

一种改进的 GPS 整周模糊度降相关 LLL 算法

徐定杰, 刘明凯, 沈 锋, 祝丽业

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 150001 哈尔滨)

摘 要: 针对 GPS 整周模糊度降相关 LLL(A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovasz)算法中存在的病态 Z 变换的缺陷问题, 提出了一种改进的 LLL 算法. 利用修正 Gram-Schmidt 正交化和行向量内积降序调整矩阵, 对模糊度协方差矩阵进行降相关处理, 改善 LLL 算法对低维矩阵的降相关效果, 实现对高维矩阵的降相关. 以谱条件数作为评判矩阵相关程度的准则, 分别利用 LLL 算法和改进 LLL 算法对 200 个随机模拟的模糊度协方差矩阵进行仿真分析和比较, 结果表明: 改进 LLL 算法能更有效地减小模糊度协方差矩阵的谱条件数, 降低矩阵的相关性, 更有利于整周模糊度的搜索和解算.

关键词: GPS; 整周模糊度; LLL; 降相关; 随机模拟

中图分类号: P228.4 文献标志码: A 文章编号: 0367-6234(2013)06-0124-05

A modified LLL algorithm for GPS integer ambiguity decorrelation

XU Dingjie, LIU Mingkai, SHEN Feng, ZHU Liye

(College of Automation, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China)

Abstract: According to the ill-conditioned Z transformation disadvantage of the LLL algorithm(A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovasz)for GPS integer ambiguity decorrelation, a modified LLL algorithm is proposed in the paper. The modified LLL algorithm applies the repaired Gram-Schmidt orthogonalization and row vector inner product adjustment matrixes to decorrelate integer ambiguity covariance matrixes, improve the performance of the low-dimension matrixes decorrelation applying the LLL algorithm and achieve high-dimension matrixes decorrelation. Taken the condition number as the criterion for judging the degree of matrix correlation, the performance of the LLL algorithm and the modified LLL algorithm are compared by applying 200 integer ambiguity covariance matrixes derived from random simulation. Results show that the modified LLL algorithm has better performance in decreasing the condition numbers of integer ambiguity covariance matrixes and reducing the correlations of covariance matrixes. Thus, the modified LLL algorithm is better for searching and solving GPS integer ambiguity.

Key words: GPS; integer ambiguity; LLL; decorrelation; random simulation

在利用 GPS 载波相位作为观测量进行高精度实时定位时, 关键是要求得测量过程中存在的整周模糊度^[1]. 在众多的求解 GPS 整周模糊度方法中, LAMBDA (Least-squares ambiguity decorrelation adjustment)算法是其中性能较好的一种算法. 该算法以整数最小二乘原理为基础, 对模糊度协方差矩阵进行降相关处理, 即对整周模糊度浮点解及其协

方差矩阵进行整数 Z 变换, 使其尽量对角化, 降低模糊度之间的相关性, 因此 Z 变换的性能也直接影响着整周模糊度搜索的速度和成败^[2-5]. 目前常用的降相关处理的方法主要有 3 种^[6-9]: 整数高斯降相关(Integer Gaussian decorrelation)、逆整数乔勒斯基降相关(Inverse integer Cholesky decorrelation)和 LLL(A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovasz, LLL)降相关. 其中 LLL 算法虽然是一种较新的模糊度降相关算法, 但仍然存在一些缺陷, 如 LLL 算法在进行整数正交变换取整的过程中存在舍入误差, 将会影响正交变换迭代过程的

收稿日期: 2012-05-21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61102107).
作者简介: 徐定杰(1966—), 男, 教授, 博士生导师.
通信作者: 刘明凯, lmk881111@yeah.net.

收敛性,甚至会恶化原矩阵的相关性,使降相关处理失败^[10-11];在LLL算法中没有考虑矩阵行向量内积大小顺序对矩阵降相关处理的影响等^[12]。

针对LLL算法中存在的病态 Z 变换的缺陷,首先设计了一种行向量内积降序调整矩阵对协方差矩阵的行向量进行降序排列,然后再利用修正Gram-Schmidt正交变换对LLL算法中原有的正交变换算法进行了改进,得到改进LLL算法,然后分别利用LLL算法和改进LLL算法对随机模拟的200个模糊度协方差矩阵进行仿真分析和比较,并以谱条件数作为评判矩阵相关程度的准则。结果表明,改进LLL算法能够更有效地减小低维矩阵协方差矩阵的谱条件数,并能够实现对高维矩阵的降相关。本文首先介绍了LLL算法,然后给出了改进LLL算法,并进行仿真分析和比较,最后给出了结论。

1 LLL 算法

1.1 LAMBDA 算法中的 Z 变换

在利用LAMBDA算法求解GPS整周模糊度时,为了加快模糊度固定解的搜索,对原始模糊度作 Z 变换,将GPS整周模糊度向量 $\hat{a}$ 转换为一个新的向量 $\hat{z}$,协方差阵 Q_a 也相应地转换为 Q_z ,从而降低模糊度协方差阵的相关性,使搜索椭球更接近球体,也能极大地缩短搜索时间,提高搜索效率^[8]。其基本的原理为

$$\hat{z} = Z\hat{a}, Q_z = ZQ_a Z^T. \quad (1)$$

式中:作为 Z 变换的转换矩阵 Z 必须满足:1) Z 中所有元素必须都为整数;2) $\det Z = \pm 1$ 。

1.2 LLL 算法的计算步骤

LLL算法的基本思想,先对整周模糊度的协方差阵进行Cholesky分解,然后采用整数Gram-Schmidt正交变换对协方差矩阵进行降相关处理,从而得到一个近似正交基^[9]。

首先对整周模糊度协方差阵的 Q_a 进行Cholesky分解,即

$$Q_a = B^0 (B^0)^T. \quad (2)$$

式中: B^0 为满秩下三角矩阵,其行向量记为 $b_i^0 (i = 1, 2, \dots, m)$,且各个行向量线性无关,整数Gram-Schmidt正交变换过程为

$$b_i^k = b_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^k b_j^k, \quad i \leq m. \quad (3)$$

其中:

$$l_{ij}^k = \begin{cases} [\langle b_i^{k-1}, b_j^k \rangle / \langle b_j^k, b_j^k \rangle], & j < i; \\ 1, & j = i; \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

式中: l_{ij}^k 表示矩阵 L^k 中的元素,符号 $\langle \cdot \rangle$ 表示内积, $[\cdot]$ 表示取整,上标 k 表示第 k 次整数Gram-Schmidt正交变换,变换前后矩阵的关系为 $B^{k-1} = L^k B^k$ 。如此循环进行上面的整数Gram-Schmidt正交变换,直至 L^n 为单位阵 E ,可得对应式(2)的整数变换 Z^n ,即

$$\begin{cases} Q_z^n = Z^n Q_a (Z^n)^T, \\ Z^n = (L^n)^{-1} (L^{n-1})^{-1} \dots (L^k)^{-1} \dots (L^1)^{-1}. \end{cases} \quad (4)$$

式中: Q_z^n 为 Q_a 经过 Z^n 正交变换后得到的整周模糊度协方差阵。

LLL算法中 l_{ij}^k 的取整运算是在Gram-Schmidt正交变换的过程中进行的,而在进行迭代循环的过程中, b_i^k 与 l_{ij}^k 是交替进行的,所以这些舍入误差也会导致 l_{ij}^k 出现误差^[10],会在很大程度上影响 Z 变换的性能,造成病态的 Z 变换,有时甚至会恶化矩阵的相关性,造成 L^k 的迭代发散^[11]和原模糊度协方差阵降相关处理的失败。另外由于整数Gram-Schmidt正交变换数值性能有时不好,而相比之下,修正的Gram-Schmidt正交变换具有更好的性能^[13],因此本文提出一种基于修正的Gram-Schmidt正交变换的LLL算法对模糊度的协方差阵进行正交变换。

2 改进的LLL 算法

2.1 行降序调整矩阵

从式(3)可知,如果 l_{ij}^k 值越大,那么所得的 b_i^k 就越小,那么 Z^n 降相关效果越好,模糊度协方差阵的降相关处理就越彻底,而此时内积 $\langle b_i^{k-1}, b_j^k \rangle$ 就应尽可能地大,因此模糊度协方差矩阵的行向量内积的大小将会影响降相关处理的效果。

在 Z 变换的过程中,可能会出现病态 Z 变换,即出现模糊度协方差阵的对角线元素等于或小于零的情况,由文献[12]可知,造成病态 Z 变换的原因主要是由于在 Z 变换的过程中出现了不满足整数约束条件的变换矩阵 Z ,这将会导致 Z 变换效果的急剧下降,恶化矩阵的相关性,最终导致协方差矩阵降相关处理失败。

因此,为了提高LLL算法的降相关性能,改进的LLL算法在进行正交变换之前,采用行降序调整矩阵,先对矩阵 Q_a 的行向量按照内积大小进行降序排列得到 Q_s ,调整前后的两矩阵之间的关系为

$$\tilde{B}^{k-1} = S_B^k B^{k-1} (S_B^k)^T. \quad (5)$$

式中: S_B^k 为行向量内积降序调整矩阵,简称为行

降序调整矩阵. 行降序调整矩阵的生成过程:
1) 定义矩阵 S_B^k 为 $m \times m$ 维零矩阵;2) 对 B^{k-1} 的行向量 b_i^{k-1} 按照内积大小进行降序排列, 如果 B^{k-1} 中行向量 b_i^{k-1} 的内积排在第 j 位, 那么相应的 $(S_B^k)_{ji} = 1$, 最终得到 S_B^k . 每次进行整数正交变换之前, 先用行降序调整矩阵对矩阵进行排列, 然后再进行正交变换直至满足迭代的终止条件为止.

2.2 正交变换算法的改进

由于在 LLL 算法中进行整数 Gram-Schmidt 正交变换的过程中产生了一定的舍入误差, 这些舍入误差将会影响 Z 变换的性能, 对模糊度协方差阵的正定性产生影响, 甚至会恶化协方差矩阵的相关性. 因此, 本文对 LLL 算法中的正交变换算法提出两方面的改进:1) 正交化变换算法由经典的 Gram-Schmidt 正交化算法改为修正的 Gram-Schmidt 正交化算法;2) 将原本在式(3)正交化过程中进行的 l_{ij}^k 取整运算移至式(4)中进行, 即先对模糊度协方差矩阵进行正交化变换, 再进行取整、求逆和转置运算, 以减小迭代过程中存在的舍入误差. 综合上述两个方面的改进, 可得出最终的正交化变换算法为

$$\tilde{B}^{k-1} = L^k \tilde{B}^k, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \tilde{b}_j^k = \tilde{b}_j^{k-1}, & j = 1, 2, \dots, m-1; \\ \tilde{b}_i^k = \tilde{b}_i^{k-1} - l_{ij}^k \tilde{b}_j^k, & i = j+1, \dots, m. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \tilde{Q}_Z^n = \tilde{Z}^n Q_a^n (\tilde{Z}^n)^T, \\ \tilde{Z}^n = [L^n]^{-1} S_B^n \dots [L^k]^{-1} S_B^k \dots [L^1]^{-1} S_B^1. \end{cases} \tag{8}$$

其中:

$$l_{ij}^k = \begin{cases} \langle \tilde{b}_i^{k-1}, \tilde{b}_j^k \rangle / \langle \tilde{b}_j^k, \tilde{b}_j^k \rangle, & j < i; \\ 1, & j = i; \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

式中: $\tilde{B}^k$ 为 B^k 经过行降序调整矩阵转换后的矩阵, $\tilde{b}_i^k$ 为 $\tilde{B}^k$ 的第 i 行的行向量, $\tilde{Q}_Z^n$ 为 Q_a^n 经 $\tilde{Z}^n$ 变换后的整周模糊度协方差矩阵. 式(2)及式(5)~(8)称为改进的 LLL 算法. 该改进算法针对 LLL 算法中存在的缺陷, 采用行降序调整矩阵和改进的正交变换算法相结合对 LLL 算法进行了改进.

3 仿真结果与分析

为了验证改进 LLL 算法的适用性, 也为了更好地比较 LLL 算法和改进的 LLL 算法降相关处理的效果, 本文采用随机模拟的方法构造了 200 个对称正定的矩阵作为整周模糊度的协方差矩阵, 这些随机模拟的协方差矩阵为 2~30 维, 涵盖

了矩阵从低维到高维的分布. 由于这些随机模拟的矩阵并不依赖于特定的卫星-接收机的几何构图、双差观测值的随机模型, 没有任何的先验信息, 因此具有一般性, 也更能检验降相关处理方法的优缺点.

本文以谱条件数作为矩阵去相关程度的评判准则, 矩阵的行向量的线性相关性越强, 谱条件数就越大, 正交矩阵的谱条件数等于 1. 在整周模糊度搜索的过程中, 整周模糊度搜索椭球被拉长的程度等于模糊度协方差阵的谱条件数, 因此, 谱条件数越大, 模糊度搜索椭球被拉伸得越长, 对整周模糊度搜索越不利, 严重影响搜索效率.

为了更好地分析在低维和高维情况下 LLL 算法和改进的 LLL 算法对矩阵进行降相关处理的效果, 将 2~30 维的矩阵分为 3 种情况加以分析: 2~6 维、7~15 维、16~30 维. 图 1 为 LLL 算法和改进的 LLL 算法降相关处理的流程图.

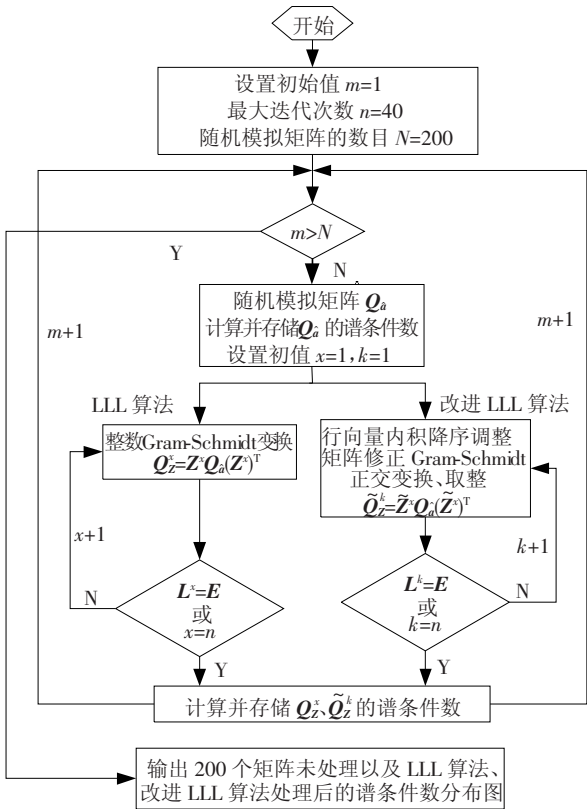


图 1 LLL 算法和改进 LLL 算法降相关处理的流程图

图 2~4 中分别给出了 2~6 维、7~15 维、16~30 维协方差矩阵分别经 LLL 算法和改进的 LLL 算法处理后得到的谱条件数对数的分布图, 以及两种算法处理之后的矩阵谱条件数对数之差的变化情况, 如果差值大于零, 则说明改进的 LLL 算法优于原 LLL 算法; 如果小于零, 则说明原 LLL 算法优于改进的 LLL 算法; 如果等于零, 则说明两者的降相关效果相当.

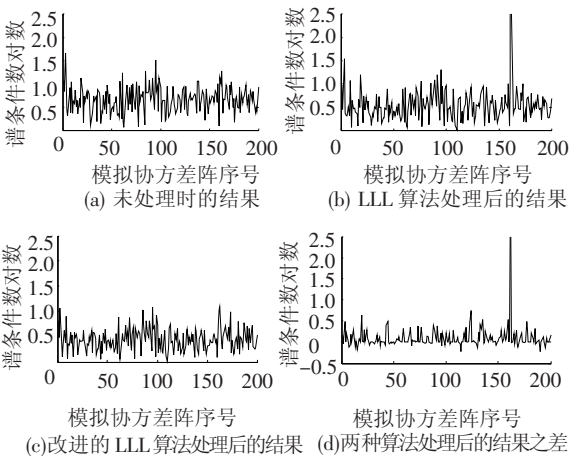


图2 2~6维协方差阵处理后的结果比较

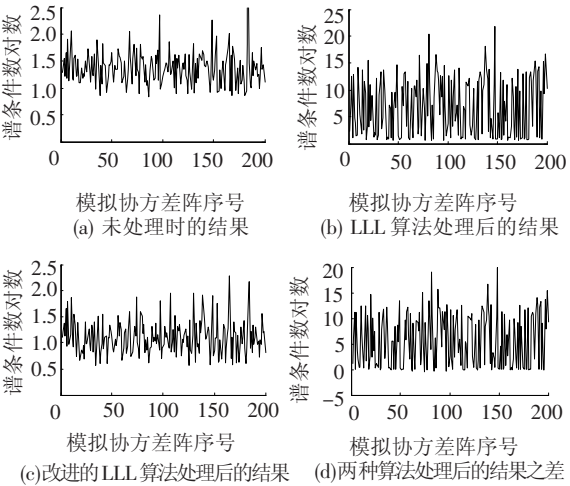


图3 7~15维协方差阵处理后的结果比较

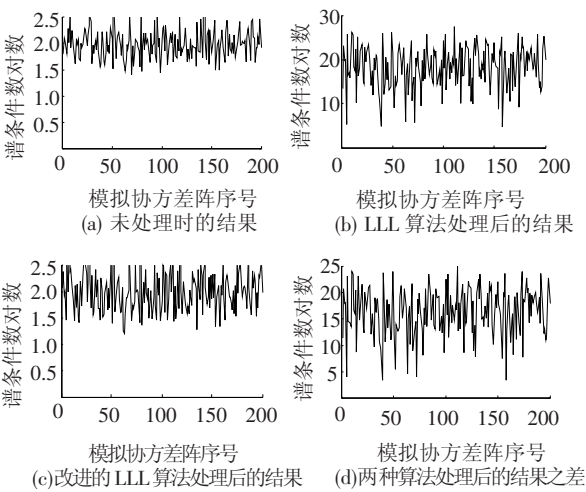


图4 16~30维协方差阵处理后的结果比较

表1分别给出了2~6维、7~15维、16~30维协方差矩阵经LLL算法和改进LLL算法处理之

后的谱条件数对数的平均值以及降相关处理的成功率(谱条件数减小的概率)。

从表1可知,对于2~6维的矩阵,经过LLL算法和改进的LLL算法处理之后,前者谱条件数减小的数量占矩阵总数78.50%,而后者为95.50%;而在降低谱条件数对数的均值(对数lg形式表示)方面,前者由初始的0.6551降至0.5422,降低了17.23%,而后者则由初始的0.6551降至0.4459,降低了31.93%。通过比较图2(a)、2(b)可知,LLL算法也能够降低大部分矩阵的谱条件数,但在图2(b)中可以很明显地看到谱条件数对数出现了一个很明显的“尖峰”,这表明初始的矩阵经LLL算法进行降相关处理时,出现了病态的Z变换,导致了降相关处理失败,而且LLL算法处理后的矩阵谱条件数降低的幅度不够大,比较图2(a)、2(c)知,改进LLL算法能使大部分的矩阵谱条件数对数有明显的降低,且经过改进的LLL算法处理时,没有出现图2(b)中所示的“尖峰”情况。再把经LLL算法和改进LLL算法处理后的矩阵谱条件数作差,发现80.50%的谱条件数大于零,即经LLL算法处理之后的谱条件数大于经改进的LLL算法处理之后的矩阵谱条件数,如图2(d)所示。因此对于低维2~6维的矩阵,LLL算法和改进的LLL算法都能降低矩阵的相关性,但是改进的LLL算法降相关的性能要优于LLL算法。

结合表1与图3、4进行分析可知,当矩阵的维数大于6时,LLL算法的降相关处理的性能越来越差,降相关处理的成功概率从7~15维的25%到16~30维的0,谱条件数对数的平均值甚至比初始矩阵的谱条件数对数大很多,从图3(b)、4(b)中也可看出,经LLL算法处理后的谱条件数对数甚至比原矩阵谱条件数高出一个数量级。而当矩阵为7~15维时,由表1和图3(c)可知,经改进的LLL算法处理后的矩阵的谱条件数仍能保持较高概率,即89.5%的降相关处理的成功率,初始矩阵的谱条件数平均值则由原来的1.3261降至1.0751,降低了19.36%,当矩阵为16~30维时,由表1和图4(c)知,改进的LLL算法仍能成功地降相关处理53%的矩阵,而此时LLL算法已不能对矩阵进行降相关处理了。

表1 LLL算法和改进的LLL算法处理结果比较

算法	谱条件数减小的概率/%			谱条件数对数(lg)的均值		
	2~6维	7~15维	16~30维	2~6维	7~15维	16~30维
未处理	—	—	—	0.6551	1.3261	1.9783
LLL算法	78.50	25.00	0	0.5422	6.7557	18.1260
改进LLL算法	95.50	89.50	53.00	0.4459	1.0751	1.8945

从上述模拟仿真结果的比较和分析可得出,对于低维矩阵(维数小于7),LLL和改进LLL算法都能较好地对矩阵进行降相关处理,但此时改进LLL算法比LLL算法具有更好的降相关效果.但随着矩阵维数的增加,随机模拟矩阵的谱条件数、行向量内积之间的差距也变大,LLL算法中出现病态 Z 变换的概率变大,LLL算法便无法对高维矩阵进行降相关处理,而改进LLL算法对高维矩阵仍具有较好的降相关能力.

因为LLL算法只能对低维矩阵进行降相关处理,如果想要实现对于高维矩阵的降相关,那么对于矩阵的先决条件要求较高.而在实际的GPS实时动态定位中,需要求解的模糊度协方差矩阵的维数较高,而观测的时间很短,在短时间内所能观测到的历元数也相对较少,模糊度之间的相关性很高,这也导致了模糊度协方差阵的谱条件数很大,因此在实际的GPS动态定位中,LLL算法降相关的效果将不会很理想.而改进LLL算法在处理高维矩阵的过程中,对高维矩阵的先决条件要求没有那么高,也能够更好地使高维矩阵达到降相关的效果.因此,改进LLL算法在实际的GPS实时动态定位中具有更好的适用性.

4 结 论

1)在分析了LLL算法的基础上,针对其中存在的缺陷,采用修正Gram-Schmidt正交变换和行向量内积降序调整矩阵对LLL算法进行改进.在实际的GPS实时动态定位中,关键是整周模糊度的正确解算,而在目前应用较多的LAMBDA算法求解整周模糊度中,降相关处理又是该算法的核心.

2)仿真结果表明,LLL算法仅仅适用于低维矩阵,而改进后的LLL算法不受协方差矩阵维数的限制,对低维和高维矩阵都能进行降相关处理,并且改进LLL算法在处理低维矩阵时,降相关处理的性能也要优于LLL算法,更有利于GPS整周模糊搜索和解算.

3)改进LLL算法在实际的GPS动态定位中,将会有更好的适用范围.需要指出的是,通过对LLL算法进行改进,可以降低模糊度协方差阵的

相关性,但是为了更好地搜索和解算GPS整周模糊度,还需要在改进的LLL算法基础上进一步研究精准确定模糊度搜索椭圆半径的方法.

参考文献

- [1] 谢钢. GPS原理与接收机设计[M]. 北京:电子工业出版社,2009:72-74.
- [2] TEUNISSEN P J G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation [J]. Journal of Geodesy, 1995, 70: 65-82.
- [3] DE JONGE P, TIBERIUS C. The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: implementation aspects [C]//Publications of the Delft Geodetic Computing Center L GR-series. Delft: [s. n.], 1996: 1-45.
- [4] TEUNISSEN P J G, DE JONGE P J. Performance of the lambda method for fast GPS ambiguity resolution [J]. Navigation Journal of the Institute of Navigation, 1997, 44 (3): 373-383.
- [5] 周扬眉,刘经南,刘基余. 回代解算的LAMBDA方法及其搜索空间[J]. 测绘学报, 2005, 34 (4): 300-304.
- [6] TEUNISSEN P J G. The invertible GPS ambiguity transformation [J]. Manuscript Geodesy, 1995, 20 (6): 489-497.
- [7] XU Peiliang. Random simulation and GPS decorrelation [J]. Journal of Geodesy, 2001, 75: 408-423.
- [8] LIU L T, SU H T, ZHU Y Z. A new approach to GPS ambiguity decorrelation [J]. Journal of Geodesy, 1999, 73 (6): 478-490.
- [9] GRAFAREND E W. Mixed integer/real valued adjustment (IRA) problems: GPS initial cycle ambiguity resolution by means of the LLL algorithm [J]. GPS Solution, 2000 (4): 31-44.
- [10] 刘志平,何秀凤. 改进的GPS模糊度降相关LLL算法[J]. 测绘学报, 2007, 36 (3): 286-289.
- [11] 楼立志. 对GPS模糊度解相关方法的一种改进[J]. 同济大学学报, 2004, 32 (2): 237-241.
- [12] 陈树新. GPS整周模糊度动态确定的算法及性能研究[D]. 西安:西北工业大学, 2002.
- [13] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2004: 47-52, 341-351.

(编辑 魏希柱)