

# 前提不匹配的 T-S 模糊系统的时滞相关镇定

张泽健<sup>1</sup>, 黄显林<sup>1</sup>, 班晓军<sup>1</sup>, 高晓智<sup>2</sup>, Zenger Kai<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 导航制导与控制理论中心, 150001 哈尔滨; 2. 阿尔托大学 自动化与系统技术系, 00076 埃斯波)

**摘要:** 为了降低 T-S 模糊时滞系统稳定性条件的保守性以及提高其控制器设计的灵活性, 本文提出了在前提不匹配条件下考虑 T-S 模糊时滞系统的时滞相关稳定性以及控制器设计问题. 首次通过构造包含三重积分的增广 Lyapunov 泛函的方法, 提出一个新的具有较小保守性的时滞相关稳定性准则; 同时在前提不匹配条件下, 给出了保证该系统渐近稳定的控制器设计方法, 该方法提高了控制器设计的灵活性, 并且对于具有不确定隶属度函数的模糊系统同样适用. 最后通过两个仿真例子验证本文所提出的方法的有效性.

**关键词:** T-S 模糊系统; 时滞相关; 前提不匹配; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273.4      **文献标志码:** A      **文章编号:** 0367-6234(2013)11-0001-07

## Delay-dependent stabilization of T-S fuzzy systems under imperfect premise matching

ZHANG Zejian<sup>1</sup>, HUANG Xianlin<sup>1</sup>, BAN Xiaojun<sup>1</sup>, GAO Xiaozhi<sup>2</sup>, ZENGER Kai<sup>2</sup>

(1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China;  
2. Department of Automation and Systems Technology, Aalto University, 00076 Espoo, Finland)

**Abstract:** To reduce the stability conservativeness for T-S fuzzy systems with time-delay and improve fuzzy controller design flexibility, the issues of delay-dependent stability analysis and controller design for T-S fuzzy time-delay systems under imperfect premise matching are investigated in this paper. A new less conservative delay-dependent stability condition is firstly proposed by constructing a novel augmented Lyapunov function, which contains a triple-integral term. Under the imperfect premise matching, our approach can enhance the design flexibility. Especially, some issues related to the fuzzy models with uncertain grades of membership can also be resolved. Finally, two numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

**Key words:** T-S fuzzy systems; Delay-dependent; imperfect premise matching; linear matrix inequality (LMI)

T-S 模糊时滞模型是日本学者 Takagi 和 Sugeno 在 1985 年提出的<sup>[1]</sup>, 它的出现为模糊控制理论的研究提供了一个新的契机. 目前, 对 T-S 模糊系统的控制理论的研究已经有了令人瞩目的成果<sup>[2-4]</sup>. 然而上述结果都没有考虑时滞系统. 众

所周知, 时滞现象广泛存在于现实生活中, 并且在工程实践中, 时滞的存在经常会导致系统的性能指标下降, 甚至使系统失去稳定性, 因此时滞系统的稳定性是首先要解决的重要问题之一. 自文献[5]首次将 T-S 模糊模型方法用于研究非线性时滞系统之后, 许多学者在这方面进行了深入的研究, 并相继发表了许多重要的研究成果<sup>[6-8]</sup>. 对于时滞系统稳定性的分析方法通常分为两类, 一类是时滞独立的稳定性分析方法; 另一类是时滞相关的稳定性方法. 由于后者考虑了时滞的大小, 所以与前者比较, 后者得到的稳定性准则和控制器设计方案具有较小的保守性. 特别是在时

**收稿日期:** 2012-10-23.

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61273095); 芬兰科学院基金资助项目(135225, 127299).

**作者简介:** 张泽健(1984—), 女, 博士研究生;  
黄显林(1956—), 男, 教授, 博士生导师;  
高晓智(1972—), 男, 教授, 博士生导师;  
Zenger Kai(1958—), 男, 教授, 博士生导师.

**通信作者:** 黄显林, xlinhuang@hit.edu.cn.

滞较小的情况下,二者比较后者具有更大的优势.因此现有的稳定性结果绝大多数都是时滞相关的.为了进一步减少时滞相关稳定性条件的保守性,文献[9]提出新的有界引理去处理在对 Lyapunov 函数求导时产生的交叉项,降低了由于舍去交叉项所带来的保守性;而文献[10]采用的是构造增广的 Lyapunov 泛函的方法,使得 Lyapunov 函数更加一般化;还有就是目前使用最广泛的方法,自由权矩阵法<sup>[11-12]</sup>.在上述文献中,选取的 Lyapunov 函数通常会包含一些积分项,比如  $\int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s)Q\mathbf{x}(s)ds$ , 二重积分  $\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s)Q\dot{\mathbf{x}}(s)dsd\theta$ .而在文献[13]中,作者通过在构造 Lyapunov 函数时引入三重积分项,使得结果具有更小的保守性.然而此方法只应用在中立型时滞系统上.另一方面,在上述参考文献中,对于控制器设计问题,通常假设控制器的隶属度函数与被控对象的隶属度函数选取是相同的,从而会导致控制器设计有一定的局限性.为了提高控制器设计的灵活性,文献[14-15]讨论了当控制器与被控对象拥有不同的隶属度函数时, T-S 模糊系统的稳定性及镇定问题.文献[16]将上述结果推广到 T-S 模糊时滞系统上.然而文献[16]中采用的是时滞独立的稳定性分析方法,具有较大的保守性.

本文在文献[16]的基础上采用依赖时滞的稳定性分析方法.基于文献[13]的方法,首次应用含有三重积分项的增广的 Lyapunov 泛函研究 T-S 模糊时滞系统的稳定性问题.同时利用含有自由权矩阵的参数模型变换以及积分不等式方法给出了该系统的时滞相关稳定性准则及控制器设计方法.对比文献[5-8, 10-11],本文所提出的稳定性条件在降低保守性的同时具有形式简洁、涉及的决策变量少的特点,从而降低了计算的复杂度,因而更加高效.另一方面,在控制器设计上,不同于传统的并行补偿控制器(PDC)设计方法,本文所设计的控制器的隶属度函数是可以任意选取的,从而提高了控制器设计的灵活性以及使用范围.最后,两个仿真例子证明了该方法的有效性.

### 1 系统描述及预备知识

考虑 T-S 模糊时滞模型,第  $i$  条模糊规则为 Rule  $i$ : IF  $f_1(\mathbf{x}(t))$  is  $M_1^i$  and ... and  $f_p(\mathbf{x}(t))$  is  $M_p^i$  THEN 
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{1i}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $r$  是模糊规则数,  $M_\alpha^i, \alpha = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, r$  为相应函数  $f_\alpha(\mathbf{x}(t))$  的模糊语言值.  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是系统的状态向量,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  是控制输入;  $\mathbf{A}_{1i}, \mathbf{A}_{2i}, \mathbf{B}_i, i = 1, 2, \dots, r$  是具有适当维数的系统矩阵;  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  是定义在  $t \in [-\tau, 0]$  上的初始函数;  $\tau$  表示常数时滞.

通过单点模糊化,乘积推理,中心加权平均解模糊器, T-S 模糊系统(1)的动态模型可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t))[\mathbf{A}_{1i}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t)]. \quad (2)$$

其中

$$w_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mu_i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t))},$$

$$\mu_i(\mathbf{x}(t)) = \prod_{\alpha=1}^p \mu_{M_\alpha^i}(f_\alpha(\mathbf{x}(t))).$$

其中  $\mu_{M_\alpha^i}(f_\alpha(\mathbf{x}(t)))$  表示  $f_\alpha(\mathbf{x}(t))$  对应于  $M_\alpha^i$  的隶属度,  $w_i(\mathbf{x}(t))$  为第  $i$  条模糊规则的权值,这里

$$\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) = 1, w_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0.$$

**定义 1** 前提不匹配条件是指在模糊闭环控制系统中,控制器的隶属度函数与被控对象隶属度函数的选取无关,即控制器与被控制对象拥有不同的隶属度函数.

**引理 1**<sup>[13]</sup> 对于任意常数矩阵  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T > 0$  和向量  $\boldsymbol{\tau} > 0$ , 下面积分不等式成立:

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{Z}\mathbf{x}(s)ds &\leq - \frac{1}{\tau} \left( \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}(s)ds \right)^T \cdot \\ \mathbf{Z} \left( \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}(s)ds \right) - \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{Z}\mathbf{x}(s)dsd\theta &\leq \\ - \frac{1}{\tau^2} \left( \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}(s)dsd\theta \right)^T \mathbf{Z} \left( \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}(s)dsd\theta \right). \end{aligned}$$

### 2 稳定性分析

首先研究当  $\mathbf{u}(t) = 0$  时,带有常数时滞的模糊系统的稳定性,自治系统模型为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t))[\mathbf{A}_{1i}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{2i}\mathbf{x}(t - \tau)]. \quad (3)$$

**定理 1** 给定一个数量  $\tau \geq 0$ , 模糊时滞系统(3)是渐近稳定的,若存在矩阵  $\mathbf{R} > 0$ , 以及

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{13}^T & \mathbf{P}_{23}^T & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} > 0, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^T & H_{22} \end{bmatrix} > 0$$

和  $T_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  使得

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{11i} & \Phi_{12i} & \Phi_{13i} & \Phi_{14i} & \Phi_{15i} \\ \Phi_{12i}^T & \Phi_{22} & \Phi_{23i} & T_4^T & \Phi_{25} \\ \Phi_{13i}^T & \Phi_{23i}^T & \Phi_{33i} & \Phi_{34i} & \Phi_{35i} \\ \Phi_{14i}^T & T_4 & \Phi_{34i}^T & -Q_{22} & P_{23} \\ \Phi_{15i}^T & \Phi_{25}^T & \Phi_{35i}^T & P_{23}^T & \Phi_{55} \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{11i} &= P_{13} + P_{13}^T + Q_{11} + \tau H_{11} - \frac{1}{\tau} H_{22} - 2R - \\ &\quad T_1 A_{1i} - A_{1i}^T T_1^T, \\ \Phi_{12i} &= P_{11} + Q_{12} + \tau H_{12} + T_1 - A_{1i}^T T_2^T, \\ \Phi_{13i} &= P_{23}^T - P_{13} + \frac{1}{\tau} H_{22} - T_1 A_{2i} - A_{1i}^T T_3^T, \\ \Phi_{14i} &= P_{12} - A_{1i}^T T_4^T, \\ \Phi_{15i} &= P_{33} - \frac{1}{\tau} H_{12}^T + \frac{2}{\tau} R - A_{1i}^T T_5^T, \\ \Phi_{22} &= Q_{22} + \tau H_{22} + \frac{1}{2} \tau^2 R + T_2 + T_2^T, \\ \Phi_{23i} &= P_{12} - T_2 A_{2i} + T_3^T, \\ \Phi_{25} &= P_{13} + T_5^T, \\ \Phi_{33i} &= -P_{23}^T - P_{23} - Q_{11} - \frac{1}{\tau} H_{22} - T_3 A_{2i} - A_{2i}^T T_3^T, \\ \Phi_{34i} &= P_{22} - Q_{12} - A_{2i}^T T_4^T, \\ \Phi_{35i} &= -P_{33} + \frac{1}{\tau} H_{12}^T - A_{2i}^T T_5^T, \\ \Phi_{55} &= -\frac{1}{\tau} H_{11} - \frac{2}{\tau^2} R. \end{aligned}$$

证明 选取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= \begin{bmatrix} x^T(t) \\ x^T(t-\tau) \\ \left(\int_{t-\tau}^t x(s) ds\right)^T \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \int_{t-\tau}^t x(s) ds \end{bmatrix} + \\ &\int_{-\tau}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+\sigma}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\sigma d\theta + \\ &\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s)] H \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds d\theta + \\ &\int_{t-\tau}^t [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s)] Q \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds. \quad (5) \end{aligned}$$

其中:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^T & H_{22} \end{bmatrix},$$

且  $P, Q, H$  和  $R$  都是未知的正定矩阵.

由式(3), 对于任何矩阵  $T_i, i = 1, 2, \dots, 5$  有

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) [x^T(t) T_1 + \dot{x}^T(t) T_2 + x^T(t-\tau) T_3 + \\ &\quad \dot{x}^T(t-\tau) T_4 + \left(\int_{t-\tau}^t x(s) ds\right)^T T_5] \times [x(t) - \\ &\quad A_{1i} x(t) - A_{2i} x(t-\tau)] = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

$V(x(t))$  沿式(3)的时间导数并结合式(6)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \begin{bmatrix} \dot{x}^T(t) \\ \dot{x}^T(t-\tau) \\ x^T(t) - x^T(t-\tau) \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \int_{t-\tau}^t x(s) ds \end{bmatrix} + \\ &\frac{1}{2} \tau^2 \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta + \\ &\begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-\tau) & \left(\int_{t-\tau}^t x(s) ds\right)^T \end{bmatrix} \cdot \\ &P \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t-\tau) \\ x(t) - x(t-\tau) \end{bmatrix} + [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)] \cdot \\ &Q \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \tau [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)] H \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} - \\ &[x^T(t-\tau) \quad \dot{x}^T(t-\tau)] Q \begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ \dot{x}(t-\tau) \end{bmatrix} - \\ &\int_{t-\tau}^t [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s)] H \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds + 2 \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) \cdot \\ &[x^T(t) T_1 + \dot{x}^T(t) T_2 + x^T(t-\tau) T_3 + \dot{x}^T(t-\tau) T_4 + \\ &\quad \left(\int_{t-\tau}^t x(s) ds\right)^T T_5] \times [x(t) - A_{1i} x(t) - \\ &\quad A_{2i} x(t-\tau)]. \quad (7) \end{aligned}$$

由引理 1 得

$$\begin{aligned} &-\int_{t-\tau}^t [x^T(s) \quad \dot{x}^T(s)] H \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \leq \\ &\quad -\frac{1}{\tau} \left(\int_{t-\tau}^t [x(s) \quad \dot{x}(s)] ds\right)^T H \cdot \\ &\quad \int_{t-\tau}^t [x(s) \quad \dot{x}(s)] ds. \quad (8) \\ &-\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta \leq \\ &\quad -\frac{2}{\tau^2} \left(\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) ds d\theta\right)^T R \left(\int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) ds d\theta\right) = \\ &\quad -\frac{2}{\tau^2} \left(\tau x(t) - \int_{t-\tau}^t x(s) ds\right)^T R \left(\tau x(t) - \int_{t-\tau}^t x(s) ds\right). \quad (9) \end{aligned}$$

将式(8)和(9)代入式(7)中,可以得到

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) \xi^T(t) \Phi_i \xi(t).$$

其中

$$\xi(t) = \left[ \mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{x}^T(t-\tau) \dot{\mathbf{x}}^T(t-\tau) \left( \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}(s) ds \right)^T \right]^T.$$

$\Phi_i$ 如式(4)定义. 如果  $\Phi_i < 0$ , 那么对于足够小的  $\delta > 0$ , 有  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\delta \|\mathbf{x}(t)\|^2$ . 所以如果条件(4)成立, 那么系统(3)是渐近稳定的.

**注1** 定理1中所选的 Lyapunov 函数, 如果令  $\mathbf{P}_{12} = 0, \mathbf{P}_{22} = 0, \mathbf{P}_{23} = 0, \mathbf{R} = 0$ , 正是文献[10]所取的 Lyapunov 函数, 因此本文所构造的 Lyapunov 函数更加一般化. 另一方面, 由于文献[10-12]中引入的额外矩阵变量比较多, 这样就增加了计算的复杂度. 特别是对含有多个时滞项的系统, 相应结果更为复杂. 而本文所得的稳定性条件不仅减少了保守性, 而且形式简洁, 涉及的决策变量少, 因此更加高效.

### 3 前提不匹配条件下状态反馈镇定

下面给出保证上述 T-S 模糊时滞系统稳定的前提不匹配条件下的模糊控制器的设计方法. 由定义1, 考虑在前提不匹配条件下的模糊控制律规则, 其中第  $j$  个规则为

IF  $g_1(\mathbf{x}(t))$  is  $N_1^i$  and  $\dots$  and  $g_q(\mathbf{x}(t))$  is  $N_q^i$   
THEN

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (10)$$

其中  $N_\beta^j, \beta = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, r$  为相应函数  $g_\beta(\mathbf{x}(t))$  的模糊语言值.  $\mathbf{F}_j \in \mathbf{R}^{m \times n}$  是第  $j$  条规则的反馈增益矩阵.

于是全局模糊控制律为

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^r m_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t). \quad (11)$$

其中

$$m_j(\mathbf{x}(t)) = \frac{v_j(\mathbf{x}(t))}{\sum_{j=1}^r v_j(\mathbf{x}(t))},$$
$$v_j(\mathbf{x}(t)) = \prod_{\beta=1}^q v_{N_\beta^j}(g_\beta(\mathbf{x}(t))).$$

式中:  $v_{N_\beta^j}(g_\beta(\mathbf{x}(t)))$  表示  $g_\beta(\mathbf{x}(t))$  对应于  $N_\beta^j$  上的隶属度,  $m_j(\mathbf{x}(t))$  为第  $j$  条模糊规则的权值, 这里  $\sum_{j=1}^r m_j(\mathbf{x}(t)) = 1, m_j(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ .

结合式(11), 在前提不匹配条件下, 全局模糊闭环控制系统(2)可以表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i m_j [(A_{li} + B_i F_j) \mathbf{x}(t) + A_2 \mathbf{x}(t-\tau)]. \quad (12)$$

下面给出该闭环控制系统的控制器设计方法.

**定理2** 给定数量  $\tau \geq 0$  和常数  $t_i, i = 2, 3, \dots, 5$ , 闭环系统(12)是渐近稳定的, 如果控制器的隶属度函数与被控对象的隶属度函数满足对于所有  $j$  及  $\mathbf{x}(t), m_j(\mathbf{x}(t)) - \rho_j w_j(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ , 其中  $0 < \rho_j < 1$ ; 并且存在正定矩阵  $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{R}}$  (其形式同定理1),  $\Lambda_i \in \mathbf{R}^{5n \times 5n}$  矩阵  $\mathbf{X}$  和向量  $\mathbf{Y}_j, j = 1, 2, \dots, r$  使得

$$\Psi_{ij} - \Lambda_i < 0, \quad (13)$$

$$\rho_i \Psi_{ii} - \rho_i \Lambda_i + \Lambda_i < 0, \quad (14)$$

$$\rho_j \Psi_{ij} + \rho_i \Psi_{ji} - \rho_j \Lambda_i - \rho_i \Lambda_j + \Lambda_i + \Lambda_j \leq 0, \quad i < j \quad (15)$$

成立, 其中控制增益可以设计为  $\mathbf{F}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}^{-T}$ .

**证明** 类似定理1的证明过程, 这里用式(12)代替定理1证明过程中的式(6), 式(4)中的  $\mathbf{A}_{li}$  用  $\mathbf{A}_{li} + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j$  代替. 令  $\mathbf{T}_2 = t_2 \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_3 = t_3 \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_4 = t_4 \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_5 = t_5 \mathbf{T}_1$ . 假设  $\mathbf{T}_1$  是非奇异的, 所以  $\mathbf{T}_1^{-1}$  存在. 定义矩阵  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{X} \mathbf{R} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{P}}_{11} = \mathbf{X} \mathbf{P}_{11} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{P}}_{12} = \mathbf{X} \mathbf{P}_{12} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{P}}_{13} = \mathbf{X} \mathbf{P}_{13} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{P}}_{22} = \mathbf{X} \mathbf{P}_{22} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{P}}_{23} = \mathbf{X} \mathbf{P}_{23} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{P}}_{33} = \mathbf{X} \mathbf{P}_{33} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{Q}}_{11} = \mathbf{X} \mathbf{Q}_{11} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{Q}}_{12} = \mathbf{X} \mathbf{Q}_{12} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{Q}}_{22} = \mathbf{X} \mathbf{Q}_{22} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \mathbf{H}_{11} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{H}}_{12} = \mathbf{X} \mathbf{H}_{12} \mathbf{X}^T, \bar{\mathbf{H}}_{22} = \mathbf{X} \mathbf{H}_{22} \mathbf{X}^T, \mathbf{X} = \mathbf{T}_1^{-1}$ . 然后用矩阵  $\text{diag}[\mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}]$  和该矩阵的转置分别左右乘以不等式(4), 用矩阵  $\text{diag}[\mathbf{X} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}]$  及其转置分别左右乘以矩阵  $\mathbf{P}$ , 同理用矩阵  $\text{diag}[\mathbf{X} \ \mathbf{X}]$  及其转置分别左右乘以矩阵  $\mathbf{Q}$  和矩阵  $\mathbf{H}$ . 定义  $\mathbf{F}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}^{-T}$ , 得到

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \xi^T(t) \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) m_j(\mathbf{x}(t)) \Psi_{ij} \right) \xi(t). \quad (16)$$

其中

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Psi_{11ij} & \Psi_{12ij} & \Psi_{13ij} & \Psi_{14ij} & \Psi_{15ij} \\ \Psi_{12ij}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23i} & t_4 \mathbf{X} & \Psi_{25} \\ \Psi_{13ij}^T & \Psi_{23i}^T & \Psi_{33i} & \Psi_{34i} & \Psi_{35i} \\ \Psi_{14ij}^T & t_4 \mathbf{X}^T & \Psi_{34i}^T & \bar{\mathbf{Q}}_{22} & \bar{\mathbf{P}}_{23} \\ \Psi_{15ij}^T & \Psi_{25}^T & \Psi_{35i}^T & \bar{\mathbf{P}}_{23}^T & \Psi_{55} \end{bmatrix},$$

且

$$\Psi_{11ij} = \bar{\mathbf{P}}_{13} + \bar{\mathbf{P}}_{13}^T + \bar{\mathbf{Q}}_{11} + \tau \bar{\mathbf{H}}_{11} - \frac{1}{\tau} \bar{\mathbf{H}}_{22} - 2\bar{\mathbf{R}} - (\mathbf{A}_{li} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_j) - (\mathbf{X} \mathbf{A}_{li}^T + \mathbf{Y}_j^T \mathbf{B}_i^T),$$

$$\begin{aligned} \Psi_{12ij} &= \bar{P}_{11} + \bar{Q}_{12} + \tau \bar{H}_{12} + X - t_2(XA_{li}^T + Y_j^T B_i^T), \\ \Psi_{13ij} &= \bar{P}_{23}^T - \bar{P}_{13} + \frac{1}{\tau} \bar{H}_{22} - A_{2i} X^T - t_3(XA_{li}^T + Y_j^T B_i^T), \\ \Psi_{14ij} &= \bar{P}_{12} - t_4(XA_{li}^T + Y_j^T B_i^T), \\ \Psi_{15ij} &= \bar{P}_{33} - \frac{1}{\tau} \bar{H}_{12} + \frac{2}{\tau} \bar{R} - t_5(XA_{li}^T + Y_j^T B_i^T), \\ \Psi_{22} &= \bar{Q}_{22} + \tau \bar{H}_{22} + \frac{1}{2} \tau^2 \bar{R} + t_2 X + t_2 X^T, \\ \Psi_{23i} &= \bar{P}_{12} - t_2 A_{2i} X^T + t_3 X, \\ \Psi_{25} &= \bar{P}_{13} + t_5 X, \\ \Psi_{33i} &= -\bar{P}_{23}^T - \bar{P}_{23} - \bar{Q}_{11} - \frac{1}{\tau} \bar{H}_{22} - t_3 A_{2i} X^T - t_3 X A_{2i}^T, \\ \Psi_{34i} &= \bar{P}_{22} + \bar{Q}_{12} - t_4 X A_{2i}^T, \\ \Psi_{35i} &= -\bar{P}_{33} + \frac{1}{\tau} \bar{H}_{12} - t_5 X A_{2i}^T, \\ \Psi_{55} &= -\frac{1}{\tau} \bar{H}_{11} - \frac{2}{\tau^2} \bar{R}. \end{aligned}$$

由式(16)可知, 如果

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) m_j(\mathbf{x}(t)) \Psi_{ij} < 0, \quad (17)$$

那么  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ . 下面进一步处理(17), 由隶属度函数的性质, 对于任意矩阵  $A_i \in \mathbf{R}^{5n \times 5n} > 0$  有

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(w_j - m_j) A_i = 0,$$

上式结合式(17)有

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i m_j \Psi_{ij} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (w_j - m_j + \rho_j w_j - \rho_j w_j) \Psi_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (w_j - m_j + \rho_j w_j) \Psi_{ij} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (w_j - \rho_j w_j) \Psi_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (m_j - \rho_j w_j) \Psi_{ij} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (w_j - \rho_j w_j) \Psi_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (m_j - \rho_j w_j) (\Psi_{ij} - A_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (w_j - \rho_j w_j) A_i \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i^2 (\rho_i \Psi_{ii} - \rho_i A_i + A_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i (m_j - \rho_j w_j) (\Psi_{ij} - A_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} w_i w_j (\rho_j \Psi_{ij} + \rho_i \Psi_{ji} - \rho_j A_i - \rho_i A_j + A_i + A_j). \end{aligned}$$

由于对于所有的  $j$  和  $\mathbf{x}(t)$ , 有  $m_j(\mathbf{x}(t)) - \rho_j w_j(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ , 因此对于所有的  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , 如果式(13) ~ (15) 成立, 那么  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ , 因此模糊闭环控制系统(12) 是渐近稳定的, 并且其模糊控制器可以设计为

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^r m_j(\mathbf{x}(t)) Y_j X^{-T} \mathbf{x}(t).$$

**注 2** 定理 2 给出了保证闭环控制系统渐近稳定的模糊控制器的隶属度函数与被控制对象隶属度函数的关系. 区别于传统的 PDC 设计方法, 定理 2 给出的控制器设计方法放松了对控制器隶属度函数必须与模糊模型隶属度函数相同的限制, 即控制器的隶属度函数可以任意选取. 因此定理 2 不仅提高了控制器设计的灵活性, 而且避免了由于模糊模型的隶属度函数结构复杂而导致在使用传统设计方法时, 模糊控制器无法执行或很难执行的情况发生.

### 4 仿真实例

为了进一步验证本文方法的有效性, 本节列举了两个算例, 并与已有文献的结果进行对比, 证明了本文所提方法不但降低了稳定性的保守性, 而且提高了控制器设计的灵活性.

**例 1** 考虑如下 T-S 模糊时滞系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 w_i(\mathbf{x}(t)) (A_{1i} \mathbf{x}(t) + A_{2i} \mathbf{x}(t - \tau)),$$

隶属度函数如文献[15]

$$w_1(\mathbf{x}_1(t)) = \left( 1 - \frac{c(t) \sin(|\mathbf{x}_1(t)|^{-4})^5}{1 + \exp^{-100\mathbf{x}_1(t)^3(1-\mathbf{x}_1(t))}} \right) \frac{\cos(\mathbf{x}_1(t))^2}{1 + \exp^{-2.5\mathbf{x}_1(t)(3 + \frac{\mathbf{x}_1(t)}{0.42})}},$$

$$w_2(\mathbf{x}_1(t)) = 1 - w_1(\mathbf{x}_1(t)).$$

其中

$$\mathbf{x}_1(t) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$c(t) = \frac{\sin(\mathbf{x}_1(t)) + 1}{40} \in [-0.05, 0.05].$$

系统矩阵为

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -2.1 & 0.1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix}, & A_{21} &= \begin{bmatrix} -1.1 & 0.1 \\ -0.8 & -0.9 \end{bmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} -1.9 & 0 \\ -0.2 & -1.1 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1.1 & -1.2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

与已有文献的对比结果如表 1 所示. 由表可以看出, 本文中的定理 1 具有较小的保守性.

表 1 最大时滞上限比较

文献	得到的最大时滞上限
[5]	-
[9]	1.25
[12]	3.30
本文定理 1	3.84

例 2 考虑如下 T-S 模糊时滞系统(其中被控对象隶属度函数同例 1)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 w_i(A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t - \tau) + B_i u(t)). \tag{18}$$

系统矩阵同文献[11], 即

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = A_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, \\ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 - 1.5 * \beta \end{bmatrix}, \quad \beta = \frac{0.01}{\pi}, \\ B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由定理 2, 取  $\rho_1 = 0.85, \rho_2 = 0.95, t_2 = 1.5, t_3 = 0.2, t_4 = 0.1, t_5 = 0.1$ , 与文献[7]和[11]的方法进行比较, 结果见表 2.

表 2 最大时滞上限和反馈增益矩阵比较

文献	得到的最大时滞	反馈增益矩阵
[7]	1.725 0	$F_1 = [30.657 \ 1 \ 10.044 \ 2]$ $F_2 = [30.658 \ 9 \ 11.180 \ 3]$
[11]	8.024 5	$F_1 = [-21.813 \ 9 \ -55.059 \ 7]$ $F_2 = [-21.813 \ 9 \ -56.118 \ 3]$
本文定理 2	12.020 0	$F_1 = [-2.614 \ 6 \ -6.130 \ 0]$ $F_2 = [-2.539 \ 3 \ -7.519 \ 0]$

下面给出保证系统(18)稳定的状态反馈控制器, 相应于式(18), 状态反馈控制器表示如下:

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 m_j(x_1(t)) F_j x(t) \tag{19}$$

由例 1 可见  $w_1(x_1(t)), w_2(x_1(t))$  的结构非常复杂, 如果利用文献[5-8, 10-11]的方法, 会增加模糊控制器执行的难度. 然而由定理 2, 上述控制器的隶属度函数可以任意选取, 所以我们可以选取一些相对简单的易于实现的隶属度函数, 比如

$$m_1(x_1(t)) = 0.75 \exp \frac{(-x_1(t) - 0.38)^2}{2 \times 0.38^2} + 0.05,$$

$$m_2(x_1(t)) = 1 - m_1(x_1(t)),$$

并且满足  $m_j(x_1(t)) - \rho_j w_j(x_1(t)) > 0$ . 将表 2 中所得的控制增益及上述  $m_1(x_1(t))$  和  $m_2(x_1(t))$  代入式(19), 结合系统(18), 选取时滞  $\tau = 12$ , 初始条件  $\phi(t) = [3 \ -1]^T, t \in [-12 \ 0]^T$ . 图 1 和图 2 给出了仿真结果.

由例 2 中的表 2 可以看出, 本文的方法得到了比较小的反馈增益, 因此具有较小的保守性. 另外与文献[5-8, 10-11]中的控制器比较, 本文选取了比较简单的隶属度函数去代替被控对象所拥有的复杂的隶属度函数, 因此降低了控制器执

行的难度, 同时也提高了设计的灵活性.

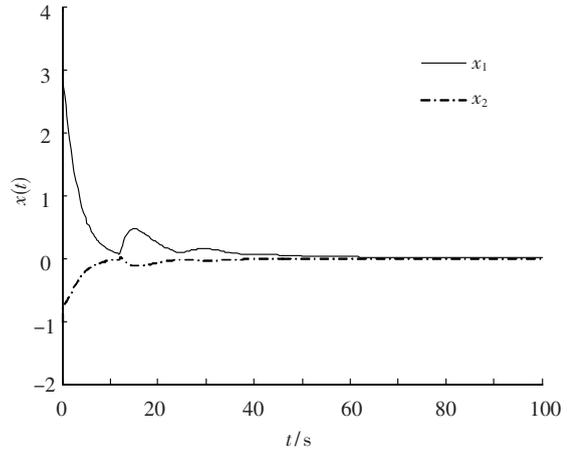


图 1 例 2 的状态响应曲线

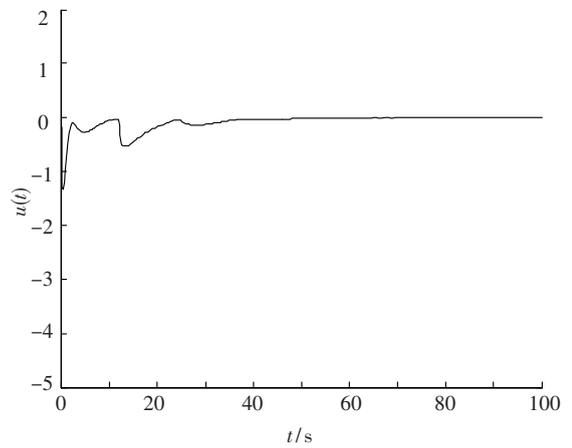


图 2 例 2 的控制输入曲线

注 3 如果假设  $w_1(x_1(t))$  中的函数  $c(t)$  是未知的, 此时利用文献[5-8, 10-11]的方法, 则无法设计出保证该闭环系统渐近稳定的模糊控制器, 而由本文定理 2, 可以选取与被控对象不同的且可实现的隶属度函数, 如例 2 中的  $m_1(x_1(t))$  和  $m_2(x_1(t))$ , 这样就避免了由于  $c(t)$  是未知而导致模糊控制器无法设计的问题. 由图 1 和图 2 可见, 当被控对象的隶属度函数不确定时, 由定理 2 所设计的模糊控制器同样可以保证该闭环系统是渐近稳定的. 因此本文所提出的模糊控制器设计方法同样也适用于具有不确定隶属度函数的模糊模型.

### 5 结 论

1) 本文首次提出在前提不匹配条件下研究具有常数时滞的 T-S 模糊系统的时滞相关镇定问题. 首次通过构造包含三重积分的增广的 Lyapunov 泛函方法, 同时引进带有自由权矩阵的参数模型变换, 利用积分不等式给出了具有较小保守性的时滞相关稳定性判定准则.

2) 给出了在前提不匹配条件下时滞相关的

控制器设计方法. 该方法不同于传统并行补偿控制器设计方法, 不仅降低了保守性, 而且大大提高了控制器设计的灵活性. 同时对于具有不确定隶属度函数的模糊模型, 本文所提出的控制器设计方法同样适用.

3) 数值实例进一步验证本文所提出的方法不仅降低了稳定性的保守性, 同时也提高了控制器设计的灵活性.

## 参考文献

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15 (1): 116-132.
- [2] BAN Xiaojun, GAO Xiaozhi, HUANG Xianlin, *et al.* Stability analysis of the simplest Takagi-Sugeno fuzzy control system using circle criterion [J]. Information Sciences, 2007, 177 (20): 4387-4409.
- [3] BAN Xiaojun, GAO Xiaozhi, HUANG Xianlin, *et al.* Stability analysis of the simplest Takagi-Sugeno fuzzy control system using popov criterion [J]. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2007, 3 (5): 1087-1096.
- [4] BAN Xiaojun, GAO Xiaozhi, HUANG XianLin.  $L_2$ -Stability analysis of proportional Takagi-Sugeno fuzzy controller based control systems [J]. Intelligent Automation and Soft Computing, 2010, 6 (1): 61-71.
- [5] CAO Yongyan, FRANK P M. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124 (2): 213-229.
- [6] 陈兵, 周玉成. T-S 模糊时滞模型的时滞相关稳定性分析和镇定 [J]. 控制与决策, 2004, 19 (9): 1022-1029.
- [7] LIN Chong, WANG Qingguo, LEE T H. Delay-dependent LMI conditions for stability and stabilization of T-S fuzzy systems with bounded time-delay [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(9): 1229-1247.
- [8] 苏亚坤, 陈兵, 张嗣瀛, 等. T-S 模糊时滞系统的时滞相关镇定 [J]. 控制与决策, 2009, 24 (6): 921-927.
- [9] GUAN Xinping, CHEN Cailian. Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time-delays [J]. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 2004, 12 (2): 236-249.
- [10] YONEYAMA J. Robust stability and stabilization for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy time-delay systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158 (2): 115-134.
- [11] TIAN Engang, PENG Chen. Delay-dependent stabilization analysis and synthesis of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157 (4): 544-559.
- [12] LIU Fang, WU Min, HE Yong, *et al.* New delay dependent stability criteria for T-S fuzzy systems with time-varying delay [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161 (5): 2033-2042.
- [13] SUN Jian, LIU Guoping, CHENG Jie. Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19 (12): 1364-1375.
- [14] LAM H K, LEUNG F H F. LMI-based stability and performance design of fuzzy control systems: Fuzzy models and controllers with different premises [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Vancouver, BC: [s.n.], 2006: 2027-2034.
- [15] LAM H K, NARIMANI M. Stability analysis and performance design for fuzzy-model-based control system under imperfect premise matching [J]. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 2009, 17 (4): 949-961.
- [16] ZHANG Zejian, HUANG Xianlin, BAN Xiaojun. New LMIs-based stability conditions for fuzzy time-delay control systems [C]// Proceedings of IEEE International on Computational Sciences and Optimization. Lijiang: [s. n.], 2011: 939-942.

(编辑 张宏)