## 含摩擦的双电机伺服系统快速终端滑模控制

## 赵 威,任雪梅

(北京理工大学自动化学院,100081北京)

摘 要:针对含 LuGre 稳态摩擦力的双电机伺服系统,通过引入含速度项的指数函数,提出一种连续可微的 LuGre 稳态 摩擦模型,解决了原有模型不可微的缺点,该模型能够有效刻画 Stribeck 现象、库伦摩擦、粘滞摩擦等多种摩擦特征;为 了进一步解决系统的同步和跟踪问题,基于该连续可微摩擦模型,引入表征同步率的可变系数设计了可变系数的快速终 端滑模控制器,并运用 Lyapunov 方法证明了在给定控制律下,系统能够实现先同步控制后跟踪控制.仿真结果表明提出 的控制方法具有快速收敛速度和高跟踪精度.

关键词:双电机伺服系统;快速终端滑模;连续 LuGre 摩擦模型;跟踪控制;同步控制 中图分类号:TP13 文献标志码:A 文章编号:0367-6234(2014)03-0119-05

## The fast terminal sliding mode control of dual-motor driving servo systems with friction

ZHAO Wei, REN Xuemei

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, 100081 Beijing, China)

**Abstract**: To solve the non-differentiable problem of original frictionmodel, an exponential function containing speed variables is introduced to design the continuous differentiable LuGre steady-state friction model for dualmotor driving servo systems. The proposed model captures the main characteristics of friction including Stribeck effect, coulomb and viscous friction. Based on the continuous differentiable model, a nonlinear variable coefficient characterizing the synchronization rate is used for fast terminal sliding mode, such that the system is proved to achieve synchronization and tracking control for the reference signal with prescribed performance by Lyapunov function. The simulations are included to verify fast convergence speed and high tracking precision of the proposed algorithm.

**Keywords**: dual-motor driving servo systems; fast terminal sliding mode; continuous LuGre friction model; tracking control; synchronization control

随着控制精度要求以及控制过程复杂性的提高,多电机系统控制算法的设计日益复杂.由于存在摩擦等非线性因素的影响,如何设计控制器保证电机的高精度跟踪和同步控制已经成为一个热点问题.

摩擦是伺服系统中普遍存在的一种非线性现象,它对系统产生许多负面影响,影响了闭环系统的性能,尤其在低速运行时更明显.由于 LuGre 模型能够很好地描述复杂摩擦现象,许多学者致力于 LuGre 摩擦的建模和补偿控制研究.Muvengei 等<sup>[1]</sup>和 Wang 等<sup>[2]</sup>分别研究 LuGre 摩擦模型的建模以及参数识别方法.在摩擦补偿方面,文献[3-4]提出了基于观测器的摩擦补偿算法,并证实了观测器可以消除摩擦的影响并能有效改善控制精度.向红标等<sup>[5]</sup>采用基于 LuGre 模型的 Backstepping 方法设计自适应摩擦补偿控制器.本文在此基础上,提出一种连续可微的摩擦模型代替 LuGre 稳态摩

收稿日期:2013-10-23.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61273150、60974046); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目 (20121101110029);长江学者和创新团队发展计划资 助项目(IRT12 08).

作者简介:赵 威(1986—),男,博士研究生; 任雪梅(1967—),女,教授,博士生导师.

通信作者:任雪梅,xmren@bit.edu.cn.

擦,来解决原模型不可微的缺点.

此外,由于控制精度要求的不断提高,电机的 快速高精度控制也成为许多学者关注的热点. Wang 等<sup>[6]</sup>设计了基于零相位误差跟踪控制器, 提高电机系统的鲁棒性能以及频率响应性能.Liu 等<sup>[7]</sup>基于误差反向传播神经网络提出主动扰动 抑制控制算法,提高了系统性能.Zhang 等<sup>[8]</sup>提出 一种方法实现多个电机速度同步并保证电机同步 速度在一个可控的范围.文献[9-10]分别将 H<sub>2</sub> 理论以及 BP 神经网络与滑模控制方法结合设计 控制器,从而保证快速跟踪性.以上文献只单独考 虑跟踪或同步问题,而这两个问题同等重要.因 此,本文设计可变系数的快速终端滑模控制器,来 达到先同步后跟踪的控制目的.

考虑含有 LuGre 稳态摩擦的双电机伺服系统,提出连续可微 LuGre 稳态摩擦模型,并考虑滑模控制高精度和鲁棒性的特点,在原有滑模控制基础上引入表征同步率的可变系数,提出了一种基于可变系数的快速终端滑模控制策略,从而达到快速同步和高精确跟踪的控制目的.

1 模型构建

考虑双电机伺服系统模型如下:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_{i} + f_{i}(\dot{\theta}_{i}) = u_{i}(t) - \tau_{i}(t) - (-1)^{i}\omega ,\\ J_{m}\ddot{\theta}_{m} + f_{m}(\dot{\theta}_{m}) = \sum_{i=1}^{2}\tau_{i}(t). \end{cases}$$
(1)

式中: $\theta_i(i=1,2)$ 和 $\theta_m$ 分别表示电机和负载的转 角; $\theta_i(i=1,2)$ 和 $\theta_m$ 分别表示电机和负载的转速; J表示电机的转动惯量; $J_m$ 表示负载的转动惯量;  $u_i$ 是系统输入转矩; $\omega$ 是偏置力矩; $\tau_i$ 代表电机和 负载之间传输力矩; $f_i$ 和 $f_m$ 分别表示与电机转速 和负载转速有关的LuGre 稳态摩擦力矩.

为了解决原有 LuGre 稳态摩擦模型不连续且 不可微缺点对控制器设计造成的不便,用连续可 微函数式(2)代替原有摩擦项:

 $F(v) = \underbrace{\Lambda F_c}_{A} + \underbrace{\Lambda(F_s - F_c) e^{-(v/v_c)^2}}_{B} + \underbrace{F_v v}_{C} . (2)$ 式中: v代表转速,  $\Lambda = 2/(1 + e^{-\gamma v}) - 1, \gamma > 0, 且$  $\gamma$ 的大小影响到 F(v) 与 LuGre 稳态摩擦模型间 的拟合误差,  $\gamma$  的取值越大, 拟合精度就越高, 如 图 1 所示, 该连续可微模型能够有效刻画库伦摩 擦(A 项)、Stribeck 现象(B 项) 以及粘滞摩擦(C 项)的摩擦特征.

将所提出的连续可微函数式(2)代入伺服系 统模型(1)中可得新的系统模型为

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_{i} + F_{i}(\dot{\theta}_{i}) &= u_{i}(t) - \tau_{i}(t) - (-1)^{i}\omega, \\ J_{m}\ddot{\theta}_{m} + F_{m}(\dot{\theta}_{m}) &= \sum_{i=1}^{2} \tau_{i}(t). \end{aligned}$$
(3)

其中:

$$F_{m} = (2/(1 + e^{-\gamma \theta_{m}}) - 1)(F_{cm} + (F_{sm} - F_{cm})e^{-(\theta_{m}/v_{cm})^{2}}) + F_{vm}\dot{\theta}_{m},$$

$$F_{i} = (2/(1 + e^{-\gamma \dot{\theta}_{i}}) - 1)(F_{c} + (F_{s} - F_{c})e^{-(\dot{\theta}_{i}/v_{c})^{2}}) + F_{v}\dot{\theta}_{i}.$$



图 1 连续 LuGre 稳态模型

基于系统模型(3),假设系统传动比是 1,且 齿隙为 2 $\alpha$ .因为齿隙具有非线性特性,所以传输 力矩  $\tau_i(t)$  可表示为

$$\tau_i(t) = k f(z_i(t)) + c f(z_i(t)).$$
(4)

式中k和c分别表示扭矩系数和阻尼系数,并且死 区函数 $f(z_i(t))$ 定义为

由于死区的非线性不利于设计控制器,因此 我们运用如下的光滑、连续、可微的函数来代替死 区函数

$$f(z_i(t)) = z_i(t) - \alpha \left(\frac{2}{1 + e^{-rz_i}} - 1\right).$$
(6)

那么,传输力矩 $\tau_i(t)$ 可改写为 ( ( 2 ))

$$\tau_{i}(t) = k \left[ z_{i}(t) - \alpha \left[ \frac{1}{1 + e^{-rz_{i}}} - 1 \right] \right] + cz_{i}(t) \left( 1 - 2\alpha \frac{e^{-rz_{i}}}{(1 + e^{-rz_{i}})^{2}} \right) .$$
(7)

其中r > 0.

为了便于设计控制器,选择 $x_1, x_2, x_{3i}, x_{4i}$ 为状态变量

$$\begin{cases} x_{1} = \theta_{m}, \\ x_{2} = \dot{\theta}_{m}, \\ x_{3i} = z_{i}(t) - \alpha \left(\frac{2}{1 + e^{-rz_{i}}} - 1\right), \\ x_{4i} = \dot{z}_{i}(t) \left(1 - 2\alpha \frac{e^{-rz_{i}}}{(1 + e^{-rz_{i}})^{2}}\right). \end{cases}$$
  
并且  $\tau_{i}(t) = kx_{3i} + cx_{4i}.$   
于是,状态方程可表示为

$$\begin{aligned} x_{1} &= x_{2}, \quad y = x_{1}; \\ \dot{x}_{2} &= a_{1} \sum_{i=1}^{2} \tau_{i}(t) - a_{1}F_{m}; \\ \dot{x}_{3i} &= x_{4i}; \\ \dot{x}_{4i} &= a_{2}(u_{i}(t) - \tau_{i}(t) - (-1)^{i}\omega - F_{i})\rho_{i} - \\ a_{1}\rho_{i} \sum_{i=1}^{2} \tau_{i}(t) + a_{1}F_{m}\rho_{i} + 2z_{i}^{2}r^{2}\alpha\tilde{\varepsilon}_{i}. \\ \vec{x} \\ \vec{+} : a_{1} &= \frac{1}{J_{m}}, \quad a_{2} = \frac{1}{J}, \quad \tilde{\varepsilon}_{i} = \frac{e^{-rz_{i}}(1 - e^{-rz_{i}})}{(1 + e^{-rz_{i}})^{3}}, \\ \rho_{i} &= 1 - 2\alpha \frac{e^{-rz_{i}}}{(1 + e^{-rz_{i}})^{2}}. \end{aligned}$$

本文主要目的是设计相应的快速终端滑模控 制器,使系统输出精确跟踪参考信号并完成2电 机之间的同步控制.下面,我们对这个方面进行详 细介绍.

2 控制器设计

为了确保系统输出能够精确跟踪参考信号, 研究跟踪误差  $e(t) = y(t) - y_d(t)$ 的稳态性能.通 过简单的推导,可得下列等式

$$\dot{e} = x_2 - \dot{y}_d, \qquad (10)$$

$$\ddot{e} = \dot{x}_2 - \ddot{y}_d = a_1 \sum_{i=1}^2 \tau_i(t) - a_1 F_m - \ddot{y}_d, \quad (11)$$

$$e = \ddot{x}_{2} - y_{d} = a_{1} \sum_{i=1}^{2} \left[ kx_{4i} + ca_{2}(u_{i}(t) - \tau_{i}(t) - (-1)^{i}\omega)\rho_{i} - ca_{1}\rho_{i} \sum_{i=1}^{2} \tau_{i}(t) + c(a_{1}F_{m} - a_{2}F_{i})\rho_{i} + 2cz_{i}^{2}r^{2}\alpha\tilde{\varepsilon}_{i} - y_{d}/(2a_{1}) - \dot{F}_{m}/2 \right].$$
(12)

定义快速终端滑模为

$$\begin{cases} s_0 = e, \\ s_1 = \dot{s_0} + \alpha_0 s_0 + \beta_0 s_0^{q_0/p_0}, \\ s_2 = \dot{s_1} + \alpha_1 s_1 + \beta_1 s_1^{q_1/p_1}. \end{cases}$$
(13)

式中:  $p_i > q_i$  是正奇数, 而  $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ .

为了能够达到跟踪与同步控制的目的,本文 引入一个表征同步程度的可变系数,将原有滑模 控制分为两部分,即保证速度同步部分 u<sub>si</sub> 和不能 速度保证同步部分 u<sub>n</sub>.

基于连续 LuGre 稳态摩擦模型, 控制量  $u_i$  可 表示为

$$u_i = u_{si} + \psi u_{ii} \quad . \tag{14}$$

式中:

$$u_{si} = \frac{1}{a_2 c \rho_i} [h_1(x_{3i}, x_{4i}) - c(a_1 F_m - a_2 F_i) \rho_i], (15)$$

$$u_{ti} = \frac{1}{a_2 c \rho_i} [y_d(t) / (2a_1) - 2c z_i^2 r^2 \alpha \tilde{\varepsilon}_i - h_2(s_0, \dot{s}_0, \dot{s}_0, s_1, \dot{s}_1) - bs_2 + \dot{F}_m / 2], (16)$$

$$\psi = \frac{1}{e^{\eta | z_1 - z_2 |}}.$$
(17)

这里, b > 0, 并且  $\eta$  是一个足够大的正常数, 而  $h_1(x_{3i}, x_{4i})$  为系统的状态反馈项,  $h_1(x_{3i}, x_{4i}) = a_2 c \rho_i \tau_i(t) + a_2 c \rho_i(-1)^i \omega + c a_1 \rho_i(\tau_1(t) + \tau_2(t)) - k x_{4i}, h_2(s_0, s_0, s_0, s_1, s_1)$  为滑模项, 且  $h_2(s_0, s_0, s_0, s_0, s_0, s_1, s_1) = \alpha_0 \dot{s}_0 / (2a_1) + (\beta_0 s_0^{q_0 / p_0})'' / (2a_1) + (\beta_1 s_1^{q_1 / p_1})' / (2a_1) + \alpha_1 s_1 / (2a_1).$ 

可变系数 $\psi$ 反映两电机转速的同步程度,当 两电机转速差较大时, $\psi$ 变小,保证速度同步部分 的控制量 $u_{si}$ 起主要作用,两电机逐渐达到同步状态;当转速差较小时, $\psi$ 趋近于1,控制量变为原有 的滑模跟踪控制,从而完成跟踪目的,因此选择合 理的 $\eta$ ,能够保证系统达到先同步后跟踪的目的.

以下,将对整个系统的稳定性进行分析.

**定理1** 考虑状态方程(9),控制率由式(14)~(17)给出,那么两电机的转速将会达到同步,并且跟踪误差 *e* 一致收敛.

**证明** 通过两个步骤对整体的稳定性进行证明,即两电机同步稳定性和输出跟踪稳定性.

首先,选择以下 Lyapunov 函数证明两电机同 步稳定性,

$$V_1 = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2. \quad (18)$$

対式(18)进行求导,并将式(3)代入可得  $\dot{V}_1 = (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = a_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)[u_1 - u_2 - (\tau_1 - \tau_2) + 2\omega - (F_1 - F_2)].$  (19) 将式(14)代入式(19),又因为 $x_{4i} = \dot{z}_i \rho_i$ ,可得  $\dot{V}_1 = -\frac{k}{a_2 c} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 + a_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \frac{1}{e^{\eta | \dot{z}_1 - \dot{z}_2 |}} [u_{i1} - u_{i2}].$  (20)

当 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$ ,  $\dot{V}_1 = 0$ 显然成立; 而当 $\dot{\theta}_1 \neq \dot{\theta}_2$ 时, 若使 $\dot{V}_1 < 0$ ,则可以转化为求解 $\eta$ 满足式(21)

$$\mathrm{e}^{\eta |z_1 - z_2|} \geq \frac{\delta}{z_1 - z_2} \frac{a_2 c}{Jk}.$$
 (21)

其中 $\delta = u_{i1} - u_{i2}$ .

对于任意初始条件下,当 $\delta/(z_1 - z_2) \leq 0$ 时, 不等式(21) 恒成立.考虑另一种情况,即 $\delta/(z_1 - z_2) > 0$ ,则由式(21) 可得

$$\eta \ge \frac{\ln(\frac{a_2^2 c \mid \delta \mid}{\cdot \cdot \cdot})}{\frac{k \mid z_1 - z_2 \mid}{\cdot \cdot \cdot \cdot}}.$$
 (22)

由于式(22) 右端函数是有界函数,这里假设 该函数上界为 $\sigma$ ,那么当且仅当 $\eta \ge \sigma$ 时电机能 够达到同步.

下面选取另一个 Lyapunov 函数证明跟踪误差的稳定性。

$$V_2 = 0.5s_2^2$$
 . (23)

上述证明可以看出两电机转速能够先达到

同步,即当 $z_1 - z_2 \rightarrow 0$ , $e^{\eta |z_1 - z_2|} = 1$ .因此,在这里控制量可以简化为 $u_i = u_{si} + u_{ii}$ .

対式(23)求导并将控制量代入得  

$$\dot{V}_2 = s_2 \dot{s}_2 = s_2 [e + (\beta_0 s_0^{q_0/p_0})''/(2a_1) + \alpha_0 \ddot{s}_0/(2a_1) + (\beta_1 s_1^{q_1/p_1})'/(2a_1) + \alpha_1 \dot{s}_1/(2a_1)] = -2a_1 bs_2^2 < 0.$$
 (24)

由上述推导可得,在控制率 *u<sub>i</sub>* 的作用下, 系统能够达到同步,并且跟踪误差 *e* 一致收敛.

3 仿真研究

为了验证文中方法的有效性,将对系统的位置跟踪和速度同步进行仿真研究.仿真以 双电机伺服系统为研究对象,其系统参数如表1 所示.

表1 双电机伺服系统参数

系统 参数	$J/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$J_{m}$ / $(kg \cdot m^{2})$	k/ (Nm • rad <sup>-1</sup> )	c∕ (Nm • rad <sup>-1</sup> )	α∕ rad	ω⁄ Nm	<i>F<sub>s</sub></i> / N	$F_{\rm c}$ / Nm	$F_{v} \neq ((Nm \cdot s) \cdot rad^{-1})$	$v_{ m c}$ / (rad $\cdot$ s <sup>-1</sup> )	$F_{ m sm}$ / Nm	F <sub>cm</sub> ∕ Nm	$F_{\rm vm} \not$ ((Nm · s) · rad <sup>-1</sup> )	$v_{ m cm}$ / (rad $\cdot$ s <sup>-1</sup> )
取值	0.815	0.028	560	0.15	0.3	50	2.4	0.8	0.8	0.15	2.6	0.9	0.9	0.2

仿真中,选取  $y_d = 2\sin(2/5\pi t)$ 为跟踪信号, 应用式(14)~(17)所给出的控制率对系统进行 控制.设计参数选择如下: $\alpha_0 = 46$ , $\alpha_1 = 56$ , $\beta_0 = 10$ , $\beta_1 = 65$ , $p_0 = 11$ , $q_0 = 9$ , $p_1 = 9$ , $q_1 = 7$ ,r = 8.005, b = 350,其中可变系数ψ的参数选择为 $\eta = 300$ .

位置跟踪和速度同步仿真结果如图 2~5 所示.



图 2 位置跟踪结果



图 2、3 为跟踪控制的结果,图 4、5 给出了 同步控制的结果.从仿真结果可以看出,文中 提出的方法具有很好的控制性能,即具有较快的 收敛速度和较小的误差,该方法既能保证两电机 快速达到同步,又能保证输出高精度跟踪参考 信号.



图 4 两电机速度同步结果



## 4 结 语

本文考虑了含 LuGre 稳态摩擦项的双电机伺 服系统同步和跟踪控制问题.建立连续 LuGre 稳 态摩擦模型,解决原模型不可微分的缺点,该连续 模型可以有效刻画库伦摩擦、粘滞摩擦、Stribeck 现象等多种摩擦特征.基于该模型提出了含有可 变系数的快速终端滑模控制器,该方法既能保证 电机快速达到同步,又能完成高精度的跟踪.仿真 结果表明了文中所提方法具有很好的性能.

参考文献

- MUVENGEI O, KIHIU J, IKUA B. Dynamic analysis of planar multi-body systems with LuGre friction at differently located revolute clearance joints [J]. Multibody System Dynamics, 2012, 28(4): 369-393.
- [2] WANG X, WANG S. High performance adaptive control of mechanical servo system with LuGre friction model: identification and compensation [J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2012, 134 (1): 011021.
- [3] HOSHINO D, KAMAMICHI N, ISHIKAWA J. Friction compensation using time variant disturbance observer based on the LuGre model[C]//Proceedings of the 12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control. Sarajevo: IEEE, 2012: 1-6.

- [4] FREIDOVICH L, ROBERTSSON A, SHIRIAEV A, et al. LuGre-model-based friction compensation [J]. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 2010, 18(1): 194-200.
- [5] 向红标,谭文斌,李醒飞,等. 基于 LuGre 模型的自适应摩擦补偿[J].机械工程学报,2012,48(17):70-74.
- [6] WANG X J, LI J Y, WU B, et al. Continuous rotary motor electro-hydraulic servo system based on the zero phase error tracking controller [J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 121: 3205–3209.
- [7] LIU Z, LIU B F. Robust Control strategy for the speed control of brushless DC motor [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 20(2): 90-94.
- [8] ZHANG Z, CHAU K T, WANG Z. Chaotic speed synchronization control of multiple induction motors using stator flux regulation [J]. Magnetics, IEEE Transactions on, 2012, 48(11): 4487-4490.
- [9] TIAN Y F, GUO Q C, Robustness-tracking control based on sliding mode and H<sub>∞</sub> theory for linear servo system [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2005, 12(2): 213-217.
- [10] LIU Z L, LIU G Z, LIU J. Neural adaptive sliding mode speed tracking control of a DC motor [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2004, 15(3): 304-308.

(编辑 苗秀芝)

(上接第118页)

- [2] 韩京清.从 PID 技术到"自抗扰控制"技术[J].控制 工程,2002,9(3):13-18.
- [3] 姜萍,郝靖宇,宗晓萍,等. 自抗扰控制器的 simulink 建模与仿真[J]. 自动化技术与应用, 2010, 29(2):1-4.
- [4] TAYEBI A, MCGILVRAY S. Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot [C]//Proceedings of the 43<sup>rd</sup> IEEE International Conference on Decision and Control. Paradise Island: IEEE, 2004, 2:1216-1221.
- [5] JOSHI S M, KELKAR A G, WEN J T Y. Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback [C]//IEEE Transactions on Automatic Control, [s.l.]: [s.n.], 1995, 40 (10): 1800-1803.
- [6] BOUABDALLAH S, SIEGWART R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor [ C ]//Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation.

Barcelona: IEEE, 2005, 2247-2252.

- [7] BOUABDALLAH S, NOTH A, SIEGWART R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor [C]//Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Sendal: IEEE, 2004, 3:2451-2456.
- [8] 刘志军, 吕强, 王东来. 小型四旋翼直升机的建模与 仿真控制[J]. 计算机仿真, 2010, 27(7):18-20.
- [9] 于卫卫. 三自由度四旋翼盘旋系统控制问题研究 [D]. 沈阳: 东北大学, 2007.
- [10] 王俊生, 马宏绪, 蔡文澜, 等. 基于 ADRC 的小型四 旋翼无人直升机控制方法研究[J]. 弹箭与制导学 报, 2008, 28(3):31-34.
- [11]李杰,齐晓慧,韩帅涛.基于自抗扰技术的四旋翼姿态解耦控制方法[J].电光与控制,2013,20(3): 44-48.

(编辑 苗秀芝)