

SMC 在结构可靠性分析中的应用

胡江华, 孟松鹤, 朱燕伟

(哈尔滨工业大学 复合材料与结构研究所, 150080 哈尔滨)

摘要: 为解决高可靠度结构的不确定性可靠性问题,提出了采用分离式蒙特卡洛方法(SMC)对失效概率进行计算,该方法是以原始的蒙特卡洛方法(CMC)和条件期望法(CE)为基础,采用不同的响应样本和能力样本,以抽样样本的试验分布函数代替条件期望方法中精确的分布函数.通过实例计算结果表明,SMC方法既解决了计算的成本问题,又提高了计算精度,能够很好的解决高可靠结构的不确定性可靠性问题.

关键词: 高可靠结构;不确定性;原始的蒙特卡洛;条件期望;分离式蒙特卡洛

中图分类号: TB114;TB21

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2013)01-0089-05

Separable Monte Carlo simulation applied to structures reliability

HU Jianghua, MENG Songhe, ZHU Yanwei

(Center for Composite Materials and Structure, Harbin Institute of Technology, 150080 Harbin, China)

Abstract: To solve the uncertainty reliability problem of a high reliability structure, a separable Monte Carlo (SMC) method based on crude Monte Carlo (CMC) method and Condition expectation (CE) method is proposed. The method uses different sample size of response and capacity, and replaces the distribution function of CE with empirical distribution function of sample of SMC. Practical example of reliability shows that SMC method not only solves the calculation cost, but also improves the calculation precision, it can be applied to uncertainty reliability problem of structures.

Key words: high reliability structure; uncertainty; crude Monte Carlo; condition expectation; separable monte carloo

在工程中,结构设计需要设计者按照一定的目标,对各种因素进行分析、综合、决策、评价和优化.在结构设计中,有很多因素都是不确定的,忽略这些不确定因素对结构的影响是不科学的,因为这些不确定性因素可能使结构特性和响应产生较大的偏差和不可预知性.在工程结构中,不确定性主要来源于:材料参数的不确定性、结构几何尺寸的不确定性、施加载荷的不确定性和结构边界条件的不确定性^[1].

传统的结构设计方法,一般都是基于确定性分析,采用安全因子等方法来提升结构的可靠度,这往往带来了大量的冗余设计,也增加了结构质

量和制造成本^[2].目前,不确定性结构可靠度计算方法有很多,如:矩法^[3]、非概率可靠性分析方法^[4]、随机有限元法^[5]和蒙特卡洛方法^[6]等.在这些分析方法中,蒙特卡洛(Monte Carlo)方法是比较常用且最基本的一种分析方法,它的优点是不需要做任何前期准备工作和特殊处理.但对于一个高可靠的结构而言,计算其失效概率时,在规定的计算精度要求下,能够使用蒙特卡洛方法的途径有:1)采用足够大的样本^[7-9];2)采用重要抽样法^[10].这两种方法都是从改变样本来提高精度,本文将通过改变蒙特卡洛方法的计算过程来提高计算精度,即分离式的蒙特卡洛方法^[8-9,11-13](separable Monte Carlo),该方法对于那些响应成本很高(如需有限元计算),而能力成本较低的结构,可通过增加能力本来提高计算精度,而只增加了少量的计算成本.

收稿日期: 2011-11-15.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(91016029).

作者简介: 胡江华(1983—),男,博士研究生;

孟松鹤(1969—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 胡江华, hujiahua830901@163.com.

1 失效概率估计

对大部分的结构而言,其失效概率估计都可以通过极限状态方程 G 来实现,如式(1)为分离式的极限状态方程^[8-9]

$$G(X_1, X_2) = R(X_1) - C(X_2). \quad (1)$$

式中: R 为响应(如:结构的应力值),其不确定性来源于一组随机变量 X_1 ; C 为能力(如:结构的强度值),其不确定性来源于另一组随机变量 X_2 ,并且 X_1 和 X_2 在统计上是独立的. 当式(1)中的 $R > C$ 时,结构发生失效.

1.1 原始的蒙特卡洛方法(CMC)

原始的蒙特卡洛方法(CMC)的失效概率估计表达式为

$$\hat{p}_{\text{CMC}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[G(R_i, C_i) \geq 0]. \quad (2)$$

式中: I 为一个指示函数,如果条件为真时, $I = 1$, 如果条件为假, $I = 0$. 对于 CMC 方法而言, $N\hat{p}_{\text{CMC}}$ 服从一个参数为 (N, p_f) 的二项分布,其中 p_f 为真实的失效概率. 因此,CMC 失效概率估计的期望和方差可表示为

$$E(\hat{p}_{\text{CMC}}) = p_f, \text{var}(\hat{p}_{\text{CMC}}) = (p_f(1 - p_f))/N. \quad (3)$$

通常用变异系数来衡量 $\hat{p}_{\text{CMC}}$ 精度,如

$$CV(\hat{p}_{\text{CMC}}) = \sqrt{\text{var}(\hat{p}_{\text{CMC}})}/p_f = ((1 - p_f)/Np_f)^{1/2}. \quad (4)$$

从式(4)可以看出,在给定失效概率条件下,CMC 计算的精度受限于样本数 N . 所以,对于那些失效概率很小,获取响应样本成本很高的结构,响应计算的成本往往就是样本数 N 选取的限制性因素.

1.2 条件期望法(CE)

如果已知能力值的分布函数 $F_c(x)$,对于任意给定的一个响应值 R_i ,可获得在该响应值下的结构失效概率值 $F_c(R_i)$. 故在响应样本数为 N 的条件下,结构的失效概率可表示为

$$\hat{p}_{\text{CE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_c(R_i). \quad (5)$$

式(5)与式(2)中的 CMC 估计相似,但是 CMC 中 N 表示响应和能力的样本大小,而在 CE 中 N 仅仅表示响应的样本.

CE 估计的期望和方差为

$$E(\hat{p}_{\text{CE}}) = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_c(R_i)\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[F_c(R_i)] = p_f. \quad (6)$$

$$\text{var}(\hat{p}_{\text{CE}}) = \frac{1}{N} [E(F_c(R)^2) - p_f^2] \approx$$

$$\frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N [F_c(R_i)]^2 - p_f^2 \right]. \quad (7)$$

通过比较式(3)和式(7),CE 的方差和 CMC 的方差可进行明显的比较. 基于概率定义,式(7)中平方项的概率,可表示为

$$F_c(r)^2 = P(C < r)^2 = P(C_1 < r, C_2 < r) = P[\max(C_1, C_2) < r].$$

式中:随机变量 C_1 和 C_2 都是 C 中的独立样本. 因此,式(7)可表示为

$$\text{var}(\hat{p}_{\text{CE}}) = \frac{1}{N} [P(\max(C_1, C_2) < R) - p_f^2]. \quad (8)$$

将式(8)与式(3)进行比较,可以很容易看出,两个随机变量 C_1 和 C_2 小于 R 的概率自然小于或等于一个随机变量 C_1 小于 R 的概率. 即

$$P(\max(C_1, C_2) < R) \leq P(C_1 < R) = p_f$$

所以有

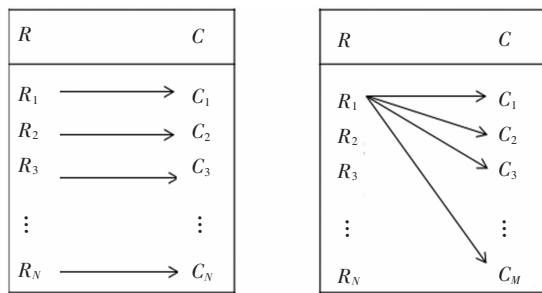
$$\text{var}(\hat{p}_{\text{CE}}) \leq \text{var}(\hat{p}_{\text{CMC}}).$$

1.3 分离式蒙特卡洛方法(SMC)

在式(1)的极限状态方程中,当能力和响应在统计上是相互独立的随机变量时, $R(X_1)$ 和 $C(X_2)$ 便可独立进行取样. 图 1 表示了 CMC 和 SMC 在极限状态方程中概率估计的方法,从 CMC 与 SMC 对比可以看出,CMC 进行的是 N 组样本的一对一比较,而 SMC 进行的是能力和响应样本所有可能组合的比较,很明显 SMC 比 CMC 的精度要高很多. SMC 的失效概率估计表达式为

$$\hat{p}_{\text{SMC}} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M I[R_i > C_j]. \quad (9)$$

式中: N 为响应样本数量; M 为能力样本数量. 在 SMC 模拟中,不需要相同大小的能力和响应样本,尤其是对于那些能力样本很容易获得的情况下,可以获得更多的样本来提高失效概率的计算精度.



(a) CMC

(b) SMC

图 1 蒙特卡洛方法比较示意图

在 CE 中,能力的分布函数是已知的,所以在蒙特卡洛模拟中,不需要对其进行样本抽样;而在 SMC 中,能力的分布函数可以是未知的,对其进行随机样本抽样后,就可以获得能力的试验分布函数,如图 2 所示. 对于不同的随机抽样样本,其试验分布函数不同,失效概率估计值也就不同. 当 SMC 中能力样本的数量达到无穷大时,其试验分布函数才等于 CE 中解析的能力函数表达式. 可见,在失效概率计算中,CE 由于采用了解析的能力分布函数,其精度要高于采用了试验分布函数的 SMC,但 SMC 中的能力样本数量越大时,它们之间的差别就越小. 由于 SMC 不需要具体的能力分布函数,所以它在失效概率估计中比 CE 方法具有更广的应用范围.

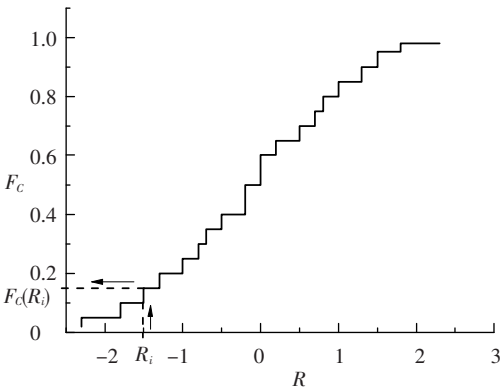


图 2 SMC 随机样本的试验分布函数示意图

同样,对于 SMC 方法而言,也可以获得其失效概率估计的期望值和方差值. 由于 SMC 中响应样本和能力样本的随机性,必须使用条件计算来确定其期望和方差. SMC 的期望值和方差表达式为

$$E(\hat{p}_{\text{SMC}}) = E(F_c(R)) = E_R[E_c(F_c(R) \mid R)] = p_f,$$

$$\text{var}[\hat{p}_{\text{SMC}}] = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{M} (p_f - E(F_c(R)^2)) + E(F_c(R)^2) - p_f^2 \right] + \frac{N-1}{N} \left[\frac{1}{M} (E(F_c(\min(R_1, R_2))) - p_f^2) \right].$$

令:

$$\begin{aligned} \varphi &= E(F_c(R)^2) - p_f^2, \\ \xi_{R,R} &= p_f - E(F_c(R)^2), \\ \xi_{R_1,R_2} &= E(F_c(\min(R_1, R_2))) - p_f^2. \end{aligned} \tag{10}$$

所以方差的表达式可表示为

$$\text{var}[\hat{p}_{\text{SMC}}] = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{M} \xi_{R,R} + \varphi \right] + \frac{N-1}{N} \left[\frac{1}{M} \xi_{R_1,R_2} \right]. \tag{11}$$

2 算例分析

以喷管扩张段结构的失效概率计算为例,假

设喷管扩张段在热载荷作用下,由于扩张段使用材料性能的不确定性,导致扩张段发生失效. 其极限状态方程及失效条件可写为

$$G = R - C = \sigma_R - \sigma_c > 0.$$

式中: σ_R 为轴向拉应力极值; σ_c 为轴向拉伸强度. 引起轴向拉应力极值 σ_R 不确定的主要材料性能包括径向热导率和轴向弹性模量. 表 1 所示为主要材料性能的分布规律、均值及变异系数,其他材料性能变化对结构可靠性的影响可以忽略不计.

表 1 主要材料性能及分布规律

材料性能	均值	变异系数/%	分布规律
径向热导率 $\lambda_r / (\text{W} \cdot \text{mK}^{-1})$	5.725	10	正态分布
轴向弹性模量 E_a / GPa	15	10	正态分布
轴向拉伸强度 σ_c / MPa	75	10	正态分布

通过有限元分析,可建立轴向拉应力极值与径向热导率和轴向弹性模量之间的关系,不考虑它们之间的单位换算.

$$\sigma_R = (0.015\lambda_r^2 - 0.35\lambda_r + 3.88)E_a + 9. \tag{12}$$

由式(12)可知,获得轴向拉应力极值的概率密度函数具有一定的难度,更无法获得失效概率的解析解,只能从数值计算上对其进行失效概率估计. 由上述分析可知,CE 的计算精度最高,因此可通过在样本数 $N = 10^5$ 情况下,重复进行计算 10^5 次,获得名义上失效概率为 $1.727\ 5\text{E} - 4$,并以此名义失效概率为基础,对 CMC、CE 和 SMC 估计的精度进行对比. 表 2 列出了在不同样本,重复进行计算 10^4 次条件下,失效概率估计的试验值和估计值的标准差及变异系数. 其中,实验值是指在数值计算过程中,由式(9)计算出每一次数值计算的失效概率,然后与名义上的失效概率进行比较,获得其标准差与变异系数;估计值是指在计算失效概率方差的过程中,采用式(11)计算每一次数值计算中的方差,然后对所有的方差值进行平均,获得平均方差;并且对这些方差值进行分布特征分析,获得方差估计的变异系数. 由失效概率估计的变异系数可以看出,CE 估计精度最高,SMC 次之,CMC 最低,并且可以看出,失效概率试验和估计的变异系数没有明显区别.

图 3 和图 4 分别表示 CE 和 SMC 的计算精度随样本数(取对数)的变化趋势. 从 CE 的精度随样本数 N 的变化来看, N 的增加能提高计算精度,从 $N = 100$ 时的 39.32% 增加到 $N = 10\ 000$ 时的 4.04%. 从 SMC 的精度随样本数 N 和 M 的

变化来看,当 $N = 1\,000$ 时, M 的增加能显著提高计算精度,而当 $M = 1\,000$ 时, N 的增加对精度改变较小,这主要是由 SMC 的方差组成特点决定

的. 在 $N = M = 10^4$ 时,重复计算 10^4 情况下,通过对 SMC 估计方差计算,可获得式(10)中 3 项期望值,如表 3 所示.

表 2 CMC、CE 和 SMC 失效概率估计的标准差和变异系数对比

方法	样本大小	试验值		估计值		
		标准差	变异系数/%	标准差	变异系数/%	估计方差的变异系数/%
$\hat{p}_{\text{CMC}}$	$N = 10^3$	4.1732E-4	241.60	4.14E-4	239.60	243.20
$\hat{p}_{\text{CMC}}$	$N = 10^4$	1.3128E-4	76.00	1.31E-4	76.10	76.00
$\hat{p}_{\text{CE}}$	$N = 10^3$	2.2795E-5	13.20	2.2659E-5	13.12	113.70
$\hat{p}_{\text{CE}}$	$N = 10^4$	7.2163E-6	4.18	7.24E-6	4.19	41.19
$\hat{p}_{\text{SMC}}$	$N = M = 10^3$	1.7256E-4	99.89	1.75E-4	101.30	279.10
$\hat{p}_{\text{SMC}}$	$N = 10^3, M = 10^4$	5.9163E-5	34.25	5.93E-5	34.33	80.42
$\hat{p}_{\text{SMC}}$	$N = M = 10^4$	5.5118E-4	31.91	5.49E-5	31.81	78.25

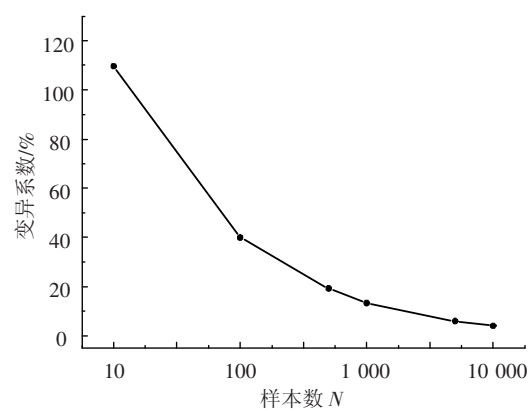


图 3 CE 计算精度随样本变化

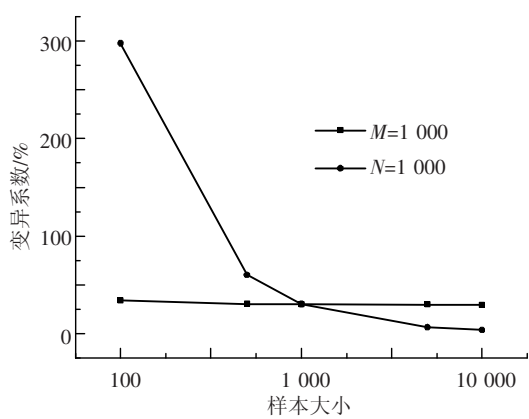


图 4 SMC 计算精度随样本变化

表 3 SMC 估计方差组成部分的均值和变异系数

参数	均值	变异系数/%
φ	5.3889E-7	45.58
$\xi_{R,R}$	1.7218E-4	31.96
ξ_{R_1,R_2}	2.9634E-5	89.63

由于样本的数量比较大,可以近似认为 SMC

估计方差组成部分的均值等于真实的期望值. 将均值代入到式(11)中,当 $N = 1\,000$ 时,估计标准差可表示为

$$\text{stdev}[\hat{p}_{\text{SMC}}] = \left(\frac{2.9777}{M} \times 10^{-5} + 5.3889 \times 10^{-10} \right)^{1/2}.$$

可见当 $M < 10^6$ 时, M 的变化对标准差大小起主要影响作用,当 $M > 10^6$ 时, M 的变化对估计标准差影响很小,当 $M \rightarrow \infty$ 时,此时估计标准差为 $2.32\text{E}-5$,已经接近于 CE 估计在 $N = 1\,000$ 情况下的估计标准差 $2.29\text{E}-5$. 而当 $M = 1\,000$ 时,估计标准差可表示为

$$\text{stdev}[\hat{p}_{\text{SMC}}] = \left(\frac{6.8144}{N} \times 10^{-7} + 2.9634 \times 10^{-8} \right)^{1/2}.$$

可见当 $N > 1\,000$ 时, N 的增加对精度的改变已经不明显了,标准差基本上趋于定值. 造成这种情况的主要原因是,SMC 估计方差中的组分 φ 和 ξ_{R_1,R_2} 在方差中所占的比例不同,当 φ 所占的比重较大时, M 的变化对精度影响起主要作用. 这也给 SMC 失效概率估计带来启示: 当对一个高可靠结构进行失效概率分析时,为保证在失效概率计算中不需要太多的响应样本(一般成本较高),可对其极限状态方程进行变形重组处理,如将响应中的部分项移到能力这边,以达到改变 SMC 估计方差中的 ξ_{R_1,R_2} 和 φ 比重的大小,提升样本数 M 对失效概率估计精度的影响.

3 结 论

- 1)从失效概率计算精度方面来看,CE 计算精度最高,SMC 计算精度次之,CMC 计算精度最低.
- 2)通过对失效概率计算的试验和估计标准差及变异系数对比,发现试验和估计的计算精度

接近,没有明显的差别.

3)对于 SMC 方差估计来说,当样本数 M 增加对计算精度没有明显影响时,可通过对极限状态方程进行重组变形,增加 $\xi_{R1,R2}$ 在估计方差中的比重,提高样本数 M 对计算精度的敏感度.

参考文献

[1] 李杰. 随机结构系统 - 分析与建模[M]. 北京: 科学出版社, 1996.

[2] 张俊华, 洪祖峻. 火箭结构可靠性设计分析[J]. 宇航学报, 1980(2): 21 - 33.

[3] 姚泽良, 李宝平, 周雪峰. 结构可靠度分析的一次二阶矩方法与二次二阶矩方法[J]. 西北水力发电, 2005, 21(3): 20 - 23.

[4] 郭书祥, 吕震宙. 结构的非概率可靠性方法和概率可靠性方法的比较[J]. 应用力学学报, 2003, 20(3): 107 - 111.

[5] 李丰, 孟广伟, 周立明, 等. 复杂载荷作用下结构的可靠性研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(S1):295 - 298.

[6] HANSON J M, BEARD B B. Applying Monte Carlo simulation to launch vehicle design and requirements verification[R]. AIAA, 2010 - 8433.

[7] SMARSLOK B P, ALEXANDER D, HAFTKA R T.

Separable Monte Carlo simulation Applied to laminated composite plates reliability[R]. AIAA, 2008 - 1751.

[8] SMARSLOK B P, HAFTKA R T. Improving accuracy of failure probability estimates with separable Monte Carlo [J]. International Journal of Reliability and Safety, 2010, 4(4): 393 - 414.

[9] SWILER L P, WEST N J. Importance sampling: promises and limitations[R]. AIAA, 2010 - 2850.

[10] SMARSLOK B P, HAFTKA R T, KIM N H. Taking advantage of separable limit states in sampling procedures[R]. AIAA, 2006 - 1632.

[11] RAVISHANKAR B, SANKAR B V, HAFTKA R T. Uncertainty analysis of integrated thermal protection system with rigid insulation bars[R]. AIAA, 2011 - 1767.

[12] RAVISHANKAR B, SMARSLOK B P, HAFTKA R T. Error estimation and error reduction in separable Monte—Carlo method [J]. AIAA Journal, 2010, 48(11): 2624 - 2630.

[13] RAVISHANKAR B, SMARSLOK B P, HAFTKA R T. Separable sampling of the limit state for accurate Monte Carlo simulation[R]. AIAA, 2009 - 2266.

(编辑 张 红)