

飞行器姿态确定的四元数约束滤波算法

李建国^{1,2}, 崔祜涛¹, 田 阳¹

(1. 哈尔滨工业大学 深空探测基础研究中心, 150080 哈尔滨; 2. 中国人民解放军 61345 部队, 710010 西安)

摘 要: 单位四元数作为姿态描述参数具有全局非奇异、运动学方程线性的优点,但其归一化约束必须精确保持. 针对这一问题,提出一种飞行器姿态确定的非线性约束滤波算法. 首先,通过比较四元数先验和后验估计值的范数大小,证明乘性扩展卡尔曼滤波算法难以获得姿态最优约束解. 然后,将 QUEST 算法与乘性卡尔曼滤波算法有效结合起来,建立一个广义的二次约束优化目标函数;状态预测阶段利用姿态及其方差传播模型来修正目标损失函数,测量更新阶段则通过求解特征值/特征矢量问题,全局显性保持了四元数的归一化约束,避免了扩展卡尔曼滤波的局部线性化近似. 数学仿真对所提出算法的精度、稳定性和收敛性能进行了验证,并与乘性扩展卡尔曼滤波算法进行了比较.

关键词: 姿态估计;四元数归一化;乘性扩展卡尔曼滤波;约束估计

中图分类号: V448.22

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2013)01-0035-06

Quaternion constrained filter algorithm for spacecraft attitude determination

LI Jianguo^{1,2}, CUI Hutao¹, TIAN Yang¹

(1. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China;

2. Unit 61345 of PLA, 710100 Xi'an, China)

Abstract: A major advance of using the quaternion to describe body orientation is that the kinematics equation is linear and the quaternion is also globally nonsingular. However, the algebraic constraint of unit norm needs to be maintained. An improved nonlinear constrained filter algorithm is proposed for the spacecraft attitude estimation problem subject to a unit quaternion norm constraint. First, by comparing the quaternion norm of a priori and a posteriori estimate, it is proved that the Multiplicative Extended Kalman filter can not gain the optimal solution under nonlinear constraint. Then, a generalized quadratically constrained optimization object function is developed by effective combination of QUEST algorithm and Multiplicative Kalman filter. During the predicting state, the attitude and its covariance propagation models are used to modify the cost function. During the measurement update phase, the quaternion normalization is explicitly maintained in a globally optimal manner by solving the eigenvalue-eigenvector problem and therefore the local linearization is avoided. Compared with the Multiplicative Extended Kalman filter, numerical simulation result demonstrates the precision, stability and convergence of the presented algorithm.

Key words: attitude estimation; quaternion normalization; multiplicative extended Kalman filter; constrained estimation

姿态估计在过去二十年一直是学者们研究和讨论的焦点^[1]. 被广泛的关注是源于姿态描述不

是1个矢量空间,需要利用冗余来避免奇异性和不连续. 四元数作为全局非奇异最小维数姿态描述形式,在姿态估计问题中得到了广泛的应用^[2-3]. 由于四元数的冗余性,要想获得精确的姿态估计,单位归一化约束必须精确保持. Shuster通过理论分析指出没有正确考虑归一化约束的四元数姿态估计是没有物理意义的^[4]. 文献[5]分析了归一化约束的保持对于提高姿态估计精度和

收稿日期: 2012-02-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61174201);

国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB720000).

作者简介: 李建国(1984—),男,博士研究生;

崔祜涛(1970—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 崔祜涛, cht@astro.hit.edu.cn.

改善滤波收敛特性的重要性。

基于矢量观测的姿态四元数估计算法可以分为两大类:以 QUEST (Quaternion Estimation) 算法^[6]为代表的批处理和以乘性扩展卡尔曼滤波 (Multiplicative Extended Kalman Filter, MEKF) 算法^[7]为代表的实时递推处理。通过使用三维姿态参数描述四元数局部姿态误差, MEKF 隐含地解决了四元数归一化约束条件。但四元数归一化约束本质上是 1 个非线性转换问题, 局部线性化近似处理难以获得最优约束估计值。借助于这种乘性姿态误差描述的思想, Crassidis^[8] 和 Cheng^[9] 将无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF) 和粒子滤波 (Particle filter, PF) 应用到飞行器姿态估计问题中, 保持了四元数归一化约束, 提高了姿态估计精度, 文献 [10] 则提出了基于 PF 和 UKF 联合滤波的卫星姿态估计算法, 进一步提高了卫星姿态四元数估计精度。但 UKF 和 PF 均需要计算样本点的加权平均值作为最终的四元数估计值, 简单的代数加权平均并不能保证严格归一化。

标准的 MEKF、UKF 及 PF 等均为无约束滤波算法, 并没有考虑状态约束条件或者对其进行隐含处理。QUEST 算法通过解一个特征值/特征矢量问题, 可以得到 Wahba 问题^[11] 的精确解析解, 同时也显性的保持了四元数的全局归一化约束, 但批处理算法固有的缺陷使其应用范围有限。Shuster 和 Bar-Itzhack 分别提出了可进行递推估计的滤波 QUEST 算法^[6] 和 REQUEST (Recursive QUEST) 算法^[12], 但二者都仅能取得次优姿态估计值。Choukroun 将最新姿态测量值和姿态预测值在 Wahba 问题框架内最优融合起来, 提出了最优 REQUEST 算法^[13]。上述基于 QUEST 的改进算法都只能估计姿态参数, 而不能估计其他系统参数。

Psiaki^[14] 将 QUEST 算法进行了扩展, 提出基于平方根信息滤波的姿态确定滤波算法, 可以估计姿态参数和其他系统参数 (如陀螺漂移), 但其采用加性四元数描述姿态误差, 使得方差矩阵不再具有实际物理意义, 而且测量更新段需要更复杂的算法来求解二次规划问题。基于这种思想, 本文充分利用 QUEST 算法和乘性姿态估计算法的优势, 提出了一种扩展 QUEST 约束滤波算法, 不仅显性的保持四元数归一化约束, 而且在测量更新过程中不需要线性化, 对测量函数非线性不敏感, 适合飞行器大角度机动飞行。

1 乘性四元数估计算法

设飞行器体坐标系相对于惯性参考坐标系的

姿态四元数为 $\bar{q} = [\mathbf{q} \quad q_4]^T \in \mathbf{S}^3$, 满足归一化约束

$$\|\bar{q}\|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 + q_4^2 = 1.$$

四元数对应的姿态矩阵为

$$\mathbf{A}(\bar{q}) = (q_4^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_4[\mathbf{q} \times].$$

式中 $[\mathbf{q} \times]$ 是叉乘矩阵。

单位四元数 $\bar{q}'$ 与 $\bar{q}$ 之间的乘积定义为

$$\bar{q}' \otimes \bar{q} = \begin{bmatrix} q_4' \mathbf{q} + q_4 \mathbf{q}' - \mathbf{q}' \times \mathbf{q} \\ q_4' q_4 - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} \end{bmatrix}.$$

由于在滤波算法的状态传播阶段, 状态方程足够保持四元数的归一化约束; 测量更新过程中的线性化近似和舍入误差的积累使得归一化约束不再保持。因此 MEKF 的基本思想是在状态传播阶段使用四元数提供全局非奇异姿态描述, 测量更新阶段则估计三维姿态误差, 然后对四元数预测值进行校正。其中四元数估计误差定义为估计值 $\hat{\bar{q}}$ 到真值 $\bar{q}$ 的旋转四元数

$$\delta \bar{q} = \bar{q} \otimes (\hat{\bar{q}})^{-1}.$$

由于误差四元数对应于小的姿态旋转, 所以它的第四个分量 $\delta q_4 \rightarrow 1$, 姿态信息主要包含在四元数的矢量部分 $\delta \mathbf{q}$,

$$\delta \bar{q} \simeq \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

通过将姿态信息在三维姿态参数和四元数之间的转换, 保持了四元数归一化约束, 且姿态估计误差方差矩阵具有实际的物理意义。但是四元数归一化约束属于一个非线性约束变换, MEKF 需要对测量方程进行一阶线性化近似处理, 不能保证全局最优。

考虑 k 时刻的四元数测量更新值为

$$\hat{\bar{q}}_k^+ = \delta \hat{\bar{q}}_k^+ \otimes \hat{\bar{q}}_k^-.$$

根据四元数乘积定义, 它的范数可表示为

$$\|\hat{\bar{q}}_k^+\|^2 = (\hat{\bar{q}}_k^-)^T \hat{\bar{q}}_k^- + (\hat{\bar{q}}_k^- \delta \hat{\bar{q}}_k^+)^T \hat{\bar{q}}_k^- \delta \hat{\bar{q}}_k^+ = \|\hat{\bar{q}}_k^-\|^2 + \|\hat{\bar{q}}_k^-\|^2 \|\delta \hat{\bar{q}}_k^+\|^2.$$

如果四元数先验估计值为单位四元数, 即 $\|\hat{\bar{q}}_k^-\|^2 = 1$, 则

$$\|\hat{\bar{q}}_k^+\|^2 > 1.$$

而且由于系统模型能够保持状态传播阶段范数不变, 因此随着估计过程的不断递推, 四元数估计值范数会不断增加, 可能导致滤波发散。

2 基于约束滤波的姿态四元数估计算法

2.1 滤波问题描述

QUEST 算法是基于对 Wahba 问题的四元数求解。Wahba 问题可以描述为: 给定一系列在惯性

参考坐标系中已知的单位矢量 $\mathbf{r}_i, i = 1, 2, \dots, m$; 相应的飞行器体坐标系中的测量值 $\mathbf{b}_i, i = 1, 2, \dots, m$; 以及测量权值 $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, m$; 求解 $\bar{\mathbf{q}}$ 使损失函数达到最小值

$$J_{\text{QUEST}}(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} [\mathbf{b}_i - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{r}_i]^T [\mathbf{b}_i - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{r}_i]. \quad (1)$$

将式(1)中的损失函数化解为 $\bar{\mathbf{q}}$ 的二次型函数

$$J_{\text{QUEST}}(\bar{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}}. \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \frac{2}{\sigma_i^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}(\mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i \mathbf{b}_i^T - \mathbf{b}_i \mathbf{r}_i^T & -\mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i \\ -(\mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i)^T & -\mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i \end{bmatrix}.$$

由于矩阵 $\mathbf{K}$ 包括了所有的矢量测量信息, 因此称其为测量信息矩阵.

考虑到四元数归一化约束条件 $\bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{q}} = 1$, 引入拉格朗日乘子 $\lambda/2$ 得到新的损失函数

$$J_{\text{QUEST}}(\bar{\mathbf{q}}, \lambda) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} + \frac{\lambda}{2} (\bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{q}} - 1). \quad (3)$$

对式(3)求偏导数可得

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} = -\lambda \bar{\mathbf{q}}. \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)得到

$$J_{\text{QUEST}}(\bar{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2} \lambda.$$

因此最优姿态四元数对应着矩阵 $\mathbf{K}$ 的最小特征值. 通过求解上述的特征值/特征向量问题, QUEST 算法可以获得精确的四元数解析解, 更重要的是可以全局显性保持四元数的归一化约束. 但它属于批处理算法, 且不能估计姿态外的其他系统参数. 姿态估计算法具有的特性如下: 1) 保持 QUEST 算法对四元数归一化的显性约束; 2) 损失函数能够包含角速度、陀螺偏差等参数; 3) 能够对状态参数进行实时序贯估计. 为使姿态估计算法具有如上特性, 在扩展 QUEST 算法^[15]基础上, 对式(1)中的损失函数进行相应的修正:

$$J = 0.5 \sum_{i=1}^{m(k)} \frac{1}{\sigma_{i(k)}^2} [\mathbf{b}_{i(k)} - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}_k)\mathbf{r}_{i(k)}]^T [\mathbf{b}_{i(k)} - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}}_k)\mathbf{r}_{i(k)}] + 0.5 (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T (\mathbf{P}_{k-1})^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}).$$

状态约束条件为

$$\bar{\mathbf{q}}_k = \Phi[t_k, t_{k-1}; \bar{\mathbf{q}}_{k-1}, \boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{w}_{k-1}] \bar{\mathbf{q}}_{k-1}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{f}_k[t_k, t_{k-1}; \bar{\mathbf{q}}_{k-1}, \boldsymbol{\beta}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}], \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_k^T \bar{\mathbf{q}}_k = 1. \quad (7)$$

式中: $\mathbf{x} = [\bar{\mathbf{q}}^T, \boldsymbol{\beta}^T]^T$; $\boldsymbol{\beta}$ 是陀螺漂移; $\mathbf{w}$ 是过程噪声矢量. $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 是 $k-1$ 时刻的后验状态估计值, $\mathbf{P}_{k-1}$ 是

$k-1$ 时刻的状态误差方差矩阵. $\mathbf{b}_{i(k)}$ 是 k 时刻测得的飞行器体坐标系中单位视线矢量, $\mathbf{r}_{i(k)}$ 是已知的惯性参考坐标系中单位矢量. 方程(5)和(6)表示系统离散化动力学模型, 与方程(7)组成了系统的 3 个约束方程. 这样, 约束滤波算法就是建立在求解 $\bar{\mathbf{q}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 使得满足约束方程的损失函数最小化基础之上.

2.2 状态及其方差矩阵传播

四元数运动学微分方程可表示为

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega} \times] & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}.$$

式中: $\boldsymbol{\omega}$ 是角速度矢量, 采用陀螺来测量角速度. 陀螺测量模型可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rg}} = [\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_{\text{rg}} + \boldsymbol{\Gamma}_{\text{rg}}](\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\beta} + \mathbf{w}_a).$$

式中: $\mathbf{S}_{\text{rg}}$ 是比例因子误差矩阵; $\boldsymbol{\Gamma}_{\text{rg}}$ 是未对准误差矩阵; $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rg}}$ 是陀螺测量输出值; $\mathbf{w}_a$ 是零均值白噪声, 构成了过程噪声矢量 $\mathbf{w}$ 的前三项. 为了简化模型, 假设 $\mathbf{S}_{\text{rg}}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{\text{rg}}$ 均为零矩阵.

由于矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 随自变量线性变化, 通过引入矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$, 四元数运动微分方程可以表示为

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = 0.5 \boldsymbol{\Omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rg}} - \boldsymbol{\beta}) \bar{\mathbf{q}} - 0.5 \boldsymbol{\Xi}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{w}_a.$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}.$$

陀螺漂移可建模为随机游走

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{w}_b.$$

式中 $\mathbf{w}_b$ 是零均值白噪声, 构成了过程噪声矢量 $\mathbf{w}$ 的后三项. 则状态传播微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= 0.5 \boldsymbol{\Omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rg}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) \hat{\bar{\mathbf{q}}}, \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\beta}}} &= 0. \end{aligned}$$

由于损失函数中包含有方差矩阵的逆, 由 Fisher 信息矩阵的定义可知

$$\mathbf{P}_{\text{xx}}^{-1} \approx \mathbf{F}_{\text{xx}} = \frac{\partial^2 J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}.$$

由于归一化约束使得四元数各分量之间不是相互独立, 使其不适合用来定义 Fisher 信息矩阵, 因此采用三维姿态参数来描述姿态误差和姿态估计误差方差矩阵. 为了使其与实际的小角度误差旋转角 ϕ 一致, 姿态误差 $\mathbf{a}$ 定义为罗德里格参数的二倍:

$$\mathbf{a} = 2 \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta q_4} = 2 \mathbf{e} \tan(\phi/2). \quad (8)$$

因此状态误差矢量定义为

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \delta \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}.$$

方差矩阵定义为

$$\mathbf{P}(t) = E\{\delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^T\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{aa} & \mathbf{P}_{a\beta} \\ \mathbf{P}_{\beta a} & \mathbf{P}_{\beta\beta} \end{bmatrix}.$$

经过一系列数学推导可得到状态误差方程

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x} + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}.$$

式中:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} -[(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rg}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_a \\ \mathbf{w}_b \end{bmatrix}.$$

则状态误差方差矩阵的传播方程为

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{G}^T(t).$$

式中:

$$\mathbf{Q}(t) = E[\mathbf{w}(t) \mathbf{w}^T(t)].$$

利用状态及方差传播方程可以获得 k 时刻的状态先验估计值 $\hat{\mathbf{q}}_k^-$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_k^-$, 以及 k 时刻的状态误差方差矩阵预测值 $\mathbf{P}_k^-$, 然后使用获得的状态传播值修正损失函数

$$J = \sum_{i=1}^{m(k)} \frac{1}{\sigma_{i(k)}^2} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{K}_k^m \bar{\mathbf{q}}_k + 0.5 \mathbf{a}_k^T \mathbf{F}_{aa(k)}^- \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^T \mathbf{F}_{a\beta(k)}^- \delta \boldsymbol{\beta}_k + 0.5 \delta \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^- \delta \boldsymbol{\beta}_k. \quad (9)$$

式中:

$$\mathbf{F}_k^- = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{aa(k)}^- & \mathbf{F}_{a\beta(k)}^- \\ \mathbf{F}_{\beta a(k)}^- & \mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^- \end{bmatrix}.$$

2.3 测量更新

由式(9)可看出, 姿态测量信息由测量矩阵 $\mathbf{K}_k^m$ 描述, 包含在目标函数的前半部分; 姿态先验信息由姿态误差 $\mathbf{a}_k$ 和方差矩阵 $\mathbf{F}_{aa(k)}^-$ 描述, 包含在目标函数的后半部分, 且姿态信息由两种不同的参数描述. 因此需要进一步的简化目标函数, 将不同的姿态描述形式统一起来.

由式(8)中姿态误差的定义可知

$$\bar{\mathbf{q}} = \delta \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{a}) \otimes \hat{\mathbf{q}} \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\mathbf{q}} + 0.5 \Xi(\hat{\mathbf{q}}) \mathbf{a}.$$

因此式(2)中所描述的四元数损失函数可转化 $\mathbf{a}_k$ 的损失函数:

$$J_{\text{QUEST}}(\bar{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} + \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{a}^T \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}^-) \hat{\mathbf{q}} \mathbf{K} + \frac{1}{4} \mathbf{a}^T \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}^-) \mathbf{K} \Xi(\hat{\mathbf{q}}^-) \mathbf{a}. \quad (10)$$

其中 $\Xi(\hat{\mathbf{q}}^-)$ 具有如下特性:

$$\Xi^T(\hat{\mathbf{q}}^-) \hat{\mathbf{q}} = 0, \quad \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}^-) \Xi(\hat{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{I}_{3 \times 3}.$$

所以对式(10)求二阶偏导数可得

$$\mathbf{P}_{aa}^{-1} = \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}} = 0.5 \mathbf{K}^-.$$

这样将姿态的先验信息和测量信息之间建立了直接联系. 再由矩阵逆的定义可知

$$\mathbf{P}_{aa}^{-1} = \mathbf{F}_{aa} - \mathbf{F}_{a\beta} \mathbf{F}_{\beta\beta}^{-1} \mathbf{F}_{\beta a}.$$

经过等式变换可得

$$0.5 \mathbf{a}_k^T \mathbf{F}_{aa(k)}^- \mathbf{a}_k = \frac{1}{4} \mathbf{a}_k^T \mathbf{K}^- \mathbf{a}_k + 0.5 \mathbf{a}_k^T \mathbf{F}_{a\beta} \mathbf{F}_{\beta\beta}^{-1} \mathbf{F}_{\beta a} \mathbf{a}_k. \quad (11)$$

为了将姿态信息由三维姿态参数转换到四元数, 对四元数乘积进行等式变换:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{q}} \otimes (\hat{\mathbf{q}}^-)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{q}}^- \\ \hat{\mathbf{q}}_4^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_4^- \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\hat{\mathbf{q}}^- \times] & -\hat{\mathbf{q}}^- \\ (\hat{\mathbf{q}}^-)^T & \hat{\mathbf{q}}_4^- \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}.$$

因此可得到 $\mathbf{a}$ 的表达式为

$$\mathbf{a} = 2 \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{q}}. \quad (12)$$

将式(11)和式(12)代入式(9)中并消去与优化结果无关的常数项, 可得到 $\bar{\mathbf{q}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的损失函数

$$J(\bar{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\beta}) = 2 \bar{\mathbf{q}}_k^T \Xi(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \mathbf{F}_{a\beta(k)}^- (\mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^-)^{-1} \mathbf{F}_{aa(k)}^- \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \bar{\mathbf{q}}_k - \bar{\mathbf{q}}_k^T (\mathbf{K}_k^m + \mathbf{K}_k^-) \bar{\mathbf{q}}_k + 2 \bar{\mathbf{q}}_k^T \Xi(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \mathbf{F}_{a\beta(k)}^- \delta \boldsymbol{\beta}_k + 0.5 \delta \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^- \delta \boldsymbol{\beta}_k.$$

然后借助于拉格朗日乘子 λ , 将四元数归一化约束条件引入到目标损失函数中:

$$J(\bar{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\beta}, \lambda) = 2 \bar{\mathbf{q}}_k^T \Xi(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \mathbf{F}_{a\beta(k)}^- (\mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^-)^{-1} \mathbf{F}_{aa(k)}^- \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \bar{\mathbf{q}}_k - \bar{\mathbf{q}}_k^T (\mathbf{K}_k^m + \mathbf{K}_k^-) \bar{\mathbf{q}}_k + 2 \bar{\mathbf{q}}_k^T \Xi(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \mathbf{F}_{a\beta(k)}^- \delta \boldsymbol{\beta}_k + 0.5 \delta \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^- \delta \boldsymbol{\beta}_k + \lambda (\bar{\mathbf{q}}_k^T \bar{\mathbf{q}}_k - 1). \quad (13)$$

由于 $\delta \boldsymbol{\beta}_k$ 与约束条件无关, 因此基于优化的必要性条件 $J(\bar{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\beta}, \lambda) / \partial \boldsymbol{\beta} = 0$, 求解结果为

$$\delta \boldsymbol{\beta}_k = -2 (\mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^-)^{-1} \mathbf{F}_{\beta a(k)}^- \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \bar{\mathbf{q}}_k. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 并对 $\bar{\mathbf{q}}$ 进行优化可得

$$-\bar{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{K}_k^+ + \lambda \bar{\mathbf{q}}_k^T = 0. \quad (15)$$

式中: $\mathbf{K}_k^+ = \mathbf{K}_k^m + \mathbf{K}_k^-$.

通过 QUEST 算法求得姿态四元数估计更新值 $\hat{\mathbf{q}}_k^+$, 然后将其带入式(15)可求得陀螺偏差估计更新值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_k^+$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_k^+ = \hat{\boldsymbol{\beta}}_k^- - 2 (\mathbf{F}_{\beta\beta(k)}^-)^{-1} \mathbf{F}_{\beta a(k)}^- \Xi^T(\hat{\mathbf{q}}_k^-) \hat{\mathbf{q}}_k.$$

从上述求解过程可以看出, 通过直接求解二次约束损失函数, 避免了在更新过程中对测量方程进行线性化近似处理, 全局显性保证了四元数归一化约束.

整个滤波算法流程如图 1 所示.

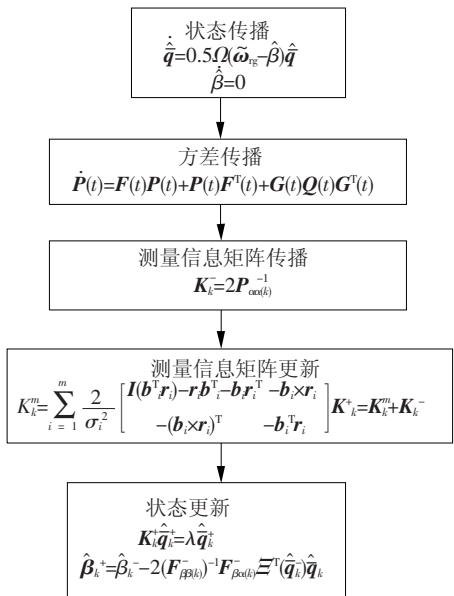


图 1 姿态估计算法流程

3 仿真分析

3.1 仿真条件

所提到的四元数约束滤波算法相比没有利用约束条件的 MEKF 算法而言,应该具有更高的精度和更快的收敛速度,为了验证算法的优越性,进行数学仿真分析.假设星敏感器视场角为 $5^\circ\times 5^\circ$,视轴指向天顶方向,测量周期为 2 s,测量精度为 $10''$.在每个采样周期,星敏感器的量测量为视场内随机产生的单位视线矢量.然后使用飞行器姿态真实值产生惯性单位方向矢量 $\mathbf{r}_{i(k)}$,在随机产生的单位方向矢量上增加标准差为 $10''$ 的高斯分布白噪声可以得到 $\mathbf{b}_{i(k)}$.

速率陀螺测量白噪声强度为 $0.02(^{\circ})/h^{1/2}$,偏差漂移白噪声强度为 $0.1(^{\circ})/h^{3/2}$,采样周期为 0.1 s.由于星敏感器和速率陀螺采样周期的不同,每隔 20 个陀螺采样周期, m_k 变化一次.

3.2 结果与分析

在上述仿真条件下,比较不同情况下扩展 QUEST 约束滤波算法和 MEKF 算法的姿态估计结果.姿态四元数初值为 $\mathbf{q}_0=[0\ 0\ 0\ 1]^T$,陀螺偏差漂移初值为 $\boldsymbol{\beta}_0=[1\ 1\ 1]^T(^{\circ})/h$.

首先,对比了初始估计误差较小时的滤波算法性能.初始姿态误差选取为 7° ,初始陀螺偏差漂移误差选取为 $5(^{\circ})/h$.仿真结果分别如图 2 和图 3 所示,图中给出的是仿真 100 次后的估计误差平均值.从图中可以看出扩展 QUEST 四元数约束滤波算法具有很好的收敛性能,且估计精度也要比 MEKF 算法高.

在初始姿态估计误差比较大时,MEKF 算法

的姿态估计精度会明显下降,且收敛速度很慢.为了确定扩展 QUEST 约束滤波算法在此条件下能否达到较好的收敛性能和较高的估计精度.图 4 和图 5 给出了仿真结果.为了使性能对比更加明显,初始姿态误差选取为 170° ,初始陀螺偏差漂移误差选取为 $180(^{\circ})/h$.由仿真结果可知,EKF 滤波算法不仅估计精度很低,而且无法收敛于真值,但是扩展 QUEST 约束滤波算法却能保证良好的滤波性能.姿态估计误差在 500 s 之后就能降为 5° ,陀螺偏差漂移误差在一个轨道周期之后降为 $4(^{\circ})/h$,能够满足实际应用的实时性和高精度的要求.

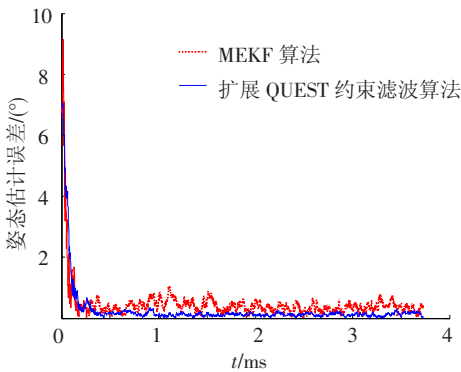


图 2 初值精确时姿态估计误差比较

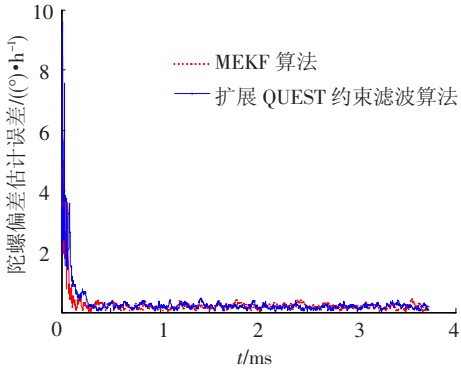


图 3 初值精确时陀螺偏差估计误差比较

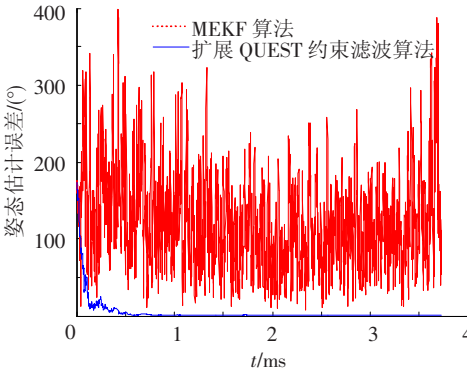


图 4 初值偏差大时姿态估计误差比较

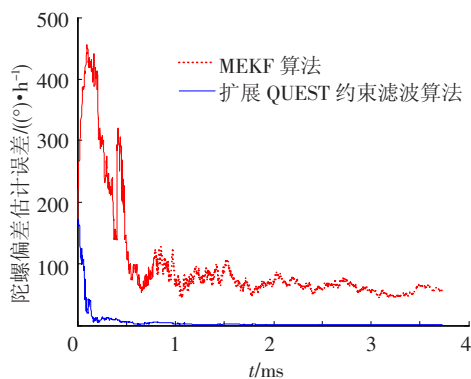


图 5 初值偏差大时陀螺偏差估计误差比较

通过仿真还可以发现,在较大初始估计误差存在时,EKF 对滤波参数的变化很敏感,当改变初始先验状态误差方差阵或陀螺白噪声误差强度时,EKF 滤波算法的性能会发生很大改变,而扩展 QUEST 约束滤波算法对这种变化具有很好的鲁棒性.但是扩展 QUEST 约束滤波算法的性能是以加大运算量为代价的,如何简化算法复杂程度是需要关注的问题.

4 结 论

本文提出一种基于扩展 QUEST 算法的四元数约束滤波算法.该算法将 QUEST 批处理算法和序贯滤波思想有效结合起来,通过求解二次约束二次优化问题,不但全局显性的保持了四元数归一化约束,而且避免了测量更新阶段的局部线性化近似,增强了滤波算法对初值不确定的鲁棒性,对提高飞行任务的自主性有很大优势.通过数学仿真分析,该算法在精度、稳定性和滤波收敛性等方面良好性能得到了验证.

参考文献

- [1] LEFFERTS E J, MARKLEY F L, SHUSTER M D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1982, 5 (5): 417–429.
- [2] 林玉荣,邓正隆. 基于矢量观测确定飞行器姿态的算法综述[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003, 35(1): 38–45.
- [3] CRASSIDIS J L, MARKLEY F L. Survey of nonlinear attitude estimation Methods [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2007, 30(1): 12–28.
- [4] SHUSTER M D. Constraint in attitude estimation part 1: constrained estimation [J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2003, 51(1): 51–74.
- [5] PITTELKAU M E. An analysis of the quaternion attitude determination filter [J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2003, 51(1): 103–120.
- [6] BAR-ITZHACK I Y. REQUEST: A recursive QUEST algorithm for sequential attitude determination [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1996, 19 (5): 1034–1038.
- [7] MARKLEY F L. Attitude error representations for Kalman filtering [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2003, 26(2): 311–317.
- [8] CRASSIDIS J L, MARKLEY F L. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation [J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2003, 26(4): 536–542.
- [9] CHENG Y, CRASSIDIS J L. Particle filtering for attitude estimation using a minimal local-error representation [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2010, 33(4): 1305–1310.
- [10] 姜雪原,马广富,胡庆雷. 基于粒子滤波和 UKF 联合滤波的卫星姿态估计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(3): 337–341.
- [11] WAHBA G. A least squares estimate of satellite attitude [J]. SIAM Review, 1965, 7(3): 409.
- [12] SHUSTER M D. Filter QUEST or REQUEST [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2009, 32 (2): 643–645.
- [13] CHOUKROUN D, BAR-ITZHACK I Y, OSHMAN Y. Optimal-REQUEST algorithm for attitude determination [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2004, 27(3): 418–425.
- [14] PASIAKI M L. Attitude-determination filtering via extended quaternion estimation [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2000, 23(2): 206–214.
- [15] CHRISTIAN J A, LIGHTSEY E G. Sequential optimal attitude recursion filter [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2010, 33(6): 1787–1800.

(编辑 张 宏)