

基于对偶四元数的航天器单目视觉导航算法

王剑颖, 孙兆伟, 梁海朝, 邬树楠

(哈尔滨工业大学 卫星技术研究所, 150080 哈尔滨)

摘要: 为了估计两航天器的相对姿态与轨道运动, 利用对偶数推导并给出了航天器相对动力学方程, 该方程一体化描述了航天器的相对运动, 考虑了姿态与轨道之间的耦合影响. 在对偶代数框架内, 基于目标航天器的特征线在视觉相机平面的投影建立了导航算法的测量模型. 最后通过对系统动力学模型以及测量模型的线性化, 应用 EKF 滤波算法对航天器的相对运动状态进行了估计. 仿真结果表明, 本文的算法能对航天器相对运动进行较高精度的估计, 且收敛速度较快.

关键词: 对偶四元数; 单目视觉; 耦合动力学; 特征线

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2013)01-0007-07

Monocular vision-based navigation algorithm for spacecraft using dual quaternion

WANG Jianying, SUN Zhaowei, LIANG Haizhao, WU Shunan

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China)

Abstract: The monocular vision-based navigation algorithm for spacecraft is addressed in this paper. Based on dual number, coupled dynamics equations of relative position and attitude are derived, which can describe the coupling effect between the rotational motion and translational motion. The measurement model is proposed on the basis of the projection on the 2-D plane of the line fixed on the target spacecraft. And the Extended Kalman Filtering method is applied to the estimation problem. Numerical simulations are performed to demonstrate that the proposed approaches can provide accurate and fast estimation of relative position and attitude.

Key words: dual quaternion; vision-based navigation; coupled dynamics; line feature

航天器相对位置及相对姿态的在轨测量与确定是航天器编队飞行和交会对接等空间任务中的一项关键技术. 而基于单目视觉测量的估计方法由于其低成本、易实现等优点, 在解决近距离高精度的相对位姿参数的确定问题中发挥着越来越重要的作用, 并引起了众多学者的关注.

由于单目视觉具有成本低, 安装和标定简单等优点, 许多学者致力于研究在单目视觉条件下姿态与位置运动的估计. 目前, 基于目标特征点的单目视觉算法已有很多^[1-5], 但由于特征点提取困难且抗遮挡能力较差, 一些学者研究了基于直

线特征的单目视觉算法^[6-7]. 其中, Chiang 等利用对偶四元数取代了传统的转换矩阵 R 和平移向量 T 的表示方法, 建立了基于 2-D 观测图像的测量模型, 并运用迭代算法求解了表示坐标转换的对偶四元数参数^[7], 然而该迭代算法并不适用于非线性较强的航天器动力学系统. 因此, 鉴于对偶四元数在位姿确定问题中所表现的优势, 本文将在对偶四元数的框架内建立基于特征线的观测模型, 并应用 EKF 滤波算法实现航天器的相对导航.

航天器相对导航问题的另一关键技术是航天器相对运动模型的建立. 航天器的在轨一般性空间运动可分为轨道运动和姿态运动, 传统的动力学模型通常分别描述这两部分运动, 忽略了轨道和姿态的耦合影响. 针对这一问题, Lisano 等针对太阳帆推进航天器^[8]、Somenzi 等针对绳系航天

收稿日期: 2011-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60704020).

作者简介: 王剑颖(1988—), 女, 博士研究生;

孙兆伟(1963—), 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 王剑颖, diandian3866@126.com.

器系统^[9]、及 Pan 和 Kristiansen 等针对航天器编队^[10-11]的不同航天任务,考虑轨道和姿态的耦合影响,建立六自由度的航天器运动动力学模型.然而,上述文献仍然采用不同的数学工具来描述航天器的轨道和姿态参数,并对其轨道与姿态运动分别建模,很难实现真正意义上的一体化的耦合动力学建模.由于对偶四元数能够简洁有效的表示刚体的一般性运动^[12-15],因此,本文将在对偶代数的框架内,研究航天器一般性空间运动参数的描述方法,并考虑到轨道运动和姿态运动的耦合影响,建立一体化的航天器相对动力学模型,从而为航天器的高精度相对导航提供基础.

本文利用对偶四元数描述了航天器的一般运动,建立了一体化的航天器相对动力学模型,该模型表示了相对姿态与相对轨道之间的耦合影响.然后,在对偶代数的框架内,基于目标航天器的线特征建立了单目视觉导航的测量模型.最后应用 EKF 算法实现对航天器相对位置及姿态的估计.

1 对偶数数学模型

1.1 对偶数、对偶矢量及对偶四元数

对偶数是由 Clifford 提出的^[12],并由 Study 进一步拓展^[13],对偶数被定义为

$$\hat{a} = a + \varepsilon a'$$

式中: a 和 a' 均为实数, a 为实数部分, a' 为对偶部分. ε 满足 $\varepsilon^2 = 0$ 且 $\varepsilon \neq 0$.

对偶矢量可被看作为一类特殊的对偶数,其实数部分和对偶部分都是矢量,即

$$\hat{v} = v + \varepsilon v'$$

其中, v 和 v' 均为实数矢量.

对偶四元数可以看成实数部分和对偶部分均为四元数的对偶数,即

$$\hat{q} = q + \varepsilon q'$$

其中: q 和 q' 均为四元数.

与四元数相似,对偶四元数的基本运算法则为

$$\begin{cases} \hat{q}_1 + \hat{q}_2 = (q_1 + q_2) + \varepsilon(q'_1 + q'_2), \\ \lambda \hat{q} = \lambda q + \varepsilon \lambda q', \\ \hat{q}_1 \circ \hat{q}_2 = (q_1 \circ q_2) + \varepsilon(q_1 \circ q'_2 + q'_1 \circ q_2), \\ \hat{q}^* = q^* + \varepsilon q'^* \end{cases}$$

其中, λ 为实数, \hat{q}^* 为对偶四元数 \hat{q} 的共轭, q^* 和 q'^* 分别为四元数 q 和 q' 的共轭.

1.2 坐标系定义及其变换的对偶四元数描述

为便于分析,建立如下坐标系:

1) 目标航天器本体坐标系 $O_a - x_a y_a z_a$: 原点 O_a 位于目标航天器的质心上,坐标轴与航天器的

惯量主轴重合.假设目标航天器是对地定向的,即 $O_a - x_a y_a z_a$ 与目标轨道坐标系重合.

2) 追踪航天器本体坐标系 $O_b - x_b y_b z_b$: 原点 O_b 位于追踪航天器质心上,坐标轴与航天器的惯量主轴重合.

3) 相机坐标系 $O_c - x_c y_c z_c$: 原点 O_c 位于相机镜头中心, x_c 轴与相片的横方向平行, y_c 轴与相片的纵方向平行, z_c 轴沿主光轴方向,三轴符合右手定则.设相机的焦距为 λ ,安装在追踪航天器上,且其安装矩阵精确已知.

4) 像平面坐标系 $O_n - x_n y_n$: 原点 O_n 位于相机光轴与图像平面的交点, x_n, y_n 轴分别于 x_c, y_c 轴平行.

利用对偶四元数可以实现坐标系间的变换.设追踪航天器质心相对目标航天器质心的位置矢量在 $O_a - x_a y_a z_a$ 系下的分量记为 p_{ba}^a ,在 $O_b - x_b y_b z_b$ 系下的分量记为 p_{ba}^b ,且 $O_b - x_b y_b z_b$ 系相对于 $O_a - x_a y_a z_a$ 系的姿态四元数为 q_{ba} ,则追踪航天器相对于目标航天器的一般运动由对偶四元数可描述为

$$\hat{q}_{ba} = q_{ba} + \varepsilon \frac{1}{2} p_{ba}^a \circ q_{ba} = q_{ba} + \varepsilon \frac{1}{2} q_{ba} \circ p_{ba}^b \quad (1)$$

由此可以看出,对偶四元数可以同时表示两坐标系之间的位置转移和姿态变换.需要说明的是,如式(1)定义的对偶四元数是单位对偶四元数^[14],即满足 $\hat{q}_{ba} \circ \hat{q}_{ba}^* = 1 + \varepsilon 0$.

1.3 空间直线的对偶数描述

利用对偶矢量,空间中的任一直线可表示为 $\hat{L} = l + \varepsilon m$,其中 l 为该直线的方向向量, m 为直线相对于坐标原点的矩. \hat{L} 在 $O_a - x_a y_a z_a$ 和 $O_b - x_b y_b z_b$ 分别表示为

$$\hat{L}^a = l^a + \varepsilon m^a,$$

$$\hat{L}^b = l^b + \varepsilon m^b.$$

并且, \hat{L}^a 与 \hat{L}^b 之间的转换关系为

$$\hat{L}^b = \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{L}^a \circ \hat{q}_{ba}$$

其中, \hat{q}_{ba}^* 为 \hat{q}_{ba} 的共轭.

2 基于对偶数的航天器相对运动学与动力学建模

2.1 基于对偶数的单航天器运动学及动力学模型

基于对偶四元数描述的航天器运动学方程为^[14]

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \hat{\omega}_b^i \circ \hat{q} = \frac{1}{2} \hat{q} \circ \hat{\omega}_b^b \quad (2)$$

其中, $\hat{\omega}_b^i$ 和 $\hat{\omega}_b^b$ 分别是定义在惯性坐标系和本体坐标系下的对偶矢量, 又被称为“速度旋量”, 其表达式为

$$\begin{cases} \hat{\omega}_b^i = \omega_b^i + \varepsilon(\dot{r}^i + r^i \times \omega_b^i), \\ \hat{\omega}_b^b = \omega_b^b + \varepsilon(\dot{r}^b + \omega_b^b \times r^b). \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\hat{\omega}_b^i$ 和 ω_b^b 分别是航天器的角速度在惯性坐标系和本体坐标系下的分量, r^i 和 r^b 分别为航天器的位置矢量为 r 在惯性坐标系和本体坐标系中的导数。

根据 Brodsky^[15] 提出的刚体质量和转动惯量也具有对偶性质的观点, 定义 $d\hat{m} = dm \frac{d}{d\varepsilon}$ 描述具有对偶特性的质量单元, 则刚体对偶惯量矩阵为

$$\hat{M} = \frac{d}{d\varepsilon} mI + \varepsilon J = \begin{bmatrix} m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon J_{xx} & \varepsilon J_{xy} & \varepsilon J_{xz} \\ \varepsilon J_{xy} & m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon J_{yy} & \varepsilon J_{yz} \\ \varepsilon J_{xz} & \varepsilon J_{yz} & m \frac{d}{d\varepsilon} + \varepsilon J_{zz} \end{bmatrix}$$

式中: m 为航天器的质量, J 为航天器的转动惯量, I 为单位矩阵。

相对于航天器质心的对偶动量表示为

$$\hat{h}_b^b = \hat{M} \hat{\omega}_b^b.$$

再由动量定理得

$$\hat{F}_b^b = \frac{d}{dt} \hat{h}_b^b = \hat{M} \dot{\hat{\omega}}_b^b + \hat{\omega}_b^b \times \hat{M} \hat{\omega}_b^b. \quad (4)$$

式中: $\dot{\hat{\omega}}_b^b$ 航天器质心的速度旋量, $\dot{\hat{\omega}}_b^b$ 表示 $\hat{\omega}_b^b$ 在 $O_b - x_b y_b z_b$ 系下的导数, $\hat{F}_b^b = f_b^b + \varepsilon \tau_b^b$ 为作用于航天器的对偶力, 又称为“力旋量”, f_b^b 和 τ_b^b 分别为作用于航天器的力和力矩, 且 $f_b^b = f_g^b + f_u^b + f_d^b$, 其中万有引力 $f_g^b = \frac{-\mu_{\oplus} m_b r_b^b}{\|r_b^b\|^3}$, f_u^b 和 f_d^b 分别表示控制力和干扰力, $\tau_b^b = \tau_g^b + \tau_u^b + \tau_d^b$, 其中重力梯度力矩 $\tau_g^b = \frac{3\mu_{\oplus} r_b^b \times J_b \cdot r_b^b}{\|r_b^b\|^5}$, τ_u^b 和 τ_d^b 分别表示控制力矩和干扰力矩。

式(2)和式(4)为基于对偶数的单航天器运动学与动力学模型, 与绕定点转动的姿态运动学与动力学模型具有相同的形式. 可见, 航天器的一般性运动仍遵循 Kotelnikov 转移定理^[14].

2.2 基于对偶数的航天器相对动力学模型

如图1所示, 目标航天器绕地球以椭圆轨道运行, 其本体系为 $O_a - x_a y_a z_a$, 追踪航天器本体系

为 $O_b - x_b y_b z_b$.

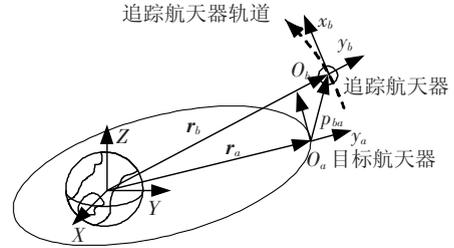


图1 相对坐标系示意图

以 \hat{q}_{ba} 表示追踪航天器相对于目标航天器的运动, 则基于对偶四元数的航天器相对运动学方程为

$$2\dot{\hat{q}}_{ba} = \hat{q}_{ba} \circ \hat{\omega}_{ba}^b. \quad (5)$$

式中: $\hat{\omega}_{ba}^b = \omega_{ba}^b + \varepsilon(\dot{r}_{ba}^b + \omega_{ba}^b \times r_{ba}^b)$, 且 ω_{ba}^b 为相对姿态角速度在 $O_b - x_b y_b z_b$ 系的表示, r_{ba}^b 为追踪航天器质心相对于目标航天器质心的位置矢量在 $O_b - x_b y_b z_b$ 系下的表示. $\hat{\omega}_{ba}^b$ 还可表示为

$$\hat{\omega}_{ba}^b = \hat{\omega}_b^b - \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba}. \quad (6)$$

将式(6)两边求导, 并根据式(4)和式(5)可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_{ba}^b &= \dot{\hat{\omega}}_b^b - \hat{q}_{ba}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_a^a \circ \hat{q}_{ba} - \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \dot{\hat{q}}_{ba} - \\ &\dot{\hat{q}}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba} = \dot{\hat{\omega}}_b^b - \hat{q}_{ba}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_a^a \circ \hat{q}_{ba} - \\ &\hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \frac{1}{2} \hat{q}_{ba} \circ \dot{\hat{\omega}}_{fl}^f + \frac{1}{2} \hat{\omega}_{ba}^b \circ \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba} = \\ &\dot{\hat{\omega}}_b^b - \hat{q}_{ba}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_a^a \circ \hat{q}_{ba} + \hat{\omega}_{ba}^b \times \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba} = \\ &-\hat{M}_b^{-1} (\hat{\omega}_b^b \times \hat{M}_b \hat{\omega}_b^b) + \hat{M}_b^{-1} \hat{F}_b^b - \hat{q}_{ba}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_a^a \circ \hat{q}_{ba} + \\ &\hat{\omega}_{ba}^b \times (\hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba}). \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $\dot{\hat{\omega}}_a^a$ 为目标航天器的速度旋量在 $O_a - x_a y_a z_a$ 下的表示, $\hat{\omega}_a^a$ 为目标航天器的速度旋量在 $O_a - x_a y_a z_a$ 下的导数; $\dot{\hat{\omega}}_{ba}^b$ 为 $\hat{\omega}_{ba}^b$ 在 $O_b - x_b y_b z_b$ 系中的导数; \hat{M}_b 为追踪航天器的对偶惯量矩阵; $\hat{F}_b^b = f_b^b + \varepsilon \tau_b^b$ 为作用在追踪航天器的对偶力, 其中 f_b^b 和 τ_b^b 分别为作用力和力矩. 式(7)就是追踪航天器相对于目标航天器的一体化动力学模型, 该方程依赖于目标航天器和追踪航天器的绝对速度 $\dot{\hat{\omega}}_f^f$ 和 $\dot{\hat{\omega}}_l^l$, 因此, 当每个航天器的绝对速度已知时, 该方程是适用的. 然而, 当可直接测得两航天器的相对速度旋量时, 式(7)的另一种变换形式更为合适. 由式(6)和(7), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\omega}}_{ba}^b &= -\hat{M}_b^{-1} \left((\hat{\omega}_{ba}^b + \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba}) \times \right) + \\ &\hat{M}_b^{-1} \hat{F}_b^b - \hat{q}_{ba}^* \circ \dot{\hat{\omega}}_a^a \circ \hat{q}_{ba} + \hat{\omega}_{ba}^b \times (\hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^a \circ \hat{q}_{ba}). \end{aligned} \quad (8)$$

为了说明本文所推导的一体化相对动力学方程描述了相对轨道与姿态运动的耦合影响, 将式

(8)分为两部分:实数部分表示了相对姿态运动的动力学模型,对偶部分表示了相对轨道运动的动力学模型.其中,实数部分为

$$\dot{\omega}_{ba}^b = -J_b^{-1} [(\omega_{ba}^b + C_{ba}\omega_a^a) \times J_b (\omega_{ba}^b + C_{ba}\omega_a^a)] - C_{ba}\dot{\omega}_a^a + \omega_{ba}^b \times C_{ba}\omega_a^a + J_b^{-1} (\tau_g^b + \tau_u^b + \tau_d^b).$$

对偶部分为

$$\begin{aligned} \ddot{p}_{ba}^b = & -2C_{ba}\omega_a^a \times \dot{p}_{ba}^b - C_{ba}\omega_a^a \times (C_{ba}\omega_a^a \times p_{ba}^b) - \\ & (C_{ba}\dot{\omega}_a^a \times p_{ba}^b) + C_{ba} \frac{\mu}{r_a^3} r_a^a - \frac{\mu}{r_b^3} r_b^b - 2\omega_{ba}^b \times \\ & \dot{p}_{ba}^b - \omega_{ba}^b \times (\omega_{ba}^b \times p_{ba}^b) - 2C_{ba}\omega_a^a \times \\ & (\omega_{ba}^b \times p_{ba}^b) - \dot{\omega}_{ba}^b \times p_{ba}^b + \frac{f_u^b}{m_b} + \frac{f_d^b}{m_b}. \end{aligned}$$

上式中应用了方向余弦矩阵代替了基于四元数的坐标变换表示.由此可见,相对轨道的动力学是受到姿态运动的影响的,也就是说,式(7)和(8)所表示的一体化相对动力学模型表征了航天器相对姿态与轨道运动之间的耦合影响.

3 基于特征线的视觉测量模型

如图 2 所示,固定在目标航天器上的某一特征线在 $O_a - x_a y_a z_a$ 系下表示为 $\hat{L}_i^a = l_i^a + \varepsilon m_i^a$.不失一般性,假设相机坐标系与 $O_b - x_b y_b z_b$ 重合,那么利用对偶四元数可以得到该特征线在相机坐标系下的表示,即

$$\hat{L}_i^b = l_i^b + \varepsilon m_i^b = \hat{q}_{ba}^* \circ \hat{L}_i^a \circ \hat{q}_{ba}.$$

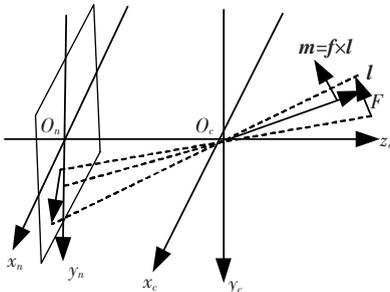


图 2 三维空间直线在相机平面的投影

该特征线在像平面的投影即为平面 θ_i 与像平面的交线,其中平面 θ_i 的方程为 $m_{ix}x_i + m_{iy}y_i + m_{iz}z_i = 0$,像平面的方程为 $z_i = -\lambda$.因此,特征线在像平面的投影坐标满足如下方程

$$m_{ix}x_i + m_{iy}y_i = m_{iz}\lambda. \quad (9)$$

其中, m_{ix} 、 m_{iy} 、 m_{iz} 为 m_i^b 的三个分量.由平面 P_i 的方程和式(9)可得,特征线在像平面的投影的单位方向向量为

$$l_{i,project} = \left[-\frac{m_{iy}}{\sqrt{m_{ix}^2 + m_{iy}^2}} \quad \frac{m_{ix}}{\sqrt{m_{ix}^2 + m_{iy}^2}} \quad 0 \right]^T. \quad (10)$$

另外,有几何关系可知,相机坐标系的原点到该投影线的矩为

$$m_{i,project} = \frac{\lambda}{\sqrt{m_{ix}^2 + m_{iy}^2}} [m_{ix} \quad m_{iy} \quad m_{iz}]^T. \quad (11)$$

由于像平面内的每条投影线都可由原点到该投影线的垂足唯一确定.结合式(10)和式(11),可得该垂足在像平面坐标系的表示为

$$\begin{cases} x_{ilp} = \lambda \frac{m_{ix} m_{iz}}{m_{ix}^2 + m_{iy}^2}, \\ y_{ilp} = \lambda \frac{m_{iy} m_{iz}}{m_{ix}^2 + m_{iy}^2}. \end{cases} \quad (12)$$

这样, (x_{ilp}, y_{ilp}) 可作为测量量来估计 $O_b - x_b y_b z_b$ 相对于 $O_a - x_a y_a z_a$ 的位置及姿态.

4 基于 EKF 的航天器相对运动估计

取状态变量为 $X = [\hat{q}_{ba} \quad \dot{\omega}_{ba}]^T$,则关于状态变量的非线性连续方程为

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + w(t). \quad (13)$$

其中:

$$f(X(t), t) = [\hat{q}_{ba} \quad \dot{\omega}_{ba}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \hat{q}_{ba} \circ \dot{\omega}_{ba} \\ -\hat{M}_b^{-1} (\dot{\omega}_{ba}^b \times \hat{M}_b \dot{\omega}_{ba}^b) + \hat{M}_b^{-1} \hat{F}_b^b - \\ \hat{q}_{ba}^* \circ (\dot{\omega}_a^a) \circ \hat{q}_{ba} + [\dot{\omega}_{ba}^{\times}] \hat{q}_{ba}^* \circ (\dot{\omega}_a^a) \circ \hat{q}_{ba} \end{bmatrix}.$$

将式(13)线性化并作离散化处理得

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + W_{k-1}.$$

式中: $\Phi_{k,k-1} = I + C_{k-1} T$, T 为采样时间,

$$C_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial X^T} \right|_{X=X_{k-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{q}_{ba}}{\partial \hat{q}_{ba}^T} & \frac{\partial \hat{q}_{ba}}{\partial \dot{\omega}_{ba}^T} \\ \frac{\partial \dot{\omega}_{ba}}{\partial \hat{q}_{ba}^T} & \frac{\partial \dot{\omega}_{ba}}{\partial \dot{\omega}_{ba}^T} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

式(14)中, $\frac{\partial \hat{q}_{ba}}{\partial \hat{q}_{ba}^T}$, $\frac{\partial \hat{q}_{ba}}{\partial \dot{\omega}_{ba}^T}$, $\frac{\partial \dot{\omega}_{ba}}{\partial \hat{q}_{ba}^T}$, $\frac{\partial \dot{\omega}_{ba}}{\partial \dot{\omega}_{ba}^T}$ 的具体形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}_{ba}}{\partial \hat{q}_{ba}^T} &= \frac{1}{2} [\dot{\omega}_{ba}^-], \quad \frac{\partial \hat{q}_{ba}}{\partial \dot{\omega}_{ba}^T} = \frac{1}{2} [q_{ba}^+], \\ \frac{\partial \dot{\omega}_{ba}}{\partial \hat{q}_{ba}^T} &= -([\hat{q}_{ba}^+]^T [\dot{\omega}_a^+] + [\hat{q}_{ba}^-] [\dot{\omega}_a^-] E_8) + \\ & [\dot{\omega}_{fl,p}^{\times}] ([\hat{q}_{ba}^+]^T [\dot{\omega}_a^+] + [\hat{q}_{ba}^-] [\dot{\omega}_a^-] E_8) + \\ & \hat{M}_b^{-1} \left(([\hat{M}_b^{\times} \dot{\omega}_b^b]) - [\dot{\omega}_b^{\times}] \hat{M}_b \right) \frac{\partial \dot{\omega}_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} + \frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T}, \\ \frac{\partial \dot{\omega}_{ba}}{\partial \dot{\omega}_{ba}^T} &= -\hat{M}_b^{-1} (-[\hat{M}_b^{\times} \dot{\omega}_b^b]) + [\dot{\omega}_b^{\times}] \hat{M}_b - \end{aligned}$$

$$[(\hat{q}_{ba}^* \circ \hat{\omega}_a^* \circ \hat{q}_{ba})] + \hat{M}_b^{-1} \frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial \hat{\omega}_{ba}^T}$$

$$\text{式中: } \frac{\partial \hat{\omega}_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} = [\hat{q}_{ba}^+]^T [\hat{\omega}_a^+] + [\hat{q}_{ba}^-] [\hat{\omega}_a^-] E_8;$$

$$\frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} = \frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial r_b^{bT}} \frac{\partial r_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} = \begin{bmatrix} \frac{3\mu_{\oplus} m_b}{\|r_b^b\|^5} r_b^b r_b^{bT} - \frac{\mu_{\oplus} m_b}{\|r_b^b\|^3} I_3 & \frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial r_b^b} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial r_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} = 2[\hat{q}'_{ba}] E_4 + [\hat{q}_{ba}^+]^T [\hat{r}_a^+] + [\hat{q}_{ba}^-] [\hat{r}_a^-] E_4;$$

$$\frac{\partial r_b^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} = 2[\hat{q}'_{ba}]^T, \frac{\partial \hat{F}_b^b}{\partial \hat{\omega}_{ba}^T} = \mathbf{0}_{6 \times 6}.$$

上述表达式中, E_4, E_8 分别定义为

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; E_8 = \begin{bmatrix} E_4 & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & E_4 \end{bmatrix}.$$

对于四元数 q , $[q^+], [q^-]$ 定义为

$$[q^+] = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix},$$

$$[q^-] = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

对于对偶四元数 \hat{q} , $[\hat{q}^+], [\hat{q}^-]$ 的形式为

$$[\hat{q}^+] = \begin{bmatrix} [q^+] & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ [\hat{q}'^+] & [q^+] \end{bmatrix},$$

$$[\hat{q}^-] = \begin{bmatrix} [q^-] & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ [\hat{q}'^-] & [q^-] \end{bmatrix}.$$

取 $Z = [x_{ilp} \ y_{ilp}]^T$ 为测量量, 则测量方程为

$$Z(t) = h(X(t), t) + v(t). \quad (15)$$

其中, $h(X(t), t)$ 可由式(12)得到; $v(t)$ 为随机测量噪声.

式(15)为变量 X 的非线性方程, 对其进行线性化和离散化处理得

$$Z_k = H_k X_k + V_k.$$

若可观测到 m 条特征线, 则量测矩阵 H_k 可表示为

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial X^T} \right|_{X=X_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{ilp}}{\partial X^T} & \frac{\partial y_{ilp}}{\partial X^T} & \dots & \frac{\partial x_{mlp}}{\partial X^T} & \frac{\partial y_{mlp}}{\partial X^T} \end{bmatrix}^T. \quad (16)$$

式中: $\frac{\partial x_{ilp}}{\partial X^T}, \frac{\partial y_{ilp}}{\partial X^T}$ 的具体形式如下:

$$\frac{\partial x_{ilp}}{\partial X^T} = \frac{\partial x_{ilp}}{\partial m_i^{bT}} \frac{\partial m_i^b}{\partial X^T}, \frac{\partial y_{ilp}}{\partial X^T} = \frac{\partial y_{ilp}}{\partial m_i^{bT}} \frac{\partial m_i^b}{\partial X^T}.$$

$$\text{其中, } \frac{\partial x_{ilp}}{\partial m_i^{bT}} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda m_{iz}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)} - 2 \frac{\lambda m_{ix}^2 m_{iz}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)^2} \\ -2 \frac{\lambda m_{ix} m_{iy} m_{iz}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)^2} \\ \frac{\lambda m_{ix}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)} \end{bmatrix}^T,$$

$$\frac{\partial y_{ilp}}{\partial m_i^{bT}} = \begin{bmatrix} -2 \frac{\lambda m_{ix} m_{iy} m_{iz}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)^2} \\ \frac{\lambda m_{iz}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)} - 2 \frac{\lambda m_{iy}^2 m_{iz}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)^2} \\ \frac{\lambda m_{iy}}{(m_{ix}^2 + m_{iy}^2)} \end{bmatrix}^T,$$

$$\frac{\partial m_i^b}{\partial X^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_i^b}{\partial q_{ba}^T} & \frac{\partial m_i^b}{\partial q_{ba}^T} & \frac{\partial m_i^b}{\partial \hat{\omega}_{ba}^T} \end{bmatrix}^T,$$

$$\text{且 } \frac{\partial m_i^b}{\partial q_{ba}^T} = [\hat{q}'_{ba}]^T [\hat{l}_i^+] E_4 + [\hat{q}_{ba}^-] [\hat{m}_i^a] E_4 +$$

$$[\hat{q}_{ba}^+]^T [\hat{m}_i^a] + [\hat{q}'_{ba}]^T [\hat{l}_i^+],$$

$$\frac{\partial m_i^b}{\partial \hat{q}_{ba}^T} = [\hat{q}_{ba}^+]^T [\hat{l}_i^+] + [\hat{q}_{ba}^-] [\hat{l}_i^-] E_4,$$

$$\frac{\partial m_i^b}{\partial \hat{\omega}_{ba}^T} = \hat{\mathbf{0}}_{3 \times 6}.$$

EKF 滤波算法的过程如下:

初始化:

$$\hat{X}_0 = X(t_0); \hat{P}_0 = P(t_0).$$

状态一步预测:

$$\hat{X}_{k,k-1} = \hat{X}_{k-1} + f(\hat{X}_{k-1})T.$$

状态估计:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k,k-1} + K_k(Z_k - h(\hat{X}_{k,k-1})).$$

一步预测均方误差:

$$P_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}.$$

滤波增益:

$$K_k = P_{k,k-1} H_k^T (H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_k)^{-1}.$$

滤波均方误差:

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k,k-1}.$$

其中, $\Phi_{k,k-1}, H_k, K_k, R_k$ 分别为系统一步转移矩阵、量测矩阵、噪声方差矩阵和量测噪声矩阵.

5 数学仿真及结果分析

假设目标航天器运行在椭圆轨道上, 近地点高度为 300 km, 偏心率为 0.2, 且目标航天器本体

坐标系始终与其轨道坐标系重合. 追踪航天器体坐标系的三轴与其惯性主轴重合, 其质量为 $m = 100 \text{ kg}$, 转动惯量为 $\mathbf{J} = \text{diag}(22, 20, 26) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 视觉相机的安装矩阵为单位矩阵, 焦距为 0.5 m . 仿真中, 提取的特征线由点产生, 这些特征点在目标航天器本体坐标系下表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= [1 \ 1 \ 0]^T m, & \mathbf{S}_2 &= [-1 \ 1 \ 0]^T m, \\ \mathbf{S}_3 &= [-1 \ -1 \ 0]^T m, & \mathbf{S}_4 &= [1 \ -1 \ 0]^T m, \end{aligned}$$

提取的特征线分别为 $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ 、 $\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3$ 、 $\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4$ 和 $\mathbf{S}_4\mathbf{S}_1$.

当 $t = 0$ 时, 目标航天器的真近点角为 $\theta_a(0) = 2\pi/3$, 追踪航天器相对于目标航天器的姿态四元数及位置矢量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{ba}(0) &= [0.998 \ 2 \ 0.033 \ 6 \ 0.036 \ 6 \ 0.033 \ 6]^T \\ \mathbf{r}_{ba}(0) &= [15 \ 0 \ 20]^T m. \end{aligned}$$

追踪航天器相对于目标航天器的角速度及速度初值分为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{ba}(0) &= [0.005 \ 0.005 \ 0.006]^T \text{rad/s}, \\ \mathbf{v}_{ba}(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \text{m/s}. \end{aligned}$$

当 $t > 0$ 时, 由运动学方程式(5)及动力学方程式(7)可计算出两航天器间的实时相对姿态及位置轨迹, 并将其作为相对状态的真值.

设状态变量的估计初值为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{ba}(0) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \hat{\mathbf{r}}_{ba}(0) &= [18 \ 1 \ 21]^T m, \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ba}(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T, \\ \hat{\mathbf{v}}_{ba}(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \text{m/s}. \end{aligned}$$

采样周期为 $T = 0.1 \text{ s}$. 初始误差矩阵为

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} \sigma_{W_q}^2 \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \sigma_{W_{q'}}^2 \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \sigma_{W_e}^2 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_{W_v}^2 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}.$$

式中: $\sigma_{W_q}^2 = 0.000 \ 01^2$, $\sigma_{W_{q'}}^2 = 0.001^2$,
 $\sigma_{W_e}^2 = 0.000 \ 01^2$, $\sigma_{W_v}^2 = 0.001^2$.

过程噪声协方差矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{Q_q}^2 \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \sigma_{Q_{q'}}^2 \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \sigma_{Q_e}^2 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_{Q_v}^2 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}.$$

式中: $\sigma_{Q_q}^2 = 0.000 \ 01^2$, $\sigma_{Q_{q'}}^2 = 0.01^2$,
 $\sigma_{Q_e}^2 = 0.000 \ 01^2$, $\sigma_{Q_v}^2 = 0.005^2$.

测量噪声协方差阵为

$$\mathbf{R} = 0.000 \ 1^2 \mathbf{I}_8.$$

仿真时间为 $t = 1 \ 000 \text{ s}$, 仿真结果见图 3~6.

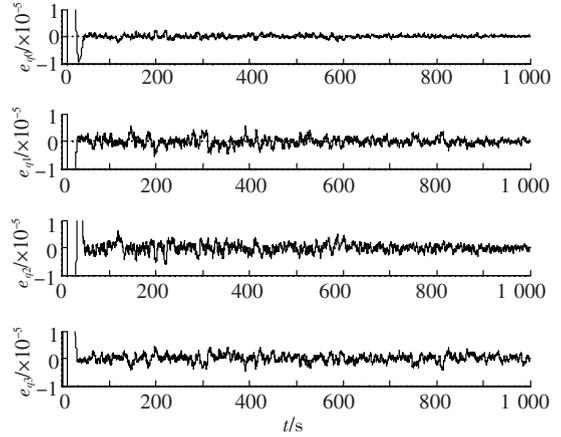


图3 相对姿态四元数估计误差时间历程曲线

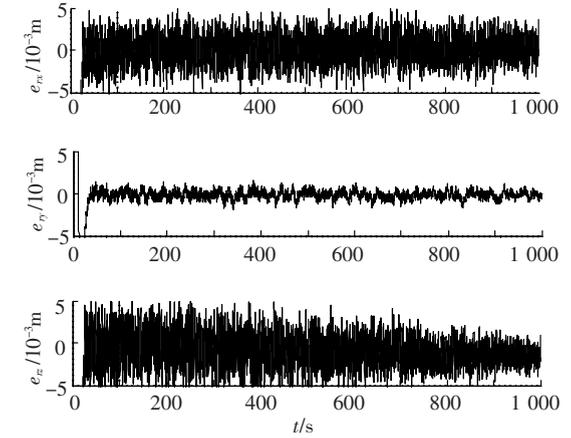


图4 相对位置估计误差时间历程曲线

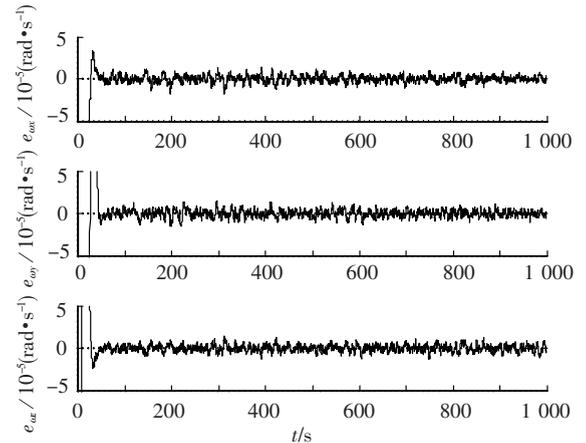


图5 相对角速度估计误差时间历程曲线

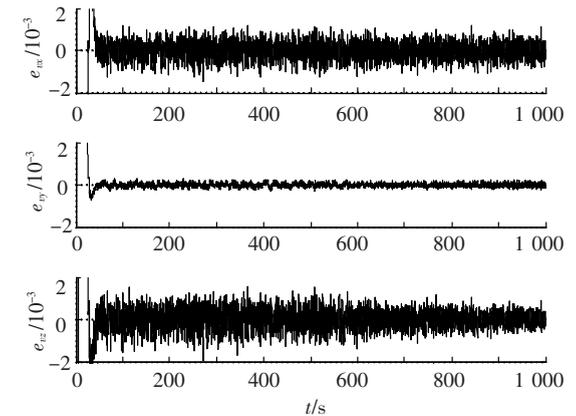


图6 相对速度估计误差时间历程曲线

图 3~6 表示了相对姿态、相对位置、相对角速度以及相对速度收敛过程的估计误差. 从图 3 中可以看出, 相对姿态四元数的各个分量从初始误差收敛到其模小于 1×10^{-4} 用时小于 100 s. 图 4 的仿真曲线表明, 相对位置矢量的各个分量从初始误差收敛到其模小于 0.005 m 用时也小于 100 s. 如图 5 和图 6 所示, 相对角速度以及相对速度同样具有较高的估计精度和较快的收敛速度. 由此可以验证, 所建的系统模型、测量模型的正确性以及 EKF 滤波算法的有效性. 在仿真过程中还发现, 利用对偶四元数来描述坐标系转换, 使得算法变得更加简洁有效, 可操作性也更强; 另一方面, 由于系统模型是基于更精确的耦合动力学方程建立的, 因此本文的滤波算法具有更高的精度和更强的实用性.

6 结 论

本文针对航天器编队飞行和交会对接等空间任务中的航天器相对运动的估计问题, 基于对偶四元数推导了航天器相对动力学方程, 该方程形式简洁明了, 且能表示相对姿态与相对轨道运动之间的耦合影响. 建立了基于特征线融合的视觉测量模型, 通过对系统动力学模型和测量模型的线性化, 应用了 EKF 滤波算法对航天器的相对运动状态进行了估计. 数值仿真结果表明本文算法简单有效, 且能实现对航天器相对姿态及相对位置的高精度估计.

参考文献

- [1] LU C P, HAGER G D, MJOLSNESS E. Fast and globally convergent pose estimation from video images [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(6): 610–62.
- [2] ANSAR A, DANIILIDIS K. Linear pose estimation from points or lines [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(5): 578–58.
- [3] SCHWEIGHOFER G, PINZ A. Robust pose estimation from a planar target [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, 28(12): 2024–2030.
- [4] TANG J L, CHEN W S, WANG J. A novel linear algorithm for P5P problem [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 205(2): 628–634.
- [5] LEPETIT V, MORENO-NOGUER F, FUA P. EPnP: an accurate $O(n)$ solution to the PnP problem [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2009, 81(2): 155–165.
- [6] 左俊青, 王惠南, 刘海颖, 等. 单目视觉下基于对偶四元数的卫星姿态的确定 [J]. *中国惯性技术学报*, 2008, 16(5): 577–581.
- [7] CHIANG Y T, HUANG P Y, CHEN H W. Estimation of 3–D transformation from 2–D observing image using dual quaternion [C]//*Proceedings of the 17th World Congress, the International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea: International Federation of Accountants, 2008: 10445–10450.
- [8] LISANO M E. A practical six-degree-of-freedom solar sail dynamics model for optimizing solar sail trajectories with torque constraints [C]//*AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Providence, Rhode Island, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004: AIAA–2004–4891.
- [9] SOMENZI L, IEISS L. Linear stability analysis of electrodynamic tethers [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, 28(5): 843–849.
- [10] PAN H, KAPILA V. Adaptive nonlinear control for spacecraft formation flying with coupled translational and attitude dynamics [C]//*Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA: Institute for Electrical and Electronic Engineers, 2001: 2057–2062.
- [11] KRISTIANSEN R, NICKLASSON P J, GRAVDAHL J T. Spacecraft coordination control in 6DOF: integrator backstepping vs passivity-based control [J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2896–2901.
- [12] CLIFFORD W K. Preliminary sketch of biquaternions [J]. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1871, s1–4(1): 381–395.
- [13] STUDY E. Von den bewegungen und umlegungen [J]. *Mathematische Annalen*, 1891, 39: 441–556.
- [14] 武元新. 对偶四元数导航算法与非线性高斯滤波研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2005, 16–18.
- [15] BRODSKY V, SHOHAM M. Dual numbers representation of rigid body dynamics [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34(5): 693–718.

(编辑 苗秀芝)