第45卷 第1期
2013年1月
哈 尔 滨 工 业 大 学 学 报
JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Vol. 45 No. 1
Jan. 2013

利用虚拟卫星法求解火星探测器近火点制动策略

刘 玥，荆武兴

（哈尔滨工业大学 航天工程系，150001 哈尔滨）

摘 要：针对采用极大值原理求解火星探测器近火点制动最优推力策略时初值不易猜测、迭代不易收敛的问题，介绍并推导了虚拟卫星方法，即通过假想一颗虚拟卫星在目标轨道上运行，探测器利用最优控制算法求解推力策略，使探测器本身与虚拟卫星的终端相对位置和速度为零，从而实现了精确入轨. 在利用极大值原理求解最优推力策略的过程中，共轭变量初值的选择问题得到了解决. 利用虚拟卫星方法中的相对运动关系，可以将没有实际意义的共轭变量初值转化为具有物理意义或者较易猜测的变量进行初始估计，克服了共轭变量初值猜测的盲目性，使得迭代更容易收敛. 仿真结果证明了该方法的有效性.

关键词：虚拟卫星；火星探测；近心点制动；燃料最优；极大值原理

中图分类号：V448.231 **文献标志码**：A **文章编号**：0367-6234(2013)01-0014-05

Mars probe near-center braking strategy using virtual satellite method

LIU Yue, JING Wu-xing

(Dept. Astronomy Engineering, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: To deal with the problem that the iteration doesn't converge well in the maximum principle, a virtual satellite method is proposed to compute a fuel optimal trajectory of Mars probe in the processing of near-center braking. In the virtual satellite method, an optimal trajectory is computed in which the real satellite rendezvous with the virtual satellite so that the real satellite will come into the target orbit. The problem of guessing initial value of co-states is solved by transfer the original co-states, which have no physical meaning, into another one that can be guessed easily and by this way the iteration will converges better. Finally the simulation results prove the efficiency of this method.

Key words: virtual satellite; Mars exploring; near-center braking; fuel optimal; maximum principle

从上个世纪60年代开始，火星逐渐成为了太阳系内除月球之外最吸引各国学者研究的天体之一. 最近的几年，欧洲和美国先后发射了多颗火星探测器，在全球又掀起了新一轮的火星探测竞赛，中国、印度等国家也相继提出了自己的火星探测计划. 火星是太阳系内与地球最相似的行星之一，但其质量较小，引力系数只有地球的10.7%，因此火星表面逃逸速度也只有不到5 km/s. 传统的火星探测方式使用 Hohmann 过渡的方法将探测器发射至火星附近，其双曲进入轨道剩余速度达到了2.8 km/s以上，探测器必须克服这一剩余速度使自身成为火星卫星[1-3]. 若如此，则需要发动机长时间开机进行制动，很大一部分燃料将消耗在制动过程中[4-5]. 另外，火星探测任务需要预定的工作轨道，制动过程应尽量将飞行器精确送入预定工作轨道，否则还将进行复杂的变轨过程，进一步消耗燃料. 为此，需要优化近火点制动推力策略，在节约探测器燃料的同时，使探测器精确进入目标轨道，提高了探测器在轨寿命，使后续任务得以顺利完成[6-7].

火星探测器近火点制动问题可以归结为1个两点边值最优控制问题，对于此类问题的解决，一般采用极大值原理. 极大值原理的实质是求取1个控制策略，使系统的 Hamilton 函数达到极大值，这种方法的优点在于可以精确求取连续时间

收稿日期：2011-11-18.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11172077).
作者简介：刘 玥(1986—)，男，博士研究生；
荆武兴(1965—)，男，教授，博士生导师.
通信作者：荆武兴，wuxingjing@hotmail.com.

内的最优控制策略[8-9]. 在轨道控制方面,极大值原理被广泛应用于燃料、能量最优轨道转移、轨道修正与保持,交会对接等轨道控制任务中[10-12]. 但是其极大值原理存在一些问题,就是需要计算共轭变量,并且共轭变量的初值需要猜测和迭代计算. 由于其没有具体的物理意义,共轭变量初值的猜测往往很困难,容易造成迭代不收敛,降低了极大值原理求解问题的效率.

本文利用虚拟卫星方法,以最省燃料为优化指标,求解火星探测器近火点制动的推力策略,并且在使用极大值原理求解两点边值问题时,将共轭变量转化为有实际物理意义的变量进行猜测,使得迭代初值的选取变得简单[13]. 计算结果显示,该策略可以在最省燃料的条件下将探测器精确送入预定工作轨道,并且边界条件非常简单,迭代易于收敛.

1　虚拟卫星法原理与模型

本文使用虚拟卫星法求解最优制动策略. 如图 1 所示,轨道 I 为探测器初始轨道,S 为探测器,轨道 II 为目标轨道. 假设轨道 II 是 1 颗虚拟卫星 S_1 运动形成的 1 条轨道,为了使探测器转移到目标轨道,只需要求解控制策略,使 S 与 S_1 的相对位置和速度均为 0 即可. 此方法称为虚拟卫星法[14-17].

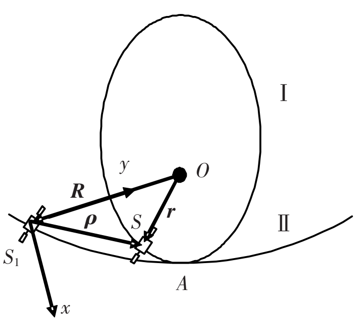

图 1　虚拟卫星法示意

图 1 中,建立交会坐标系 S_1-xy,以 S_1 为坐标原点,S_1-y 轴指向火心,S_1-x 轴垂直于 y 轴并指向前进方向,由于变轨时间只有数十分钟,所以可忽略摄动力的影响,S 和 S_1 的动力学方程分别为

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -(\mu_m/R^3)\boldsymbol{R},$$
$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -(\mu_m/r^3)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}/m.$$

其中:$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{r}$ 分别为 S_1 和 S 相对于火心的位置;μ_m 为火星的万有引力常数;$\boldsymbol{F}$ 为发动机推力;m 为探测器总质量.

假设 S_1 的真近点角为 θ_1,与 x 轴同向的单位向量为 $\boldsymbol{I}$,与 y 轴同向的单位向量为 $\boldsymbol{J}$,S 相对于 S_1 的位置矢量为 $\boldsymbol{\rho}$,S 在 S_1-xy 系中的坐标为 (x,y),则有如下关系:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} = x\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{J},$$
$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\mu_m/R^3 - \mu_m/r^3)\boldsymbol{R} - \mu_m\boldsymbol{\rho}/r^3 + \boldsymbol{F}/m.$$

由旋转矢量的微分公式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{I}} = \dot{\theta}_I\boldsymbol{J},\\ \dot{\boldsymbol{J}} = -\dot{\theta}_I\boldsymbol{I}.\end{cases}$$

得到

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = (\ddot{x} - 2\dot{y}\dot{\theta}_I - y\ddot{\theta}_I - x\dot{\theta}_I^2)\boldsymbol{I} + (\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{\theta}_I + x\ddot{\theta}_I - y\dot{\theta}_I^2)\boldsymbol{J}.$$

将 $\boldsymbol{R} = -R\boldsymbol{J}$ 带入得到分量形式的动力学方程

$$\ddot{x} = 2\omega_I\dot{y} + (\omega_I^2 - N^2)x + y\dot{\omega}_I + F_x/m,$$
$$\ddot{y} = -2\omega_I\dot{x} + (\omega_I^2 - N^2)y - (n^2 - N^2)R - x\dot{\omega}_I + F_y/m.$$

其中:

$$\omega_I = \dot{\theta}_I = h_I/R^2,$$
$$\dot{\omega}_I = \ddot{\theta}_I = -(2\mu_m/R^3)e_I\sin\theta_I,$$
$$n^2 = \mu/R^3,$$
$$N^2 = \mu/[x^2 + (y-R)^2]^{3/2},$$
$$R = p_I/(1 + e_I\cos\theta_I)$$

式中 F_x、F_y 为推力 $\boldsymbol{F}$ 的分量,e_I、p_I、h_I 分别是目标偏心率、目标半正焦弦和目标轨道角动量.

此模型的优越性在于终端条件极其简单,因为探测器与虚拟卫星的终端相对位置和速度只需为零.

2　探测器状态方程

假设在 $[t_0, t_f]$ 内发动机持续工作,探测器质量变化即成为已知函数

$$m(t) = m_0 - (F/I_{sp}g)(t - t_0). \tag{1}$$

令

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{bmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}F_x/F\\F_y/F\end{bmatrix}.$$

探测器动力学方程可以用状态方程的形式表达如下:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{V},$$
$$\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \theta_I) + (F/m(t))\boldsymbol{u},$$
$$\dot{\theta}_I = \omega_I.$$

其中

$$f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \theta_I) = \begin{bmatrix}2\omega_I\dot{y} + (\omega_I^2 - N^2)x + y\dot{\omega}_I\\ -2\omega_I\dot{x} + (\omega_I^2 - N^2)y - (n^2 - N^2)R - x\dot{\omega}_I\end{bmatrix}.$$

下面推导初始状态与真近角的关系. 设 A 点在初始轨道上对应的真近角为 Ω,在目标轨道上

对应的真近点角为 Ω_I，点火初始时刻，探测器的真近角为 $\theta(t_0)$，虚拟卫星的真近角为 $\theta_I(t_0)$，令

$$\alpha = \theta(t_0) - \Omega,$$
$$\alpha_I = \theta_I(t_0) - \Omega_I,$$
$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_I.$$

称 α 为点火角，顺轨道测量为正. 不难得到

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\Delta\alpha \\ R - r\cos\Delta\alpha \end{bmatrix}.$$

其中：

$$r = p/(1 + e\cos\theta).$$

设真实卫星和虚拟卫星的飞行路径角分别为 γ 和 γ_I，则在 $S_1 - xy$ 坐标系上

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} V\cos(\gamma - \Delta\alpha) \\ -V\sin(\gamma - \Delta\alpha) \end{bmatrix}, \\ \dot{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} V_I\cos\gamma_I \\ -V_I\sin\gamma_I \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

利用如下关系：

$$V\cos\gamma = (h/p)(1 + e\cos\theta),$$
$$V_I\cos\gamma_I = R\omega_I,$$
$$V\sin\gamma = (h/p)e\sin\theta,$$
$$V_I\sin\gamma_I = (h_I/p_I)e_I\sin\theta_I,$$
$$\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \dot{x} - y\omega_I \\ \dot{y} + x\omega_I \end{bmatrix}.$$

得到相对速度的表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h/p)\cos\Delta\alpha + (h/p)e\cos\sigma + (y - R)\omega_I \\ (h/p)\sin\Delta\alpha - (h/p)e\sin\sigma + (h_I/p_I)e_I\sin\theta_I - x\omega_I \end{bmatrix}.$$

其中 e, p, h 分别为轨道 I 的偏心率、半正焦弦和轨道角动量；e_I, p_I, h_I 分别为轨道 II 的偏心率、半正焦弦和轨道角动量；$\sigma = \theta_I - \Omega_I + \Omega$，$\omega_I = h_I/R^2$.

以上两组式子确定了真近角与探测器的初始状态之间的关系，任意确定一组出事的 θ, θ_I，即可确定唯一与之对应的一组初始状态 $x, y, \dot{x}, \dot{y}$.

3 最省燃料推力方向

最省燃料控制问题可表述为：求取合适的 $\boldsymbol{X}(t_0), \boldsymbol{V}(t_0), \theta_I(t_0)$ 和推力方向策略 $\boldsymbol{u}(t)$，使得系统在 $t = t_f$ 时，$\boldsymbol{X}(t_f) = \boldsymbol{V}(t_f) = 0$，$\theta_I$ 无约束. 且使最优指标

$$J = -\int_{t_0}^{t_f} F/m(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

达到最大值. 由 Pontryagin 极大值原理，此指标极大与探测器剩余燃料质量极大是等价的.

当 $\boldsymbol{X}(t_0), \boldsymbol{V}(t_0), \theta_I(t_0)$ 均为给定值时，上述最优控制问题即为 1 个两点边值问题，但是其初值是由探测器与虚拟卫星的真近点角 θ 和 θ_I 共同确定的，而事实上，探测器初始点火位置的选择是任意的，即初始真近点角 θ 可以取任意值，而虚拟卫星初始位置同样可以任取. 所以，最优指标可以表达为

$$J = J(\theta(t_0), \theta_I(t_0), \boldsymbol{u}(t)).$$

其中

$$-\pi < \theta(t_0) \leqslant \pi,\ -\pi < \theta_I(t_0) \leqslant \pi.$$

$\theta(t_0), \theta_I(t_0)$ 允许在 $(-\pi, \pi)$ 上变动，于是求解上述问题将分为两部分，最优控制的求取与参数优化，应用极大值原理，可以将其统一为 1 个参数优化问题.

系统的 Hamilton 函数定义为

$$H = -F/m(t) + \lambda_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\lambda}_v^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \theta_I) + \frac{F}{m(t)}\boldsymbol{u}(t)\right] + \lambda_{\theta_I}\omega_I.$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_x, \boldsymbol{\lambda}_v, \boldsymbol{\lambda}_{\theta_I}$ 分别为 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \theta_I$ 的共轭状态.

由 Pontryagin 极大值原理，求解的推力矢量方向 $\boldsymbol{u}(t)$ 应使 Hamilton 函数 H 达到极大，可得

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\lambda}_v / \|\boldsymbol{\lambda}_v\|. \tag{4}$$

可见，速度共轭矢量 $\boldsymbol{\lambda}_v$ 的方向可以决定最优推力方向.

系统协状态方程如下：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_x = -(\partial \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \theta_I)/\partial x)\boldsymbol{\lambda}_v, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\lambda_x - (\partial \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \theta_I)/\partial v)\boldsymbol{\lambda}_v, \\ \dot{\lambda}_{\theta_I} = -(\partial \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, \theta_I)/\partial\theta_I)\boldsymbol{\lambda}_v - (\partial\omega_I/\partial\theta_I)\boldsymbol{\lambda}_{\theta_I}. \end{cases} \tag{5}$$

如果已知 $\theta(t_0), \theta_I(t_0), \boldsymbol{\lambda}_x(t_0), \boldsymbol{\lambda}_v(t_0), \lambda_{\theta_I}(t_0)$，则最优推力矢量方向 $\boldsymbol{u}(t)$ 就可以唯一确定，因此只需求解参数优化问题即可解决上述最优控制问题.

4 横截条件与迭代变量的选择

前一节指出，需要确定 5 个参数即可求出最优推力方向，其中 $\theta(t_0), \theta_I(t_0)$ 具有实际的物理意义，但是另外 3 个参量没有实际意义，很难猜测初始值，这是 Pontryagin 极大值原理固有的缺陷，下面将给出在本文背景下解决此缺陷的方法.

由前文可知，只要已知 $\boldsymbol{x}, \theta_I$，另外的初始状态就可以确定，因此这些初始状态并不是相互独立的，还应存在 3 个约束条件. 由式(2)，$\Delta\alpha$ 可表示为 θ_I 和 $\boldsymbol{x}$ 的函数，从式(1) 和(2) 可以得出 3 个初始状态约束条件：

$$g_1 = \sqrt{x^2 + (R - y)^2} - xe\sin\sigma + (R - y)e\cos\sigma - p = 0,$$

$$g_2 = \dot{x} - (h/p)\cos\Delta\alpha + (R - y)\omega_I - (h/p)e\cos\sigma = 0,$$

$$g_3 = \dot{y} - (h/p)\sin\Delta\alpha + x\omega_I + (h/p)e\sin\sigma - (h_I/p_I)e_I\sin\theta_I = 0.$$

终端条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(t_f) = 0, \\ \boldsymbol{V}(t_f) = 0, \\ \theta_I(t_f)\ \text{任意}. \end{cases} \tag{6}$$

由上述条件，根据变分法原理，可以得到共轭协状态的初始和终端条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_x(t_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_i}{\partial x} k_i, \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_i}{\partial v} k_i = [k_2 \quad k_3]^{\mathrm{T}}, \\ \lambda_{\theta_I}(t_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_i}{\partial \theta_I} k_i, \\ \lambda_{\theta_I}(t_f) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为待定拉格朗日乘子. 则共轭变量初值的猜测可转化为对拉格朗日乘子初值的猜测，但这些变量初值仍然难以猜测，所以要进一步分析.

由式(4)、(7)可以看出，k_2, k_3 与初始推力方向有如下关系：

$$[k_2, k_3]^{\mathrm{T}} = \| \lambda_v(t_0) \| \boldsymbol{U}.$$

如用推力仰角 φ 表示 $\boldsymbol{U}$(规定推力方向与 oy 轴成锐角时为负)，则

$$\boldsymbol{U} = [\cos\varphi \quad -\sin\varphi]^{\mathrm{T}}.$$

如果不考虑质量变化，由极大值原理，在初始时刻应有 $\| \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) \| = 1$，实验证实，考虑质量变化时将有较小的变化，一般不超过 ± 1，所以 $\| \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) \|$ 和具有物理意义的推力仰角初值 φ 可以代替 k_2, k_3 作为迭代初值.

由式(5)可得

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v(t_0) = -\lambda_x(t_0) + \begin{bmatrix} 0 & 2\omega_I \\ -2\omega_I & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_v(t_0).$$

由于 ω_I 的数值比较小，代入协状态的表达式可以发现，推力方向变化率的初始值主要由 k_1 决定，一般来说，希望推力方向(与 $\boldsymbol{\lambda}_v(t_0)$ 有关)变化较平稳，所以可取 $k_1 \approx 0$ 作为初始猜测.

综上所述，迭代变量的初始猜测值可选择为 $\theta(t_0), \theta_I(t_0), \varphi, \| \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) \|$ 和 k_1.

在最优轨迹末端，哈密顿函数应满足：$H(t_f) = 0$，由式(3)、(6)、(7)可得到 $\| \boldsymbol{\lambda}_v(t_f) \| = 1$. 至此可以看出，5 个迭代变量有 3 个是具有实际意义的量，另外两个可以有较为确定的猜测值，为迭代算法的收敛性打下了良好的基础.

5　仿真算例分析

考虑火星探测器初始质量为 500 kg，携带 490 N 发动机一台，比冲为 290 s. 假设探测器预定工作轨道为一共面椭圆轨道，近火点高度为 300 km，偏心率为 0.5. 迭代初值选择如表 1 所示.

表 1　迭代初值选择

项目	θ/(°)	θ_I/(°)	$\|\boldsymbol{\lambda}_v(t_0)\|$	k_1	φ/(°)
初值	−35	−25	1.5	0.000 2	180

使用牛顿迭代法进行迭代计算，迭代 9 次后结果收敛，迭代残差 $\gamma = \boldsymbol{X}_f^2 + \boldsymbol{V}_f^2$(虚拟卫星相对真实卫星终端位置、速度的平方和，理想情况为残差等于零)的变化规律如图 2 所示.

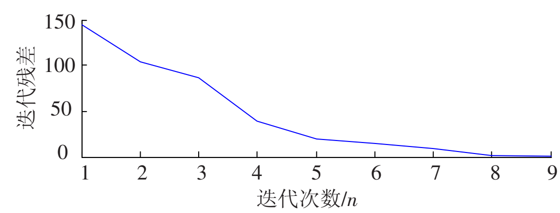

图 2　迭代残差变化

迭代最终结果显示，发动机工作 1 253 s，探测器质量 m，真近角 θ，虚拟卫星真近角 θ_I，探测器轨道偏心率 e 和近火点高度 H_p 的计算结果列于表 2.

表 2　计算结果

项目	θ/(°)	θ_I/(°)	e	H_p/km	m/kg
初值	−36.359	−23.277	1.758 5	300.000	500.000
终值	51.919	51.919	0.499 9	300.011	285.319

真实卫星与虚拟卫星的终端位置误差为 0.37 m，速度误差约为 10^{-3} m/s. 可见，使用本文中的算法可以达到将探测器一次精确送入工作轨道的目的. 推力仰角随时间的变化规律如图 3 所示，探测器与虚拟卫星在惯性系下的轨迹如图 4 所示.

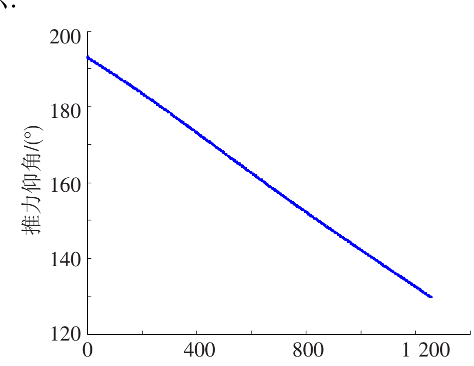

图 3　推力仰角变化规律

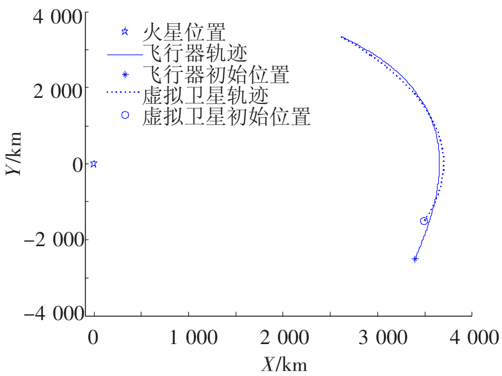

图 4　探测器飞行轨迹

由图 3 可以看到,发动机推力仰角随时间的变化近似为线性的,变轨过程中姿态控制比较容易. 由图 4 可以看到,探测器在最优推力的控制下,其轨迹最终与虚拟卫星轨迹重合,两者实现了软交会,即完成了精确入轨过程.

综上所述,利用虚拟卫星法求解火星探测器近火点制动推力策略是可行的. 在实际计算过程中,如果考虑各种摄动因素,如大型天体引力摄动,火星非球形摄动等,结果的收敛性也很好,迭代均能在 10 次以内收敛,说明该方法对于模型的误差有一定的鲁棒性. 但是,此方法仍然有局限性. 例如,由于假设发动机一直开机,所以一般情况下,该方法只能处理 1 次入轨的情况,若要处理多次入轨的情况,则需要设定一些过渡轨道,多次变轨,其间分别使用虚拟卫星方法;另外,虚拟卫星方法的收敛性与发动机推进效果相关,若换装更小推力的发动机,或者增加飞行器的初始质量,则会导致制动时间增加、收敛范围变小. 经大量仿真验证,对于本文中所使用的 490 N 发动机,虚拟卫星方法可以满足初始质量在 1 200 kg 以内的飞行器进行近火点制动,且迭代收敛性较好.

5　结　论

本文利用虚拟卫星法设计火星探测器近火点制动的最优推力方向策略. 采用 Pontryagin 极大值原理求取燃料最优指标下的最优推力方向,并且给出了协状态的选择方法以使迭代易于收敛. 通过优化的制动策略使真实卫星与虚拟卫星实现“软交会”,达到精确制动入轨的目的. 所选用的虚拟卫星方法收敛性好,对模型具有一定的鲁棒性,对迭代初值不敏感,可以适用于一般的常规推力近心点制动任务.

参考文献

[1] 李爽,彭玉明,陆宇平. 火星 EDL 导航、制导与控制技术综述与展望[J]. 宇航学报, 2010,3(3):621 – 627.

[2] HUBBARD G S. The exploration of Mars, historical context & current results[C]//42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, NV: American Institute of Aeronautics and Astronautics,2004:1 – 10.

[3] OLESON S R, MCGUIRE M L,LAURA B. Mars earth return vehicle (MERV) propulsion options[C]//46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Nashville, TN: American Institute of Aeronautics and Astronautics,2010:1 – 20.

[4] OZIMEK M T, HOWELL K C. Low-thrust transfers in the earth-moon system, including applications to libration point orbits [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics,2010,33(2):533 – 549.

[5] WILLIAMS P. Optimal control of electro dynamic tether orbit transfers using timescale deparation[J]. Journal of Guidance,Control,and Dynamics,2010,33(1):88 – 97.

[6] ULYBYSHEV Y. Continuous thrust orbit transfer optimization using large-scale linear programming [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(2): 427 – 436.

[7] JAMISON B R, COVERSTONE V. Analytical study of the primer vector and orbit transfer switching function [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(1):235 – 245.

[8] CHEN Yumin, SHEU Donglong. Parametric optimization analysis for minimum-fuel low-thrust coplanar orbit transfer [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics,2006,29 (6):1446 – 1451.

[9] BANDO M, ICHIKAWA A. Periodic orbits of nonlinear relative dynamics along an eccentric orbit[J]. Journal of Guidance,Control,and Dynamics,2010,33(2):385 – 395.

[10] 王小军,吴德隆,余梦伦. 最少燃料消耗的固定推力共面轨道变轨研究[J]. 宇航学报,1995,16(4):9 – 16.

[11] 岳新成,杨莹,耿志勇. 有限推力能量、燃料最优轨道转移控制[J],南京航空航天大学学报,2009,41(6):715 – 719.

[12] 梁新刚,杨涤. 应用非线性规划求解异面最优轨道转移问题[J]. 宇航学报,2006,27(3):365 – 370.

[13] 荆武兴,吴瑶华. 卫星轨道圆化的有限推力点火控制策略[J]. 宇航学报,1997,4(4):1 – 6.

[14] 荆武兴,吴瑶华,杨涤. 基于交会概念的最省燃料共面有限推力轨道转移方法[J]. 哈尔滨工业大学学报,1997,4(4):132 – 135.

[15] 王明春,荆武兴,杨涤,等. 能量最省有限推力同平面轨道转移[J]. 宇航学报,1992,3(3):24 – 31.

[16] 荆武兴,吴瑶华. 基于交会概念的最省燃料异面有限推力轨道转移研究[J]. 哈尔滨工业大学学报,1998,30(2):124 – 128.

[17] 刘玥. 火星探测器近心点制动与轨道保持优化设计[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2011:18 – 29.

(编辑　张　宏)