为零, 桩土完全接触, 接触面上应力和竖向位移连续.

1.2 土层振动模型

在平面应变模型^[12]中, 对处于土体中心位置的圆柱体结构纵向振动引起的土体径向振动位移

忽略不计, 主要控制垂直振动位移, 其微分形式为

$$\bar{r}_i^2 \frac{d^2 u_i}{d\bar{r}^2} + \bar{r}_i \frac{du_i}{d\bar{r}} - s_i^2 \bar{r}_i^2 u_i = 0. \quad (2)$$

式中: $\bar{r}_i = \frac{r}{r_{0i}}$ 为无量纲半径, r_{0i} 为第 i 个桩体单元的

半径, $s_i = \frac{j a_{0i}}{\sqrt{1 + j D_{si}}}$, j 为虚数单位, D_{si} 为第 i 层

土体的阻尼系数, $a_{0i} = \frac{\omega r_{0i}}{V_{si}}$ 无量纲频率系数, ω 为振动角频率, V_{si} 为第 i 层土体的剪切波速。

土层边界条件:

$$r \rightarrow \infty, u_i = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

初始条件:

$$u_i \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

方程(2)有以下形式的解:

$$u_i = A_i K_0(s_i \bar{r}_i) + B_i I_0(s_i \bar{r}_i). \quad (6)$$

式中: $I_0(s_i \bar{r}_i)$ 和 $K_0(s_i \bar{r}_i)$ 分别表示零阶第一类和第二类修正贝塞尔函数, A_i 和 B_i 是系数, 由边界条件确定。

根据条件(3) 可以确定 $B_i = 0$, 则土体中任意一点的竖向剪应力为

$$\tau_i = G_{si}^* \frac{du_i}{dr} = - \frac{G_{si}^* s_i}{r_{0i}} A_i K_1(s_i \bar{r}_i). \quad (7)$$

式中 $G_{si}^* = G_{si}(1 + j D_{si})$ 。

根据刚度定义, 桩侧土竖向剪切刚度可表示为

$$K_{si} = \frac{-2\pi r \tau_i}{u_i} = \frac{2\pi \bar{r}_i G_{si}^* s_i K_1(s_i \bar{r}_i)}{K_0(s_i \bar{r}_i)}. \quad (8)$$

1.3 桩体振动模型

桩体的动力平衡方程为

$$E_{pi} A_{pi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - f_i = \rho_{pi} A_{pi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}. \quad (9)$$

式中 f_i 为桩周摩阻力。

桩体边界条件:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = - \frac{P(t)}{E_p A_p}, \quad (10)$$

$$w \Big|_{z=l+h} = 0. \quad (11)$$

桩土接触条件:

$$f_i \Big|_{r=r_{0i}} = 2\pi r_{0i} \tau_i, \quad (12)$$

$$w_i \Big|_{r=r_{0i}} = u_i. \quad (13)$$

初始条件:

$$w_i \Big|_{t=0} = 0, \frac{dw_i}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

根据桩土接触条件桩侧摩阻力可表示为

$$f_i = K_{si} w_i, \quad (15)$$

将式(15)代入式(9)得

$$E_{pi} A_{pi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - \rho_{pi} A_{pi} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - K_{si} w_i = 0. \quad (16)$$

结合初始条件对上式进行关于时间 t 的拉普拉斯变换:

$$E_{pi} A_{pi} \frac{\partial^2 W_i}{\partial z^2} - (\rho_{pi} A_{pi} \xi^2 + K_{si}) W_i = 0. \quad (17)$$

式中 $W_i(z, \xi) = \int_0^{+\infty} w_i(z, t) e^{-\xi t} dt$ 。

解式(17)可得

$$W_i(\bar{z}_i, \xi) = D_{1i} e^{\lambda_i \bar{z}_i / H_i} + D_{2i} e^{-\lambda_i \bar{z}_i / H_i}. \quad (18)$$

式中: $\bar{z}_i = \frac{z}{r_{0i}}$, $\bar{H}_i = \frac{H_i}{r_{0i}}$, $\bar{V}_i = \frac{V_{si}}{V_{pi}}$, $\bar{\rho}_i = \frac{\rho_{si}}{\rho_{pi}}$, $\lambda_i = \bar{H}_i \bar{V}_i$

$$\sqrt{\delta_i^2 + 2\bar{\rho}_i s_i (1 + j D_{si}) \frac{K_1(s_i)}{K_0(s_i)}}, \delta_i = \frac{\xi r_{0i}}{V_{si}}.$$

D_{1i} 和 D_{2i} 为待定系数, 由边界条件确定。

将虚土桩进行纵向单元划分, 虚土桩底部作为阻抗传递的起始点。虚土桩底部第 1 个桩体单元经拉普拉斯变化边界条件为

$$E_{p1} A_{p1} \frac{dW_1}{dz} + (C_b \xi + K_b) W_1 \Big|_{z=l+h} = 0. \quad (19)$$

解式(19)可得

$$\frac{D_{11}}{D_{21}} = \zeta_1 e^{-2\lambda_1(l+h)/r_{01}/H_1}. \quad (20)$$

式中: $\zeta_1 = \frac{\eta_1 - Z_0}{\eta_1 + Z_0}$, $\eta_1 = \frac{\lambda_1 E_{p1} A_{p1}}{H_1}$, $Z_0 = C_b \xi + K_b$ 。

根据复阻抗函数的定义, 可得第 1 个单元顶部的截面阻抗函数为

$$Z_1 = \frac{-\eta_1 (\zeta_1 e^{-2\lambda_1} - 1)}{\zeta_1 e^{-2\lambda_1} + 1}. \quad (21)$$

根据同一截面处复刚度相等的原则, 可通过阻抗传递得到第 i 层桩顶面的复刚度函数表达式为

$$Z_i = -\eta_i \frac{\zeta_i e^{-2\lambda_i} - 1}{\zeta_i e^{-2\lambda_i} + 1}. \quad (22)$$

式中: $\zeta_i = \frac{\eta_i - Z_{i-1}}{\eta_i + Z_{i-1}}$, $\eta_i = \frac{\lambda_i E_{pi} A_{pi}}{H_i}$ 。

2 数值分析

2.1 桩端支撑参数计算

Novak^[6]提出了圆形截面桩桩端的动刚度和动阻尼的表达式为

$$\begin{cases} K = G_s r_0 C_{w1}, \\ C = G_s r_0 C_{w2}. \end{cases} \quad (23)$$

式中: G_s 为桩底土体的剪切模量, r_0 为桩体的半径, C_{w1} 、 C_{w2} 为关于 a_0 的无量纲参数, a_0 为无量纲

角频率, $a_0 = \frac{\omega r_0}{V_s}$.

当 $v = 0.25$ 时

$$\begin{cases} C_{w1} = 5.33 + 0.364a_0 - 1.41a_0^2, \\ C_{w2} = 5.06a_0. \end{cases} \quad (24)$$

假设桩端复刚度表达式为

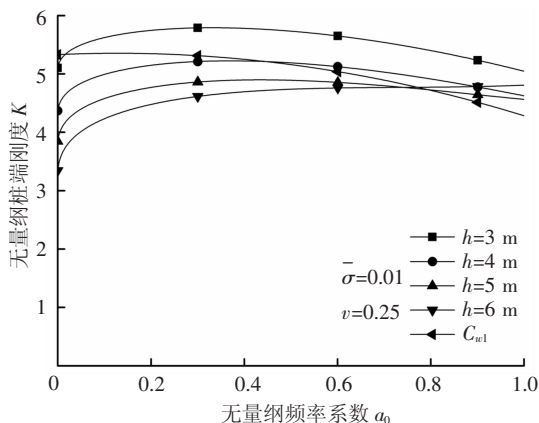
$$Z_N = -\eta_N \frac{\zeta_N e^{-2\lambda_N} - 1}{\zeta_N e^{-2\lambda_N} + 1}, \quad (25)$$

分析时将复刚度无量纲化:

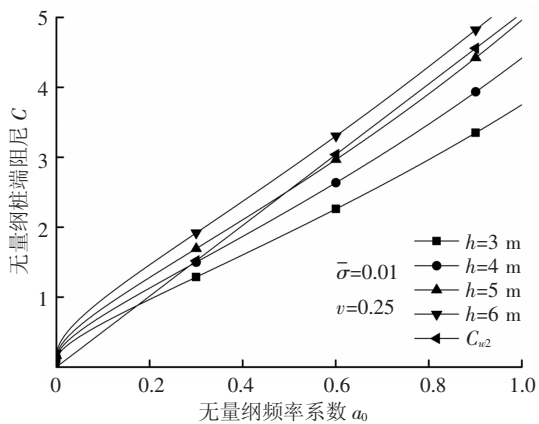
$$\begin{cases} K = \text{real}(Z_N/G_s r_0), \\ C = \text{imag}(Z_N/G_s r_0). \end{cases} \quad (26)$$

无量纲化可以将桩底复刚度简化为关于泊松比 v 和 a_0 的函数,这与 Novak 的公式相同.

图3~5表示不同条件下,桩端动刚度和动阻尼的对比图.图3(a)显示,在低频率范围内虚土桩深度 $h = 4$ m 时,桩底动刚度与 Novak^[6] 的计算结果最为接近.图3(b)显示,在低频率范围内 $h = 5$ m 时,桩底动阻尼的结果与 Novak 的计算结果最为接近.综合考虑刚度和阻尼的结果,在 4~5 m 的范围内计算低频时的桩端阻抗与 Novak 的结果最为接近.



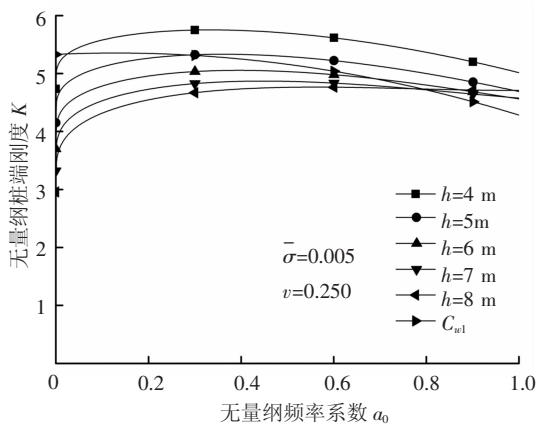
(a) 桩端刚度



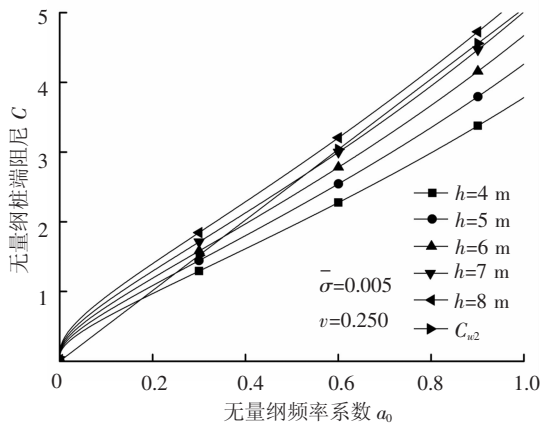
(b) 桩端阻尼

图3 等值线为 0.01 时桩底土层厚度对桩端阻抗的影响

图4中采用 $\bar{\sigma} = 0.005$ 的等值面体作为虚土桩实体进行计算.通过控制等值面的大小,不仅可以控制应力的扩散范围,同时可以增加虚土桩的计算深度.图中曲线显示在计算深度为 5 m 时,刚度曲线与 Novak 的计算结果较为接近;7 m 时,阻尼曲线与 Novak 的计算结果较为接近.



(a) 桩端刚度



(b) 桩端阻尼

图4 等值线为 0.005 时桩底土层厚度对桩端阻抗的影响

文献[6]指出当 $h \leq 5r_0$ 时, C_{w1} 将增大, C_{w2} 会减小,但没有给出具体表达式.本文通过虚土桩法,对这一结论进行了讨论验证.假定桩体半径 $r_0 = 0.5$ m,分别取 h 为 2.5、2、1.5、1.0 和 0.5 m 对 K 、 C 进行计算.图5的5条曲线的变化清楚地表现出, h 减小, K 值会迅速增大, C 迅速减小,该变化规律验证了 Novak 的结论.

本节的计算表明,对于半径 0.5 m 的桩体,在 $h = 4 \sim 6$ m 的范围内,阻抗 K 、 C 值与 Novak 的计算结果较为接近.这说明通过虚土桩模拟计算桩端阻抗时,应力扩散的深度存在一定的合理范围,计算时 h 不宜取值太大或太小.

2.2 桩顶阻抗参数计算

文献[5-6]分别提出了端承桩和摩擦桩桩顶竖向振动刚度的计算方法.对于端承桩可采用

无量纲化公式(27)计算,摩擦桩采用无量纲化公式(28)计算.

$$\begin{cases} K_p = K' \text{real}(\Lambda \cot \Lambda), \\ C_p = K' \text{imag}(\Lambda \cot \Lambda). \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} K_p = K' \text{real}(-\Lambda C(\Lambda)), \\ C_p = K' \text{imag}(-\Lambda C(\Lambda)). \end{cases} \quad (28)$$

式中: $\Lambda = \bar{l} \bar{V} \sqrt{a_0^2 - \frac{\bar{\rho}}{\pi}(S_{w1} + S_{w2}j)}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho_p}$, $\bar{V} = \frac{V_s}{V_p}$, $\bar{l} = \frac{l}{r_0}$, $C(\Lambda) = \frac{K' \Lambda \sin \Lambda - (C_{w1} + C_{w2}j) \cos \Lambda}{K' \Lambda \cos \Lambda + (C_{w1} + C_{w2}j) \sin \Lambda}$, $K' = \frac{\pi}{\bar{\rho} \bar{V}^2 \bar{l}}$, S_{w1} 和 S_{w2} 为桩侧剪切刚度系数.

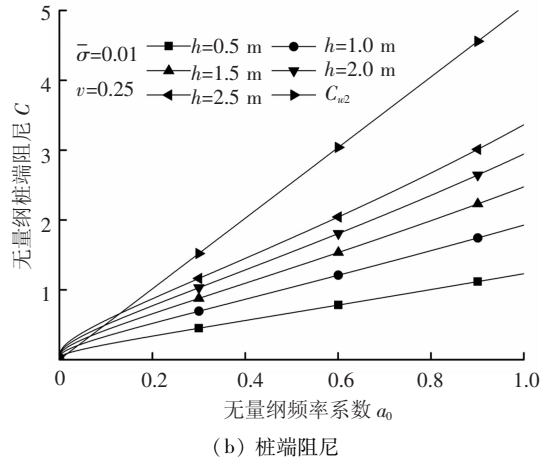
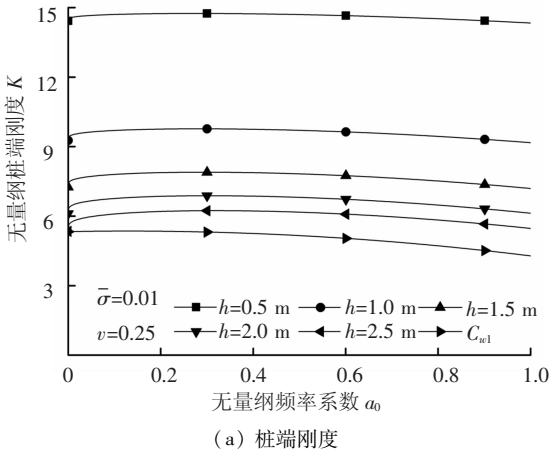


图 5 桩底土层厚度小于 $5r_0$ 时桩端阻抗的变化

图 6 中,将虚土桩法计算出的 K_p 、 C_p 值与 Novak 数据进行对比. 计算摩擦桩时,采用 $\bar{\sigma} = 0.01$ 的应力扩散面,根据上节的结论,取 $h = 5$ m 的计算深度. 计算端承桩时,通过控制 h 的数值来模拟端承条件,文中取 $h = 0.01$ m. 图中曲线 1、2 表明对于摩擦桩,用虚土桩法得到的桩顶动刚度和阻尼,与 Novak 的计算结果非常接近. 曲线 3 与曲线 1 比较显示, h 较小时动刚度明显增大,这说

明通过控制 h 的数值可以改变桩底的承接条件. 曲线 3、4 对比可见,在 $h = 0.01$ m 时,复刚度的计算结果与 Novak 的结果还存在一定差距,但当 h 继续减小时,两条曲线会进一步接近.

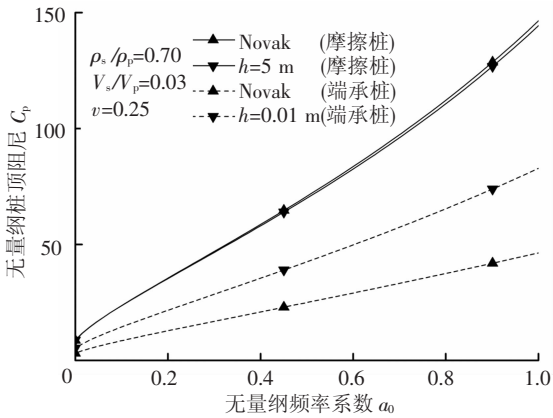
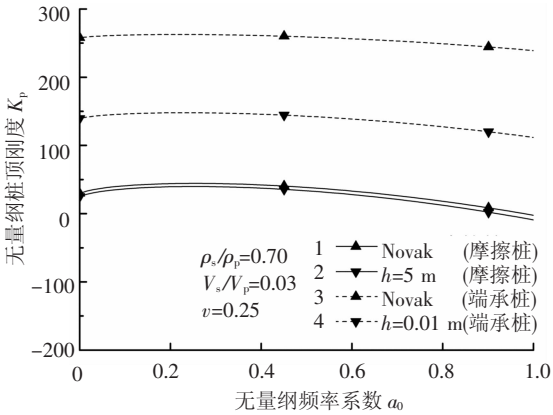
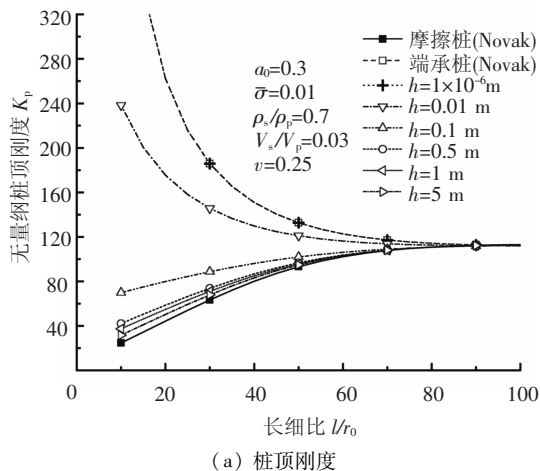


图 6 不同桩型的桩顶阻抗对比图

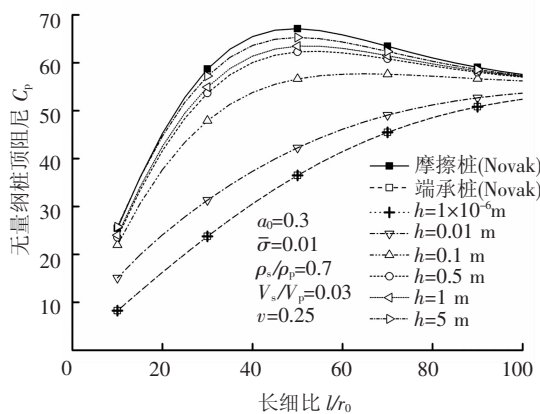
图 7 表示特定荷载频率下,桩体长径比和虚土桩深度对桩顶阻抗的影响. 图 7(a) 和 7(b) 分别反映了桩顶刚度和阻尼的变化规律. 从图 7(a) 可以看出 $h = 5$ m 时刚度曲线与 Novak 的摩擦桩刚度曲线最为接近. 对于长径比较小的桩体,当 h 减小时,刚度逐渐增大,当 $h < 0.01$ m 时,刚度会非常大并随长径比的增大有递减的趋势,当 $h = 1 \times 10^{-6}$ m 时,桩顶刚度曲线与 Novak 的端承桩刚度曲线完全重合,这说明虚土桩法是可以用来模拟端承桩性状的. 图 7(b) 曲线反映出阻尼性状与刚度相反,桩下土层越厚,阻尼越大. 当土层深度较深时,阻尼曲线会随长径比增大先升后降,并出现峰值,最终趋于恒定值;当土层深度很浅,桩体出现端承性状时,阻尼曲线只存在上升段和恒定段,不会出现峰值.

当长径比增大到一定数值时,桩顶阻抗趋近

于某一恒定的数值,这一数值与桩底的支撑条件无关.图中显示 K_p 趋近于 110, C_p 趋近于 50.



(a) 桩顶刚度



(b) 桩顶阻尼

图7 确定荷载频率下,长细比及桩底土层厚度对桩顶阻抗的影响

3 结 论

1) 影响桩端支撑刚度的主要因素包括桩端土体参数、土体厚度、桩体半径及荷载频率等.当土体参数和桩体半径确定后,土体厚度和荷载频率成为主要的影响因素.计算表明,桩端土层厚度在某一恰当的范围,可使得桩端刚度和阻尼同时趋近于 Novak 的计算结果.在低频段,刚度随频率增大而减小,阻尼随频率增大而增大.

2) 桩端土层厚度对桩端支撑刚度和桩顶刚度的影响较大.桩端土层厚度越小,桩体刚度越大,阻尼越小;当桩端土层厚度趋近零时,桩体刚度趋近无穷,阻尼趋近零,桩体支撑由摩擦型逐渐转变为端承型.

3) 虚土桩模型可以反映桩端土层厚度对桩端支撑刚度和桩顶阻抗的影响,尤其是对于长径比较小的桩体,桩端土层厚度的影响更大.当荷载频率确定以后,桩顶阻抗响应存在临界长径比效应,当长径比达到一定数值时,桩顶阻抗趋于恒

值,该值与应力扩散范围、桩端土体厚度及桩体支撑条件无关.

参考文献:

- [1] NOVAK M, BEREDAGO Y O. Vertical vibration of embedded piles[J]. Soil Mechanical and Foundation Divisions(ASCE), 1972, 98:1291-1310.
- [2] CHEHAB A G, EL NAGGAR M H. Design of efficient base isolation for hammers and presses[J]. Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, 23(2): 127-141.
- [3] CHEHAB A G, EINAGGAR M H. Response of block foundations to impact loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 276:293-310.
- [4] WANG Guoqiang, DONG Zuomin. Design optimization of low impact transmission foundation for forging hammers[J]. International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, 2006, 23(2):166-186.
- [5] NOVAK M. Dynamic stiffness and damping of piles[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1974, 11(4): 574-598.
- [6] NOVAK M. Vertical vibration of floating piles[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division(ASCE), 1977, 103(EM1):153-168.
- [7] LYSMER J, RICHART F E. Dynamic response of footing to vertical load[J]. Soil Mechanical and Foundation Division(ASCE), 1966, 2(1):65-91.
- [8] MEYERHOF G G. Bearing capacity and settlement of pile foundations[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division(ASCE), 1976, 102(3):196-228.
- [9] 阙仁波, 王奎华. 考虑土体三维波动效应时弹性支承桩的振动理论及其应用[J]. 计算力学学报, 2005, 22(6):659-664.
- [10] WANG Yaoping, RAJAPAKSE R K N D. BE analysis of dynamics of rigid foundations embedded in transversely isotropic soils[J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2000, 23(3):275-288.
- [11] BARROS P L A. Impedances of rigid cylindrical foundations embedded in transversely isotropic soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, 30(7):683-702.
- [12] NOVAK M, NOGAMI T, ABOUL-ELLA F. Dynamic soil reactions for plane strain case[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division(ASCE), 1978, 104(4):953-959.

(编辑 赵丽莹)