

人字齿轮齿向修形优化设计

蒋进科, 方宗德, 卞翔

(西北工业大学 机电学院, 710072 西安)

摘要: 考虑到安装误差、轴弯曲变形及扭转变形对齿面载荷分布的影响, 根据人字齿轮传动的特点, 提出小轮轴向浮动安装的齿面修形优化设计方法; 通过3次B样条将齿向修形曲线拟合为三维修形曲面, 并与理论齿面叠加构造修形齿面, 建立轴向串动的齿面接触分析(TCA)模型, 结合承载接触分析(LTCA)模型对有轴向串动的人字齿轮传动进行仿真, 轴向串动保证了两端齿面各承担一半的扭矩, 人字齿轮的修形可认为是一个斜齿轮的修形, 即只考虑一端修形, 另一端修形则与之对称; 以齿面载荷密度最小为优化目标, 应用遗传算法确定最佳修形齿面. 算例表明: 轴向串动是左右齿面间隙相互补偿的过程, 串动后两边齿面载荷分布基本相同, 修形后两端齿面载荷达到均匀; 人字齿轮齿向修形与轴向串动相互补充, 保证了齿面载荷整体上均匀.

关键词: 人字齿轮; 接触分析; 承载接触分析; 齿向修形; 轴向位移; 修形曲面; 优化

中图分类号: TH132 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2013)11-0086-07

Optimal design of longitudinal correction of double helical gear

JIANG Jinke, FANG Zongde, BIAN Xiang

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China)

Abstract: Considering the effect of installation error, bending deflection and torsional deformation on load distribution, as well as drive feature of the gears, an approach based on the load sharing of modified double helical gears with the pinion axial float was proposed in which the modified tooth surfaces were represented by a sum of two vector functions that determine the theoretical tooth surface and the deviations surface fitted by 3 B-spline based on tooth surface mesh data from the longitudinal curves, and a TCA model including axial displacement and LTCA model was built. Besides, axial move process showed that the left and right tooth surface bore the same torques, so the modification was thought as a helical gear modification, and only one side tooth was considered and the other side was the same. In addition, minimum load density was used to evaluate load sharing, and genetic algorithm was used to optimize the parameter of curve. The results show that the axial motion process is about the tooth gap mutual compensation process which makes both of the tooth load distribution same and uniform, in short, when considering modification and axial motion, the loads tend to be uniform totally.

Key words: double helical gear; tooth contact analysis; loaded tooth contact analysis; longitudinal correction; axial displacement; deviations surface; optimization

人字齿轮由两个螺旋角相同旋向相反的斜齿轮组成, 除了具有斜齿轮的特点外, 还能够自相平衡传动过程中产生的轴向力, 从而可以采用大的螺

旋角和大的齿宽, 因此具有承载能力高, 工作平稳性好等优点^[1], 在航空航海动力传动装置中被广泛应用. 由于制造和安装误差的存在, 两对斜齿轮传动时左右不完全对称, 造成两端传递的扭矩不相等; 其次由于齿宽较大, 受轴扭转变形影响明显, 也使两端传递的扭矩不等, 这是引起齿面偏载现象的两个重要原因, 故人字齿轮传动中小轮一般采用轴向浮动安装, 通过轴向位置自动微调实现两端传递

收稿日期: 2012-10-11.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51175423).

作者简介: 蒋进科(1981—), 男, 博士研究生;

方宗德(1948—), 男, 教授, 博士研究生导师.

通信作者: 蒋进科, jjk06@126.com.

的扭矩相等. 目前, 对于人字齿轮的研究中, 忽略了其影响, 认为左右两端斜齿轮副产生的轴向推力可以相互抵消^[2]. 文献^[3-4]对人字齿轮齿廓修形及均载特性做了介绍, 但未涉及到齿向修形理论. 随着齿轮接触分析 Tooth Contact Analysis (TCA) 技术普遍应用于各种齿轮^[5-8], 齿轮承载接触分析^[9-12] Loaded Tooth Contact Analysis (LTCA) 技术也日益完善, 为齿轮修形技术的深入分析提供了重要工具. 齿向修形的主要目的就是使相互啮合的轮齿不发生端啮现象, 使接触点控制在齿长的中部, 最大限度的减少单位齿长上的载荷. 在传统的齿向修形方法中包括齿端修薄、齿向修鼓和螺旋角修形且对修形量修形长度有相应的计算公式, 但未能提供精确的齿面几何状况, 修形后的齿轮受瞬时接触椭圆长轴上齿面微观几何因素影响, 沿接触线的载荷变化趋势必然不同, 因此传统的齿向修形方法已不能满足航空航海等重要应用场合高精度齿轮传动的设计要求.

本文针对齿向载荷不均产生机理, 以一对人字齿轮副为例, 大轮为理论齿面 (无修形), 小轮为修形齿面, 考虑了人字齿轮传动特性, 建立了小轮有轴向窜动的 TCA 模型, 结合 LTCA 以载荷密度最小为优化目标, 通过优化获得最佳修形齿面.

1 变形分析与修形齿面设计

1.1 轴弯曲变形引起的安装误差

当轴承不对称配置时, 承载后由于轴的弯曲变形, 造成齿对沿齿宽方向一端接触, 另一端产生间隙. 除此之外, 安装误差、轴承及箱体变形等原因都会导致同样结果. 沿齿向啮合接触的不均匀, 造成轮齿偏一端接触, 影响齿轮的正常啮合, 造成了齿面偏载. 如图 1(a) 所示, 弯曲变形引起轴交角误差及中心距的增大, 计算如下

$$\begin{cases} \lambda_k = \frac{P_r b}{6G I_k l} (l^2 - b^2 - 3a^2), \\ \delta_k = \frac{P_r b a}{6G I_k l} (l^2 - b^2 - 3a^2). \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \\ E' = \delta_1 \cos \lambda_1 + \delta_2 \cos \lambda_2. \end{cases} \quad (2)$$

式中: P_r 为径向力大小; $G I_k$ 为圆轴抗弯刚度; λ_k , δ_k 为轴挠度及转角; λ , E' 为弯曲变形引起的轴交角及中心距安装误差; 下标 '1'、'2' 分别代表小轮及大轮.

假设轴交角、中心距安装误差均为平稳随机数, 且服从 $\gamma \sim N(0.5\lambda_{\max}, (0.1\lambda_{\max})^2)$ 、 $\Delta E \sim N(0.5\Delta E', (0.1\Delta E')^2)$ 的正态分布, 取可信度为 0.95, 将其与弯

曲变形引起的安装误差叠加得到综合安装误差为

$$\begin{cases} \gamma = (\lambda + 0.696\lambda_{\max}), \\ E = 1.196E'. \end{cases} \quad (3)$$

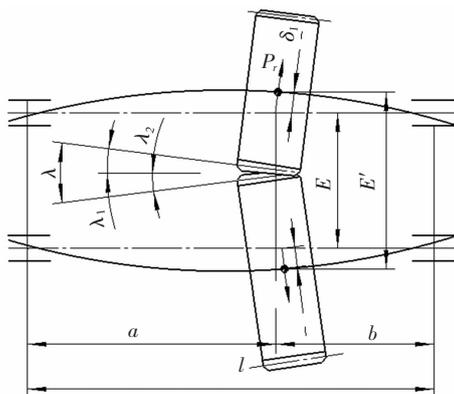
式中: λ_{\max} 为按精度查询的最大轴交角安装误差.

1.2 轴扭转变形引起的附加柔度

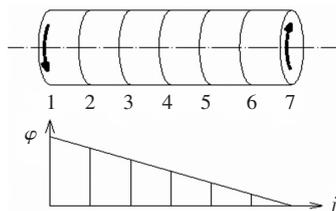
采用的 LTCA 方法是一种基于齿面柔度矩阵的规划方法^[13], 齿面在接触载荷下的变形特性, 被容纳于柔度矩阵中. 为考虑扭转变形的影响, 齿轮系统的柔度矩阵应包括两部分, 一部分是齿面作用单位法向载荷时产生的法向柔度矩阵, 另一部分为扭转变形而产生的附加柔度矩阵. 由于被动轮直径大, 抗扭截面模量大, 且采用腹板形式较多, 扭转变形影响很小, 因此, 只考虑小齿轮扭转的附加柔度. 利用一维有限元方法计算扭转变形, 将齿轮沿轴向分为与齿面网格相对应的 n 段, 并设置 $n + 1$ 个结点, 如图 1(b) 所示 (沿轴向将齿轮分 6 段), 从右端输入扭矩, 分别在点 $i (i \leq j)$ 施加单位法向载荷时, 点 j 相对右端面的扭转角为 ϕ_{ij} , 计算轴扭转变形产生的附加柔度系数 f'_{ij} , 并与齿面网格法向柔度矩阵 f_{ij}^0 叠加, 得到齿轮系统的齿面法向柔度矩阵

$$\begin{cases} F = f_{ij}^0 + f'_{ij}, \\ f'_{ij} = r_b \phi_{ij}, \\ \phi_{ij} = T l_{ij} / G I_p. \end{cases} \quad (4)$$

式中: r_b 为基圆半径; ϕ_{ij} 为轴的扭转角; f_{ij} 为齿面网格节点 i 施加单位法向载荷时, j 点产生的法向柔度系数; $G I_p$ 为圆轴抗扭刚度; T 为负载扭矩.



(a) 轴弯曲变形



(b) 轴扭转变形

图 1 轴弯曲与扭转变形

1.3 人字齿轮修形曲面设计

通过轴向窜动保证两端齿面承受的扭矩相同,因此人字齿轮修形可以视为一半扭矩、一端齿面下的斜齿轮修形,另一半修形曲线则相同。

考虑到轴弯曲变形、轴承及箱体变形与安装误差引起偏载机理相同,又因安装误差方向的随机性,因此可采用齿端修薄或齿向修鼓,实际的修形齿面磨合后为光滑齿面,对于航空、航海的高精度宽齿轮,通常进行齿端修薄,因此本文设计如图 2(a) 所示 3 参数 2 段抛物线与 1 段直线表示的修形曲线,通过改变参数可以表示为齿端修薄与齿向修鼓曲线. 轴扭转变形引起齿面偏载时,应进行螺旋角修形,齿向为线性修形,为了便于加工设计如图 2(b) 所示修形曲线。

为了便于测量和确定修形齿面,修形曲面用旋转投影面数据 $\delta(x,y)$ 表示,将齿面的旋转投影面分别沿齿高、齿长方向均匀划分为 $m \times n$ 个网格点阵,通过修形曲线计算网格节点上的修形量 $\delta_{ij}'(x,y)$ (其中 $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$),采用双三次 B 样条对齿面网格节点 $m \times n$ 个修形量进行拟合,得到光滑的修形曲面,样条曲面拟合算法见文献^[14]。

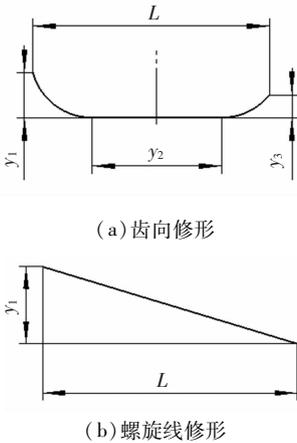


图 2 齿向修形曲线

图 2 中 y_1, y_3 为两端最大修形量, y_2 为未修形区长度(齿向修形); L 为旋转投影面上齿长。

1.4 修形齿面表达

修形齿轮的齿面不同于理论齿面,直接拟合 3 坐标测量的齿面数据往往很难达到高精度要求,为此作者采用理论齿面与修形曲面(法向偏差曲面)的叠加构造修形齿面,其位矢和法矢表示如下:

$$R_{1r}(u_1, l_1) = \delta(u_1, l_1)n_1(u_1, l_1) + R_1(u_1, l_1). \quad (5)$$

$$N_{1r} = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \delta}{\partial u_1} n_1 + \frac{\partial n_1(u_1, l_1)}{\partial u_1} \delta \right) \times \left(\frac{\partial R_1}{\partial l_1} + \frac{\partial \delta}{\partial l_1} n_1 + \frac{\partial n_1(u_1, l_1)}{\partial l_1} \delta \right). \quad (6)$$

式中 R_1, n_1 为小轮理论齿面位矢、法矢; R_{1r}, N_{1r} 为小轮修形齿面位矢、法矢; δ 为修形量 u_1, l_1 为分别为理论齿面参数。

求解修形齿面法矢时用到修形曲面沿齿面参数方向切矢,计算过程如下:

$$\frac{\partial \delta(u_1, l_1)}{\partial u_1} = \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u_1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \delta(u_1, l_1)}{\partial l_1} = \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l_1}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \\ y = R_z. \end{cases} \quad (9)$$

式中 R_x, R_y, R_z 为理论齿面位矢坐标分量。

2 人字齿轮齿面载荷特性分析

2.1 考虑轴向窜动的人字齿轮接触分析

人字齿轮啮合坐标系如图 3 所示,该齿对由 I 和 II 两对斜齿轮对组成. 根据斜齿轮接触分析的求解方法,分别将斜齿对 I 和 II 从啮合坐标系转化到参考坐标系进行轮齿接触分析,从而获得人字齿轮接触分析. 齿面接触分析求解在文献^[15]中有详细介绍. 为了便于分析,各坐标系按如下定义:

S_f 为固定坐标系,原点在大轮齿槽中点; S_{h1}, S_{k1} 为小轮齿对 I 和 II 无窜动参考坐标系,原点过斜齿轮齿宽中点与回转中心重合,平行于 S_f ; S'_{h1}, S'_{k1} 为小轮的啮合坐标系(有轴向窜动),分别相对 S_{h1}, S_{k1} 沿回转轴移动,移动量为 ε 根据齿对 I 和 II 通轴向力调节; S_{h2}, S_{k2} 为考虑安装误差建立的辅助坐标系,分别与 S_{h1}, S_{k1} 平行; S'_{h2}, S'_{k2} 为大轮齿对啮合坐标系, Z'_{h1}, Z'_{k1} 与大轮回转轴重合; γ_1, γ_2 为大轮垂直、水平轴交角安装误差; $E, \Delta E$ 为中心距及误差。

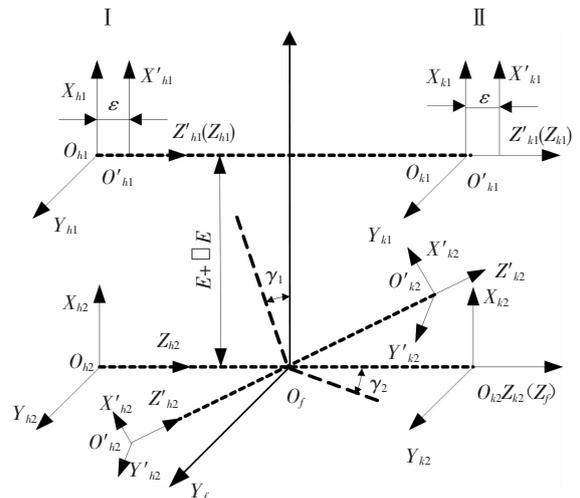


图 3 人字齿轮啮合的坐标系

2.2 人字齿轮承载接触分析

齿轮 LTCA 将 TCA 与有限元法结合起来, 在齿面的几何分析基础上, 将齿轮副受力接触转化为求解齿面有限个离散接触点的力学平衡问题, 通过改进的正规形方法求解非线性方程组得到加载后接触线上离散点的载荷和综合变形大小, 人字齿轮承载接触分析数学模型文献^[16]中有详细叙述. 齿对在某一接触位置的载荷分配系数如下所示:

$$L_{shk} = \frac{\sum_{j=1}^n P_{jk}}{P} \quad (k = I \cdots IV) . \quad (10)$$

左、右啮合齿对所产生的轴向推力 F_z 为

$$F_z = \sum_{k=I}^{II} \sum_{j=1}^n p_{jk} \cos \alpha_{jk} - \sum_{k=III}^{IV} \sum_{j=1}^n p_{jk} \cos \alpha_{jk} . \quad (11)$$

式中: $\cos \alpha_{jk}$ 为法向载荷与轴向的夹角, 通过 TCA 计算得到; p_{jk} 为瞬时接触椭圆长轴上的离散点载荷.

3 人字齿轮齿向修形优化设计

3.1 优化模型

啮合过程中, 由于瞬时接触齿对左、右齿面总载荷始终保持不变, 因此保证齿面最大载荷密度或最大载荷分配系数最小, 齿面载荷自然会均匀. 有关鼓形量的确定, 方法不统一, 数值大小也不相同, 作者通过给定修形曲线参数的边界^[17], 修形量与修形长度通过优化确定, 优化模型如下:

$$\begin{cases} F(y_i) = \min \{ \max \{ p \} / \max \{ p_0 \} \}; \\ Q_{\min} \leq y_1, y_3 \leq Q_{\max} \text{ (齿向修形)}; \\ l_{\min} \leq y_2 \leq l_{\max} \text{ (齿向修形)}; \\ |y_1 - y_3| \leq Q_y \text{ (齿向修形)}; \\ Q_{\min} \leq y_1 \leq Q_{\max} \text{ (螺旋线修形)}. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} Q_{\min} = 0.005, Q_{\max} = Z_{\max} + 0.005 \text{ (齿向修形)}; \\ l_{\min} = 0.3B, l_{\max} = B \text{ (齿向修形)}; \\ Q_{\min} = 0.001, Q_{\max} = Z_{\max} + 0.005 \text{ (螺旋线修形)} \end{cases} \quad (13)$$

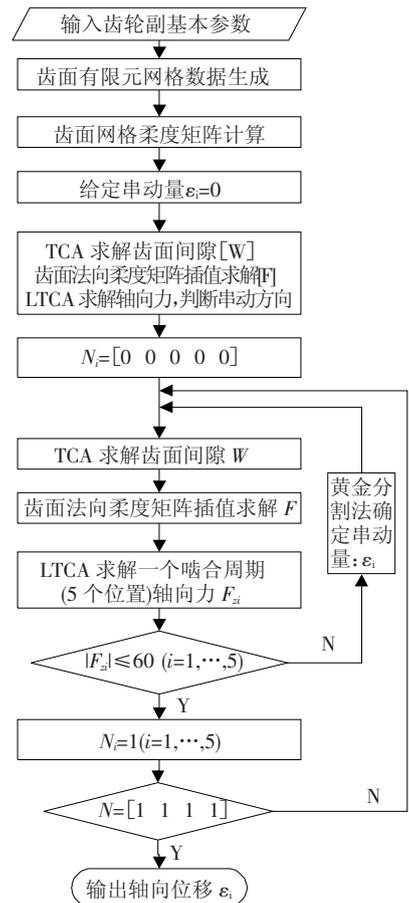
式中: y_i 为优化变量见图 2; Q_{\min}, Q_{\max} 为修形量范围; l_{\min}, l_{\max} 为修形长度范围; Q_y 为约束两端修形量的常数; p_0, p 分别为无修形与修形后的载荷密度; Z_{\max} 为综合变形量, 通过 LTCA 得到.

3.2 优化过程

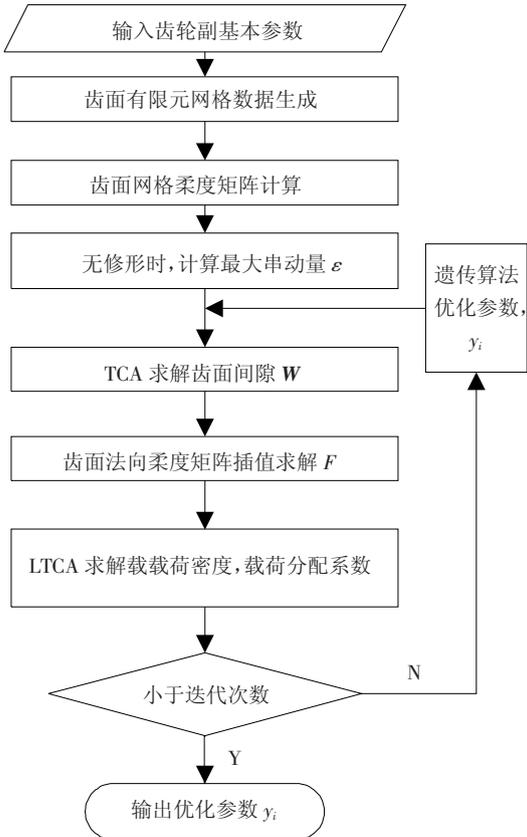
齿面优化是一个非线性接触问题求解, 即通过改变齿面接触状态, 求解 TCA、LTCA 的一个迭

代过程. 优化变量为齿轮副修形曲线参数; 优化目标函数为齿轮副 LTCA 求解结果, 两者之间没有直接联系, 在实际中不能建立由优化变量到目标函数的解析表达式, 而且在优化空间内存在多个局部最优解, 因此传统的算法在此并不适用. 遗传算^[18]法是模拟生物在自然环境中的遗传和进化过程而形成的一种自适应全局优化概率搜索算法, 通过对种群的繁衍和优化, 将问题的最优解收敛到一群最适应环境的个体上, 为复杂系统的优化提供了一种方法. 标准的遗传算法包括编码、初始种群生成、适应度评估和检测、选择、交叉和变异这里不做详细介绍. 上述设计变量均为连续变量, 编码是通过随机函数产生给定范围内数据, 这样在初始种群中容易产生多余码, 因此需要将每次编码数据与前一个编码作比较, 将满足精度与约束的作为有效编码. 通过设定循环次数作为终止优化迭代条件.

齿向优化是在小轮轴向窜动下的优化, 通过最少的迭代算法求解一个啮合周期的窜动量变化 (见图 4(a)), 通过遗传算优化 (见图 4(b)) 齿面载荷.



(a) 一个啮合周期轴向窜动量计算过程



(b) 齿面载荷的修形优化过程

图4 人字齿轮轴向力计算与齿向修形优化设计流程

4 算例与分析

以表1标准安装齿轮副为例,额定扭矩2000 Nm,遗传算法迭代次数共计60,按国标规定的6级精度圆柱齿轮,考虑轴弯曲变形和安装误差的综合安装误差为: $\gamma = 12''$, $\Delta E = 0.008$ mm.表2为考虑综合安装误差,小轮轴向浮动时,一个啮合周期(均匀分为5等份)的轴向力变化.表3为齿向抛物线修形、螺旋线修形优化结果.图5为有安装误差时,轴向窜动过程中几何传动误差的变化,随轴向窜动量的微调,左齿面(见 a_1)与右齿面(见 a_2)的几何传动误差逐渐接近,可见轴向窜动是左、右齿面间隙相互补偿过程.图6中当小轮固定安装,无修形时,正安装误差下左齿面(见 a_1)与右齿面(见 a_2)载荷分布不等且向一端集中,负安装误差时齿面载荷分布(见 b_1, b_2),修形后偏载现象有所改善,但是两端载荷仍然相差较大(见 c_1, c_2);当小轮浮动安装,无修形、窜动后,虽然两端承担扭矩为总扭矩一半,但左右齿面仍存在偏载现象(见 d_1, d_2),齿向修形后,载荷向中部集中,两端齿面载荷整体上呈现均匀(见 e_1, e_2).图7为考虑轴扭转的齿面载荷分布状况:当小轮固定安装、动力从左端输入时,整个齿面从左端至

右端载荷依次降低,受齿槽宽度影响,左齿面(见 a_1)较右齿面承担较多载荷(见 a_2),动力从右端输入时,齿面载荷分布(见 b_1, b_2)与左端输入相反;螺旋线修形、无轴向传动时,左、右齿面从左端至右端载荷基本相等,受齿槽宽度影响,左齿面(见 c_1)较右齿面(见 c_2)仍承担较多载荷,但是修形后(见 c_1, c_2)与未修形(见 a_1, a_2)相比齿面载荷密度降低,有了轴向窜动后,左、右齿面载荷基本相等,且左齿面(见 d_1)与右齿面(见 d_2)承担载荷也相等,修形且有窜动(见 d_1, d_2)与无修形且无窜动(见 a_1, a_2)相比,齿面载荷密度降低显著;综上所述,小轮浮动安装时,齿向修形与螺旋线修形保证了齿面载荷整体上趋于均匀.

表1 人字齿轮轮副参数

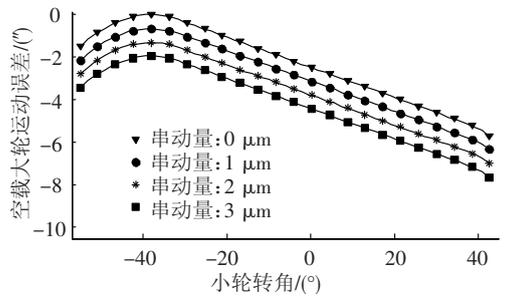
齿数	模数/mm	压角/(°)	螺旋角/(°)	齿宽/mm	齿槽宽/mm
17/44	6	20	24.43	146×2	60

表2 人字齿轮轴向窜动前后轴向力($\gamma = 12''$, $\Delta E = 8 \mu\text{m}$)

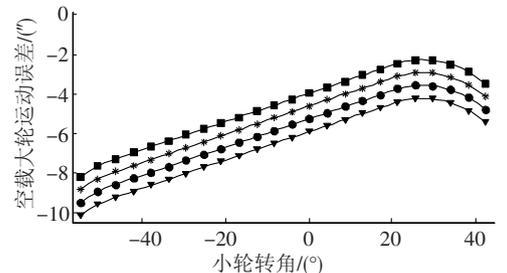
位置	轴向力/N			轴向力(窜动后)/N			窜动量/ μm
	左	右	差	左	右	差	
1	5 425	841	4 584	3 139	3 127	12	3.24
2	5 369	897	4 472	3 124	3 142	-18	3.19
3	5 361	905	4 456	3 131	3 135	-4	3.14
4	5 381	885	4 496	3 151	3 115	36	3.24
5	5 378	888	4 490	3 120	3 146	-26	3.19

表3 小轮修形曲线参数优化结果

参数	齿向抛物线修形	齿向直线修形(螺旋线修形)
$\gamma_1 / \mu\text{m}$	12	2.7
γ_2 / mm	70	—
$\gamma_3 / \mu\text{m}$	12	—



(a) 左齿面几何传动误差



(b) 右齿面几何传动误差

图5 不同窜动量下的几何传动误差($\gamma = 12''$, $\Delta E = 8 \mu\text{m}$)

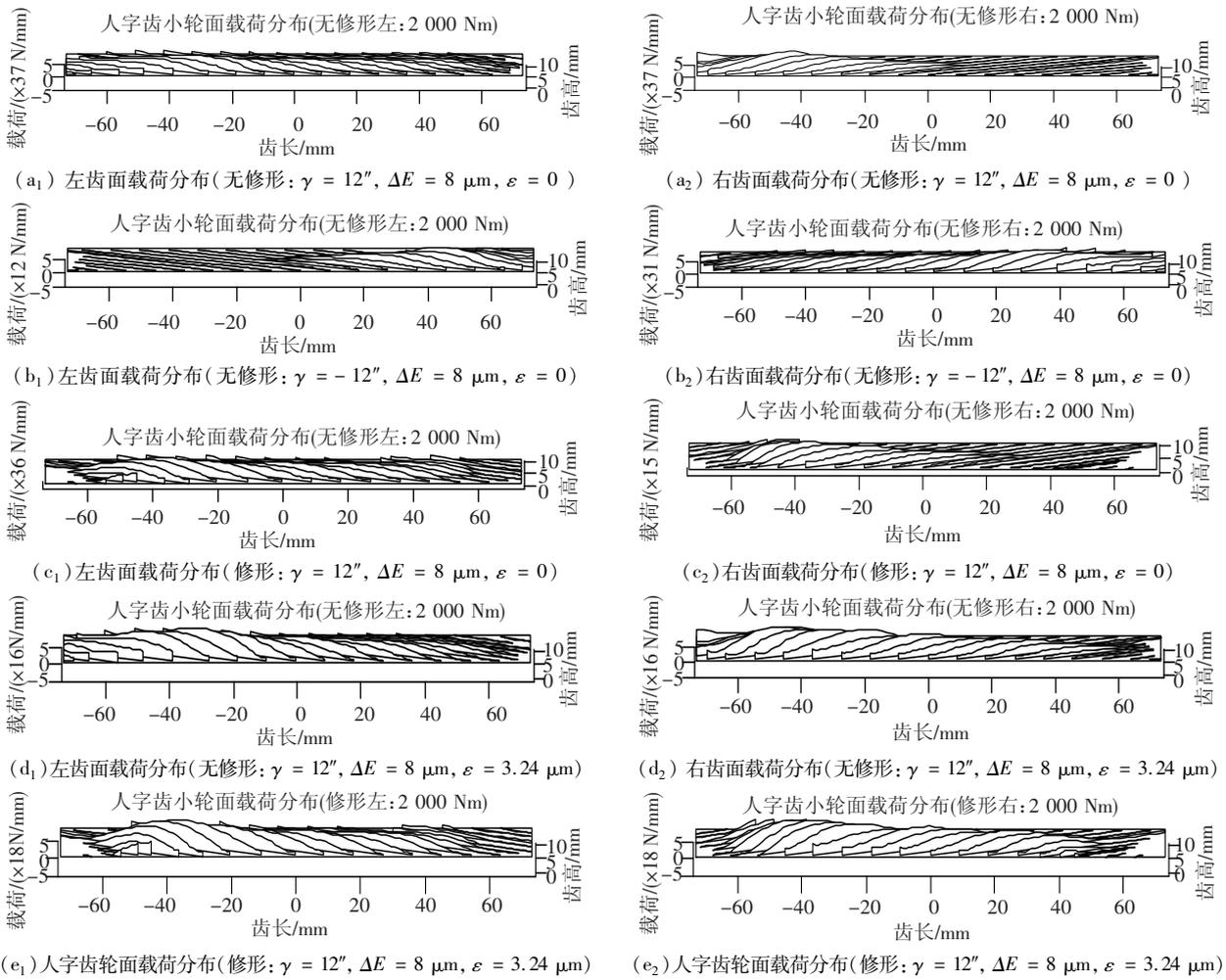


图 6 考虑安装误差的人字齿轮齿面载荷分布

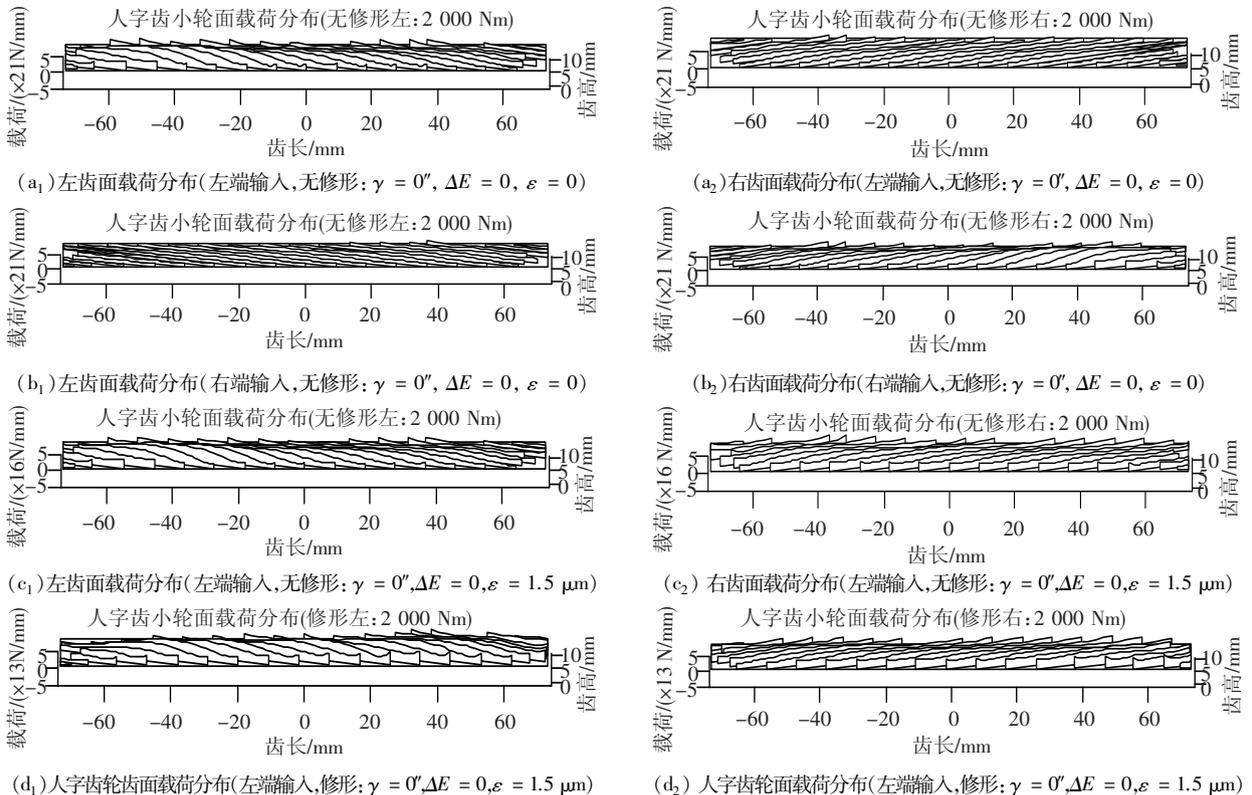


图 7 考虑轴扭转变形的人字齿轮齿面载荷分布

5 结 论

1) 通过理论齿面与修形曲面(法向)叠加设计修形齿面,建立了小轮有轴向窜动的人字齿轮TCA模型,分析了轴向窜动过程,轴向窜动是左右齿面间隙相互补偿的过程,保证了两端齿面承受的扭矩相同,因此人字齿轮修形可视为一半扭矩、一端齿面下的斜齿轮修形,另一半与之对称,简化了人字齿轮修形。

2) 轴弯曲变形与安装误差引起齿面载荷向一端集中,考虑到安装误差的随机性,齿向需要修形;当小轮轴向固定安装,修形齿面载荷向中部集中,齿面最大载荷密度降低,但左右齿面载荷相差较大;小轮轴向浮动安装时,有了轴向窜动,修形后左右齿面的载荷趋于相等;轴向窜动过程中,左右齿面几何传动误差反映了齿面间隙相互补偿过程。

3) 轴扭转变形引起的齿面载荷整体上从动力输入端至输出端逐渐降低,齿槽越宽,左右齿面载荷相差越大;小轮轴向固定安装时,螺旋线修形后齿面的载荷密度降低,但是左右齿面载荷仍不相同;小轮浮动安装时,有了轴向窜动后,螺旋线修形使得左右齿面的载荷趋于相等,载荷密度明显降低。

4) 单独考虑轴扭转变形与弯曲变形、安装误差引起的载荷不均时,二者采用修形方式不同;实际上应同时考虑扭转、弯曲、安装误差等影响,修形曲线应为二者叠加。

5) 人字齿轮轴向窜动与齿向修形相互补充,保证了齿面载荷整体上的均匀性。本文的研究为人字齿轮修形优化设计提供了新的方法。

文中齿向采用了4次抛物线修形,通过TCA、LTCA的迭代计算获得最佳修形曲线,其中修形曲线次数也可为更高次或更低次,具体修形效果与齿轮副参数、工况有关,不可一概而论。如何在有限的迭代次数(约为50次)内找出全局最优值,是提高程序计算效率的关键,还有待进一步的对优化算法进行研究。

参考文献

[1] 王成,方宗德,张墨林等. 人字齿轮传动的动态特性分析[J]. 哈尔滨工业大学学报. 2011, 43(7): 122-126.

[2] 胡社来. 大型船用二级人字齿轮传动有限元分[D]. 武汉:武汉理工大学, 2005:24-44.

[3] 王成,方宗德,贾海涛等. 人字齿轮修形优化设计[J],航空动力学报. 2009, 24(6):1433-1436.

[4] 王成,方宗德,贾海涛. 人字齿轮均载特性的理论分析与试验研究[J]. 兵工学报, 2011, 32(1): 75-77.

[5] LITVIN F L, FUENTES A, HAYASAKA K. Design, manufacture, stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(1): 83-118.

[6] LITVIN F L. Design generation and stress analysis of face gear drive with helical pinion [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(36-38): 3870-3901.

[7] LITVIN F L. Modified involute helical gears computerized design, simulation of meshing and stress analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(33-34):3619-3655.

[8] LITVIN F L, QI Fan. Computerized generation and simulation of meshing of modified spur and helical gears manufactured by shaving [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(39): 5037-5055.

[9] 方宗德. 修形斜齿轮的轮齿接触分析[J]. 航空动力学报, 1997, 12(3): 247-250.

[10] 方宗德. 修形斜齿轮承载接触分析[J]. 航空动力学报, 1997, 12(3):251-254.

[11] 方宗德,沈允文. 斜齿轮三维修形的优化设计[J]. 机械工程学报, 1992, 28(6):57-60.

[12] 方宗德,杨宏斌,邓效忠. 弧齿锥齿轮齿面优化修正及计算机仿真[J]. 航空动力学报, 2002, 17(1): 140-143.

[13] 方宗德. 斜齿轮齿面柔度矩阵与修形的有限元计算[J]. 航空动力学报, 1994, 9(3):242-244.

[14] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京:科学出版社, 2000: 113-136.

[15] 李特文, 齿轮几何学与应用理论[M]. 上海:科学出版社, 2008: 260-282.

[16] 王成,方宗德,谷建功等. 人字齿轮承载接触分析与试验研究[J]. 航空动力学报, 2010, 25(3): 718-722.

[17] 詹东安,王树人,唐树为. 高速齿轮齿部修形技术研究[J]. 机械设计, 2000, 8(8): 8-10.

[18] 李敏强,寇纪淞,林丹. 遗传算法的基本理论与应用[M]. 北京:科学出版社, 2002: 22-66.

(编辑 苗秀芝)