

压电混合约束层阻尼梁结构的振动控制

李明明, 方 勃, 谭立军, 张洁洁, 唐 冶, 黄文虎

(哈尔滨工业大学 飞行器动力学与控制研究所, 150001 哈尔滨)

摘要: 为提高主被动混合压电网络的振动控制频带, 结合主被动混合压电网络和被动约束层阻尼结构各自的优点, 提出了一种压电混合约束层阻尼结构用于悬臂梁结构的振动控制. 利用复剪切模量模型描述粘弹性材料的力学特性, 运用 Hamilton 原理和 Rayleigh-Ritz 法推导压电混合约束层阻尼悬臂梁结构的动力学模型. 在此基础上, 采用速度反馈控制策略设计主动控制器, 并对系统的开环和闭环特性进行数值分析. 分析结果表明, 与主被动混合压电网络相比, 压电混合约束层阻尼结构具有更显著的振动控制性能和更宽的振动控制频带. 而且这种压电混合约束层阻尼结构可以很容易地推广到对其他结构的振动控制.

关键词: 主被动混合压电网络; 被动约束层阻尼; Hamilton 原理; 分流电路

中图分类号: O328 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2014)05-0011-07

Vibration control of beams with piezoelectric hybrid constrained layer damping treatments

LI Mingming, FANG Bo, TAN Lijun, ZHANG Jiejie, TANG Ye, HUANG Wenhui

(Spacecraft Dynamics and Control Institute, Harbin Institute of Technology, 150001 Harbin, China)

Abstract: To enhance the vibration control bandwidth of active-passive hybrid piezoelectric network (APPN), a kind of piezoelectric hybrid constrained layer damping (PHCLD), which combined the advantages of the APPN and passive constrained layer damping, was presented to control the vibrations of cantilever beams. Complex shear modulus was used to characterize the dynamic behavior of viscoelastic material, and Hamilton's principle with Raleigh-Ritz method was employed to establish the dynamic model of the cantilever beams with PHCLD treatments. On this basis, the velocity feedback control strategy was used to design the active controller, and numerical simulations were performed to analyze the open-loop and closed-loop characteristics of the beam/PHCLD system. Analysis results indicate that the PHCLD has better vibration control performance and wider vibration control bandwidth as compared with the APPN. Furthermore, this PHCLD treatment could be easily extended to control the vibrations of other kinds of structures.

Keywords: active-passive hybrid piezoelectric network; passive constrained layer damping; Hamilton's principle; shunting circuit

振动被动控制由于具有结构简单、可靠性高、高频控制效果好、不需要外界能源等优点, 已经在许多领域得到了广泛应用^[1-4], 特别是在可靠性要求较高的场合, 被动控制往往是首选^[5]. 但是被

动控制的低频控制效果不好, 且对外界的不确定性干扰没有很好的调节能力. 而低频控制效果好、对干扰的调节能力强恰恰是振动主动控制的优点. 如果在被动控制的基础上增加主动控制, 不仅不会影响控制系统的可靠性和稳定性, 还能进一步提高系统的整体控制性能以及抗干扰能力. 因此, 研究和发​​展集可靠性和智能性于一体的主被动混合振动控制技术是目前很活跃的研究课题.

主被动混合压电网络 (active-passive hybrid

收稿日期: 2013-04-09.

基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目 (E201018).

作者简介: 李明明 (1982—), 男, 博士研究生;

方 勃 (1963—), 男, 教授, 博士生导师;

黄文虎 (1926—), 男, 博士生导师, 中国工程院院士.

通信作者: 方 勃, bfang0825@163.com.

piezo-electric network, APPN) 是 Agnes G S^[6] 提出的一种主被动混合振动控制技术. 在 APPN 中, 压电层既能够通过 RL 分流电路被动地耗散结构振动能量, 同时又能够通过控制电压主动地控制结构振动, 使得 APPN 兼具主动控制和被动控制两方面的优点, 因此得到了国内外学者的广泛关注^[7-11]. 文献[12]利用 APPN 对环结构进行振动控制, 分析结果表明, APPN 能够有效地抑制振动和噪声. 与主动控制相比, APPN 只需较小的控制力, 即可获得更好的振动控制性能. 文献[13]在研究 APPN 时, 考虑到压电材料具有高阶非线性和迟滞特性, 因此采用滑模控制理论设计鲁棒控制器, 以补偿系统的非线性和不确定性.

但是在 APPN 中, RL 电路的减振机理与有阻尼动力吸振器相同, 所以 APPN 不可避免地遗留了有阻尼动力吸振器控制频带较窄的缺点. 为了解决这一问题, 本文结合 APPN 和被动约束层阻尼 (piezoelectric hybrid constrained layer damping, PHCLD) 结构, 并以悬臂梁作为被控对象, 对该结构的振动控制性能进行了研究和探讨. 本文首先运用 Hamilton 原理和 Rayleigh-Ritz 法建立 PHCLD 悬臂梁结构的动力学模型, 然后采用速度反馈控制策略设计主动控制器, 并通过分析系统的开环和闭环特性来阐明 PHCLD 结构所具有的优越性.

1 结构形式

PHCLD 悬臂梁结构的具体形式如图 1 所示. 从图中可以看出, PHCLD 结构就是在 APPN 结构的基础上增加了被动约束层阻尼结构. PHCLD 悬臂梁结构的变形几何关系如图 2 所示.

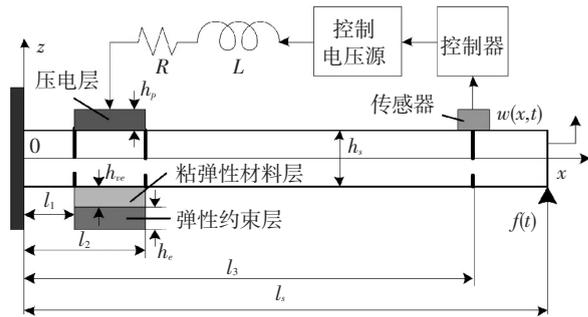


图 1 PHCLD 悬臂梁结构示意图

从图中可以得到如下关系式:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma + \psi, \quad (1)$$

$$u_{ve} = u_s + \frac{1}{2}h_s \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}h_{ve}\psi, \quad (2)$$

$$u_e = u_s + \frac{h_s + h_e}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + h_{ve}\psi, \quad (3)$$

$$u_p = u_s - \frac{h_s + h_p}{2} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4)$$

式中: γ 为粘弹性材料层的切应变; w 为悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层和压电层的横向位移; u_s 、 u_{ve} 、 u_e 、 u_p 分别为悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层、压电层的纵向位移; h_s 、 h_{ve} 、 h_e 、 h_p 分别为悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层、压电层的厚度. 将式(1)代入式(3), 消去 ψ 得

$$\gamma = \frac{u_s - u_e}{h_{ve}} + \left(1 + \frac{h_s + h_e}{2h_{ve}}\right) \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (5)$$

将式(3)代入式(2), 消去 ψ 得

$$u_{ve} = \frac{u_s + u_e}{2} + \frac{h_s - h_e}{4} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (6)$$

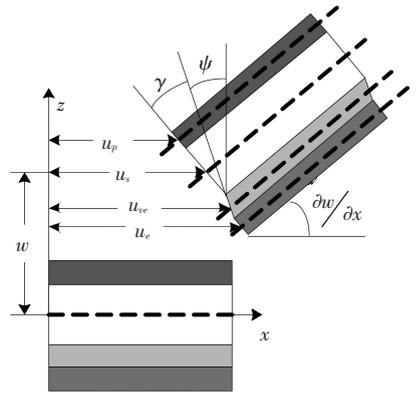


图 2 PHCLD 悬臂梁结构的变形几何关系

2 基本假设

在建立 PHCLD 悬臂梁结构的动力学模型前, 首先进行如下假设和处理:

1) 假设悬臂梁为 Euler-Bernoulli 悬臂梁, 因此悬臂梁沿 x 轴方向的正应力和正应变分别为

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \quad (7)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (8)$$

式中 E_s 为悬臂梁的弹性模量.

2) 假设悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层和压电层具有相同的横向位移, 均为 $w(x, t)$.

3) 忽略悬臂梁、弹性约束层和压电层的结构阻尼, 结构中的被动阻尼均由粘弹性材料层提供, 并假设粘弹性材料的复模量为

$$G' = G(1 + j\eta). \quad (9)$$

式中 j 为虚数单位, G 和 η 分别为粘弹性材料的存储模量和损耗因子.

4) 假设压电层的极化方向沿其厚度方向向上(即沿坐标系 z 轴正方向),且压电层的电场强度表示为^[14]

$$E(t) = \begin{cases} -\frac{v(t)}{h_p}, & \frac{h_s}{2} \leq z \leq \frac{h_s}{2} + h_p; \\ 0, & -\frac{h_s}{2} - h_{ve} - h_e \leq z < \frac{h_s}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

式中 $v(t)$ 为压电约束层上下表面的电压。

5) 利用 Rayleigh-Ritz 法,将悬臂梁的纵向位移、横向位移以及弹性约束层的纵向位移分别表示为

$$u_s(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{si}(x) J_{si}(t) = \Phi_s(x)^T \mathbf{J}_s(t), \quad (11)$$

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) r_i(t) = \varphi(x)^T \mathbf{r}(t), \quad (12)$$

$$u_e(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ei}(x) J_{ei}(t) = \Phi_e(x)^T \mathbf{J}_e(t). \quad (13)$$

式中: $\Phi_s(x)$ 、 $\varphi(x)$ 、 $\Phi_e(x)$ 为主振型函数, $\mathbf{J}_s(t)$ 、 $\mathbf{r}(t)$ 、 $\mathbf{J}_e(t)$ 为相应的广义坐标,上角标 T 表示向量或矩阵的转置.由振动力学可知

$$\Phi_{si}(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi}{2l_s} x, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x - \\ &\frac{\cosh \lambda_i l_s + \cos \lambda_i l_s}{\sinh \lambda_i l_s + \sin \lambda_i l_s} \times (\sinh \lambda_i x - \sin \lambda_i x), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Phi_{ei} = \cos \frac{i\pi}{l_e} x. \quad (16)$$

式中: $i = 1, 2, \dots, n$; l_s 、 l_e 分别为悬臂梁和弹性约束层的长度, λ_i 则由下式确定:

$$\cos \lambda_i l_s \cosh \lambda_i l_s = -1. \quad (17)$$

3 动力学建模

下面利用 Hamilton 原理建立 PHCLD 悬臂梁结构的动力学模型. Hamilton 原理的广义形式为^[15]

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T_k - U + W_e) + \delta W] dt = 0. \quad (18)$$

式中 T_k 为动能, U 为势能, W_e 为电能, W 为外力所作的功。

3.1 动能

PHCLD 悬臂梁结构的动能表示为

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \\ &\frac{1}{2} \int_{V_{ve}} \rho_{ve} \left[\left(\frac{\partial u_{ve}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \\ &\frac{1}{2} \int_{V_e} \rho_e \left[\left(\frac{\partial u_e}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV + \\ &\frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV. \end{aligned} \quad (19)$$

式中: V_s 、 V_{ve} 、 V_e 、 V_p 分别为悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层、压电层的体积; ρ_s 、 ρ_{ve} 、 ρ_e 、 ρ_p 分别为悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层、压电层的密度.将式(4)、(6)代入式(19),注意式中的横、纵向位移应用式(11)~(13)表示,整理得

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_s(t)^T [\mathbf{M}_{s1} + \mathbf{M}_{ve1} + \mathbf{M}_{p1}] \dot{\mathbf{J}}_s(t) + \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}(t)^T [\mathbf{M}_{s2} + \mathbf{M}_{ve2} + \mathbf{M}_{ve3} + \mathbf{M}_{e2} + \mathbf{M}_{p2} + \\ &\mathbf{M}_{p3}] \dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_e(t)^T [\mathbf{M}_{ve4} + \mathbf{M}_{e1}] \dot{\mathbf{J}}_e(t) + \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_s(t)^T [\mathbf{M}_{ve5} + \mathbf{M}_{p4}] \dot{\mathbf{r}}(t) + \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}(t)^T [\mathbf{M}_{ve5}^T + \mathbf{M}_{p4}^T] \dot{\mathbf{J}}_s(t) + \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_s(t)^T \mathbf{M}_{ve6} \dot{\mathbf{J}}_e(t) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_e(t)^T \mathbf{M}_{ve6}^T \dot{\mathbf{J}}_s(t) + \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}(t)^T \mathbf{M}_{ve7} \dot{\mathbf{J}}_e(t) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_e(t)^T \mathbf{M}_{ve7}^T \dot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

式中各质量阵的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{s1} &= \rho_s b h_s \int_0^{l_s} \Phi_s(x) \Phi_s(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{s2} &= \rho_s b h_s \int_0^{l_s} \varphi(x) \varphi(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve1} &= \frac{\rho_{ve} b h_{ve}}{4} \int_{l_1}^{l_2} \Phi_s(x) \Phi_s(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve2} &= \rho_{ve} b h_{ve} \int_{l_1}^{l_2} \varphi(x) \varphi(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve3} &= \frac{\rho_{ve} b h_{ve}}{16} (h_s - h_e)^2 \int_{l_1}^{l_2} \varphi'(x) \varphi'(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve4} &= \frac{\rho_{ve} b h_{ve}}{4} \int_{l_1}^{l_2} \Phi_e(x) \Phi_e(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve5} &= \frac{\rho_{ve} b h_{ve}}{8} (h_s - h_e) \int_{l_1}^{l_2} \Phi_s(x) \varphi'(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve6} &= \frac{\rho_{ve} b h_{ve}}{4} \int_{l_1}^{l_2} \Phi_s(x) \Phi_e(x)^T dx, \\ \mathbf{M}_{ve7} &= \frac{\rho_{ve} b h_{ve}}{8} (h_s - h_e) \int_{l_1}^{l_2} \varphi'(x) \Phi_e(x)^T dx, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{e1} = \rho_e b h_e \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_e(x) \boldsymbol{\Phi}_e(x)^T dx,$$

$$\mathbf{M}_{e2} = \rho_e b h_e \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}(x) \boldsymbol{\varphi}(x)^T dx,$$

$$\mathbf{M}_{p1} = \rho_p b h_p \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_s(x) \boldsymbol{\Phi}_s(x)^T dx,$$

$$\mathbf{M}_{p2} = \rho_p b h_p \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}(x) \boldsymbol{\varphi}(x)^T dx,$$

$$\mathbf{M}_{p3} = \frac{\rho_p b h_p}{4} (h_s + h_p)^2 \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}'(x) \boldsymbol{\varphi}'(x)^T dx,$$

$$\mathbf{M}_{p4} = -\frac{\rho_p b h_p}{2} (h_s + h_p) \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_s(x) \boldsymbol{\varphi}'(x)^T dx.$$

式中: l_1 、 l_2 为粘弹性材料层(或弹性约束层, 又或压电层)左、右两端到悬臂梁固定端的距离, b 表示悬臂梁、粘弹性材料层、弹性约束层、压电层的厚度。

3.2 势能

PHCLD 悬臂梁结构的势能表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_s} \boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s dV + \frac{1}{2} \int_{V_e} G' \boldsymbol{\gamma}^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} \boldsymbol{\sigma}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p dV. \quad (21)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}_e$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ 分别为弹性约束层沿 x 轴方向的正应力和正应变; $\boldsymbol{\sigma}_p$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 分别为压电层沿 x 轴方向的正应力和正应变. 且弹性约束层正应力和正应变, 以及压电层正应变可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_e = E_e \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{\partial u_e}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\partial u_p}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (24)$$

式中 E_e 为弹性约束层的弹性模量.

对于一维结构来说, 压电材料的本构方程为^[16]

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \frac{1}{s^E} \boldsymbol{\varepsilon}_p - \frac{d_{31}}{s^E} E = E_p \boldsymbol{\varepsilon}_p - E_p d_{31} E, \quad (25)$$

$$D_p = \frac{d_{31}}{s^E} \boldsymbol{\varepsilon}_p + \xi^E E = E_p d_{31} \boldsymbol{\varepsilon}_p + \xi^E E. \quad (26)$$

式中: s^E 为电场强度为零或恒定时的弹性柔顺常数; d_{31} 为压电应变常数; ξ^E 为应变为零或恒定时的介电常数; $E_p (= 1/s^E)$ 为压电材料的弹性模量; D_p 为电位移. 将式(10)代入式(25), 再将式(5)、(7)、(8)、(22) ~ (25)代入式(21), 注意式中的横、纵向位移应用式(11) ~ (13)表示, 整理得

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{J}_s(t)^T [\mathbf{K}_{s1} + \mathbf{K}_{ve1} + \mathbf{K}_{p1}] \mathbf{J}_s(t) +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{r}(t)^T [\mathbf{K}_{s2} + \mathbf{K}_{ve2} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{p2} + \\ & 3\mathbf{K}_{p3}] \mathbf{r}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{J}_e(t)^T [\mathbf{K}_{ve3} + \mathbf{K}_{e1}] \mathbf{J}_e(t) + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{J}_s(t)^T [\mathbf{K}_{ve4} + 2\mathbf{K}_{p4}] \mathbf{r}(t) + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{r}(t)^T [\mathbf{K}_{ve4}^T + 2\mathbf{K}_{p4}^T] \mathbf{J}_s(t) + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{J}_s(t)^T \mathbf{K}_{ve5} \mathbf{J}_e(t) + \frac{1}{2} \mathbf{J}_e(t)^T \mathbf{K}_{ve5}^T \mathbf{J}_s(t) + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{r}(t)^T \mathbf{K}_{ve6} \mathbf{J}_e(t) + \frac{1}{2} \mathbf{J}_e(t)^T \mathbf{K}_{ve6}^T \mathbf{r}(t) - \\ & \frac{1}{2} \mathbf{J}_s(t)^T \mathbf{K}_{p5} v(t) - \mathbf{r}(t)^T \mathbf{K}_{p6} v(t). \quad (27) \end{aligned}$$

式中各刚度阵的表达式为

$$\mathbf{K}_{s1} = E_s b h_s \int_0^{l_s} \boldsymbol{\Phi}'_s(x) \boldsymbol{\Phi}'_s(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{s2} = \frac{E_s b h_s^3}{12} \int_0^{l_s} \boldsymbol{\varphi}''(x) \boldsymbol{\varphi}''(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{ve1} = \frac{G' b}{h_{ve}} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_s(x) \boldsymbol{\Phi}_s(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{ve2} = G' b h_{ve} \left(1 + \frac{h_s + h_e}{2h_{ve}} \right)^2 \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}'(x) \boldsymbol{\varphi}'(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{ve3} = \frac{G' b}{h_{ve}} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_e(x) \boldsymbol{\Phi}_e(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{ve4} = G' b \left(1 + \frac{h_s + h_e}{2h_{ve}} \right) \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_s(x) \boldsymbol{\varphi}'(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{ve5} = -\frac{G' b}{h_{ve}} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}_s(x) \boldsymbol{\Phi}_e(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{ve6} = -G' b \left(1 + \frac{h_s + h_e}{2h_{ve}} \right) \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}'(x) \boldsymbol{\Phi}_e(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{e1} = E_e b h_e \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}'_e(x) \boldsymbol{\Phi}'_e(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{e2} = \frac{E_e b h_e^3}{12} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}''(x) \boldsymbol{\varphi}''(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{p1} = E_p b h_p \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}'_s(x) \boldsymbol{\Phi}'_s(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{p2} = \frac{E_p b}{3} \left[\left(\frac{h_s}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^3 \right] \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}''(x) \boldsymbol{\varphi}''(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{p3} = E_p b \frac{h_p (h_s + h_p)^2}{4} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}''(x) \boldsymbol{\varphi}''(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{p4} = -E_p b \frac{h_p (h_s + h_p)}{2} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}'_s(x) \boldsymbol{\varphi}''(x)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{p5} = -E_p b d_{31} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\Phi}'_s(x) dx,$$

$$\mathbf{K}_{p6} = E_p b \frac{h_s + h_p}{2} d_{31} \int_{l_1}^{l_2} \boldsymbol{\varphi}''(x) dx.$$

3.3 电能

PHCLD 悬臂梁结构的电能表示为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_p} ED_p dV. \quad (28)$$

将式(24)代入式(26), 再将式(10)、(26)代入式(28), 注意式中的横、纵向位移应用式(11)、(12)表示, 整理得

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{J}_s(t)^T \mathbf{K}_{p5} \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t)^T \mathbf{K}_{p6} \mathbf{v}(t) + \frac{1}{2} C_p v^2(t). \quad (29)$$

式中 $C_p = \frac{b\xi^\varepsilon}{h_p}(l_2 - l_1)$.

3.4 外力所作的功

如图1所示, 简谐激振力 $f(t)$ 作用于 $x = l_s$ 处, 因此外力所作的功可表示为

$$W = \int_0^{l_s} f(t) \delta(x - l_s) w(x, t) dx - q(t) v(t). \quad (30)$$

式中 $\delta(x)$ 为 Dirac delta 函数, $q(t)$ 为压电层的电荷量. 将式(12)代入式(30), 整理得

$$W = \mathbf{r}(t)^T \mathbf{F}_s f(t) - q(t) v(t). \quad (31)$$

式中 $\mathbf{F}_s = \int_0^{l_s} \delta(x - l_s) \varphi(x) dx$.

3.5 动力学方程

将式(20)、(27)、(29)、(31)代入式(18), 整理得

$$[\mathbf{M}_{s1} + \mathbf{M}_{ve1} + \mathbf{M}_{p1}] \ddot{\mathbf{J}}_s(t) + [\mathbf{M}_{ve5} + \mathbf{M}_{p4}] \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{M}_{ve6} \ddot{\mathbf{J}}_e(t) + [\mathbf{K}_{s1} + \mathbf{K}_{ve1} + \mathbf{K}_{p1}] \mathbf{J}_s(t) + [\mathbf{K}_{ve4} + 2\mathbf{K}_{p4}] \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_{ve5} \mathbf{J}_e(t) - \mathbf{K}_{p5} v(t) = 0, \quad (32)$$

$$[\mathbf{M}_{ve5}^T + \mathbf{M}_{p4}^T] \ddot{\mathbf{J}}_s(t) + [\mathbf{M}_{s2} + \mathbf{M}_{ve2} + \mathbf{M}_{ve3} + \mathbf{M}_{e2} + \mathbf{M}_{p2} + \mathbf{M}_{p3}] \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{M}_{ve7} \ddot{\mathbf{J}}_e(t) + [\mathbf{K}_{ve4}^T + 2\mathbf{K}_{p4}^T] \mathbf{J}_s(t) + [\mathbf{K}_{s2} + \mathbf{K}_{ve2} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{p2} + 3\mathbf{K}_{p3}] \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_{ve6} \mathbf{J}_e(t) - 2\mathbf{K}_{p6} v(t) = \mathbf{F}_s f(t). \quad (33)$$

$$\mathbf{M}_{ve6}^T \ddot{\mathbf{J}}_s(t) + \mathbf{M}_{ve7}^T \ddot{\mathbf{r}}(t) + [\mathbf{M}_{ve4} + \mathbf{M}_{e1}] \ddot{\mathbf{J}}_e(t) + \mathbf{K}_{ve5}^T \mathbf{J}_s(t) + \mathbf{K}_{ve6}^T \mathbf{r}(t) + [\mathbf{K}_{ve3} + \mathbf{K}_{e1}] \mathbf{J}_e(t) = 0, \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_{p5}^T \mathbf{J}_s(t) + 2\mathbf{K}_{p6}^T \mathbf{r}(t) + C_p v(t) = q(t). \quad (35)$$

由于压电约束层、RL 电路和控制电压源串联, 因此该串联电路的电压关系为

$$v(t) = -L\dot{q}(t) - Rq(t) + v_{in}(t). \quad (36)$$

其中 $v_{in}(t)$ 为控制电压, R 和 L 分别为电阻值和电感值. 将式(35)代入式(32)、(33)、(36), 整理得

$$[\mathbf{M}_{s1} + \mathbf{M}_{ve1} + \mathbf{M}_{p1}] \ddot{\mathbf{J}}_s(t) + [\mathbf{M}_{ve5} + \mathbf{M}_{p4}] \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{M}_{ve6} \ddot{\mathbf{J}}_e(t) + [\mathbf{K}_{s1} + \mathbf{K}_{ve1} + \mathbf{K}_{p1} + C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5} \mathbf{K}_{p5}^T] \mathbf{J}_s(t) +$$

$$[\mathbf{K}_{ve4} + 2\mathbf{K}_{p4} + 2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5} \mathbf{K}_{p6}^T] \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_{ve5} \mathbf{J}_e(t) - C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5} q(t) = 0, \quad (37)$$

$$[\mathbf{M}_{ve5}^T + \mathbf{M}_{p4}^T] \ddot{\mathbf{J}}_s(t) + [\mathbf{M}_{s2} + \mathbf{M}_{ve2} + \mathbf{M}_{ve3} + \mathbf{M}_{e2} + \mathbf{M}_{p2} + \mathbf{M}_{p3}] \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{M}_{ve7} \ddot{\mathbf{J}}_e(t) + [\mathbf{K}_{ve4}^T + 2\mathbf{K}_{p4}^T + 2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6} \mathbf{K}_{p5}^T] \mathbf{J}_s(t) + [\mathbf{K}_{s2} + \mathbf{K}_{ve2} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{p2} + 3\mathbf{K}_{p3} + 4C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6} \mathbf{K}_{p6}^T] \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_{ve6} \mathbf{J}_e(t) - 2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6} q(t) = \mathbf{F}_s f(t), \quad (38)$$

$$L\dot{q}(t) + Rq(t) + C_p^{-1} q(t) - C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5}^T \mathbf{J}_s(t) - 2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6}^T \mathbf{r}(t) = v_{in}(t). \quad (39)$$

式(34)、(37)~(39)即为 PHCLD 悬臂梁结构的动力学方程. 进一步定义广义坐标

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{J}_s(t)^T \quad \mathbf{r}(t)^T \quad \mathbf{J}_e(t)^T \quad q(t)]^T, \quad (40)$$

则 PHCLD 悬臂梁结构的动力学方程可改写为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (41)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{ve5} + \mathbf{M}_{p4} & \mathbf{M}_{ve6} & 0 \\ \mathbf{M}_{ve5}^T + \mathbf{M}_{p4}^T & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{ve7} & 0 \\ \mathbf{M}_{ve6}^T & \mathbf{M}_{ve7}^T & \mathbf{M}_{ve4} + \mathbf{M}_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{s1} + \mathbf{M}_{ve1} + \mathbf{M}_{p1},$$

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{M}_{s2} + \mathbf{M}_{ve2} + \mathbf{M}_{ve3} + \mathbf{M}_{e2} + \mathbf{M}_{p2} + \mathbf{M}_{p3},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{ve5} & -C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{ve6} & -2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6} \\ \mathbf{K}_{ve5}^T & \mathbf{K}_{ve6}^T & \mathbf{K}_{ve3} + \mathbf{K}_{e1} & 0 \\ -C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5}^T & -2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6}^T & 0 & C_p^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{s1} + \mathbf{K}_{ve1} + \mathbf{K}_{p1} + C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5} \mathbf{K}_{p5}^T,$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{ve4} + 2\mathbf{K}_{p4} + 2C_p^{-1} \mathbf{K}_{p5} \mathbf{K}_{p6}^T,$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{s2} + \mathbf{K}_{ve2} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{p2} + 3\mathbf{K}_{p3} + 4C_p^{-1} \mathbf{K}_{p6} \mathbf{K}_{p6}^T,$$

$$\mathbf{F}(t) = [0 \quad \mathbf{F}_s^T f(t) \quad 0 \quad v_{in}(t)]^T.$$

又已知位移传感器位于 $x = l_3$ 处, 用来测量悬臂梁的横向位移响应, 所以 PHCLD 悬臂梁结构的传感方程可表示为

$$w(l_3, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(l_3) r_i(t) = \boldsymbol{\varphi}(l_3)^T \mathbf{r}(t). \quad (42)$$

4 闭环特性分析

本文采用速度反馈控制策略设计主动控制器, 因此控制电压表示为

$$v_{in}(t) = K_c \frac{dw(l_3, t)}{dt} \quad (43)$$

式中 K_c 为反馈控制增益. 将式 (42) 代入式 (43) 得

$$v_{in}(t) = K_c \boldsymbol{\varphi}(l_3)^T \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (44)$$

再将式 (44) 代入式 (39) 得

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + C_p^{-1} q(t) - K_c \boldsymbol{\varphi}(l_3)^T \dot{\mathbf{r}}(t) - C_p^{-1} \mathbf{K}_{\rho 5}^T \mathbf{J}_s(t) - 2C_p^{-1} \mathbf{K}_{\rho 6}^T \mathbf{r}(t) = 0.$$

此时式 (41) 中的阻尼阵 \mathbf{C} 和作用力阵 $\mathbf{F}(t)$ 改写为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{K}_c \boldsymbol{\varphi}(l_3)^T & 0 & R \end{bmatrix},$$

表 1 PHCLD 悬臂梁结构参数

l_1 / mm	l_s / mm	h_s / mm	h_e / mm	b / mm	$\rho_{ve} / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\rho_p / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E_e / GPa
10	200	2	0.8	30	1 000	7 500	210
G / MPa	$d_{31} / (\text{pm} \cdot \text{V}^{-1})$	$R_1 / \text{k}\Omega$	$R_2 / \text{k}\Omega$	l_2 / mm	l_3 / mm	h_{ve} / mm	h_p / mm
0.896	-274	21.234	19.826	50	180	0.8	0.8
$\rho_s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\rho_e / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E_s / GPa	E_p / GPa	η	$\xi^e / (\text{nF} \cdot \text{m}^{-1})$	$L_1 / (\text{Henry})$	$L_2 / (\text{Henry})$
7 850	7 850	210	60.6	1.46	25.55	267.64	160.0

图 3 为 APPN 和 PHCLD 悬臂梁结构的开环阻尼特性. 从图中可以看出, PHCLD 结构的开环阻尼特性远远好于 APPN. APPN 只对第一阶主模态具有显著的振动控制作用, 但是却无法控制第二阶主模态的振动; 而 PHCLD 结构则对第一阶主模态和第二阶主模态均具有显著的振动控制作用. 另外注意到, 振动控制前后共振频率发生了较大的变化, 这是因为悬臂梁在附加 APPN 或 PHCLD 结构前后, 整体结构的质量和刚度发生较大变化造成的.

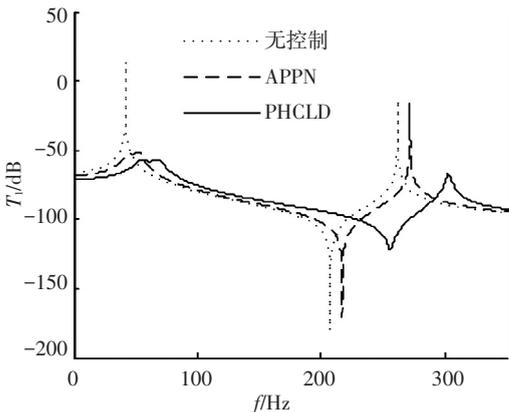


图 3 开环阻尼特性比较

在此基础上, 进一步假设反馈控制增益 $K_c = 1\ 000$, 闭环控制特性的数值仿真结果如图 4 所

$$\mathbf{F}(t) = [0 \quad \mathbf{F}_s^T f(t) \quad 0 \quad 0]^T.$$

比较两个阻尼阵 \mathbf{C} 可以看出, 速度反馈控制的作用是为悬臂梁结构提供阻尼, 因此不会破坏整个系统的稳定性.

定义 $w(l_3, t)/f(t)$ 为激振力与位移响应之间的传递函数, 并令 T_1 为 $w(l_3, t)/f(t)$ 的幅值, 由此可知, T_1 表示系统的振动控制性能, 且越小越好.

为了研究方便, 本文选取悬臂梁结构的前两阶主模态对 APPN 和 PHCLD 结构进行比较研究. PHCLD 悬臂梁结构的具体参数如表 1 所示, 其中 R_1 和 L_1 为 APPN 控制悬臂梁第一阶主模态振动的电阻值和电感值, R_2 和 L_2 为 PHCLD 结构控制悬臂梁第一阶主模态振动的电阻值和电感值.

示. 从图中可以看出, APPN 和 PHCLD 结构对第一阶主模态的闭环控制性能要优于纯主动控制, 但是对第二阶主模态的闭环控制性能则不及纯主动控制. 如果仅比较 APPN 和 PHCLD 结构, 那么 PHCLD 结构的闭环控制性能要优于 APPN. 下面对以上结果进行阐释: 在 APPN 中, 压电层通过 RL 分流电路与控制电压源相连, 因此当采用 APPN 对悬臂梁进行主动控制时, 压电层两端的电压并不等于控制电压, 而只是控制电压的一部分. 这一结构本身的特性使得 APPN 的主动控制权益总体上不及纯主动控制. 但值得注意的是, 当选择电阻 R 和电感 L 对悬臂梁的某一阶主模态进行振动控制时, 在该阶共振频率附近, APPN 与纯主动控制相比具有更强的主动控制能力和更宽的主动控制频带^[8]. 正因如此, 当本文选择 R_1 和 L_1 对悬臂梁第一阶主模态进行振动控制, APPN 对第一阶主模态的闭环控制性能优于纯主动控制, 但是对第二阶主模态的闭环控制性能则不及纯主动控制. 另一方面, 本文研究的 PHCLD 结构是在 APPN 的基础上构成的, 因此当采用 PHCLD 结构对悬臂梁进行主动控制时, PHCLD 结构的闭环控制特性与 APPN 相似. 但是由于被动约束层阻尼结构的存在, 使得 PHCLD 结构的闭环控制性能要优于 APPN.

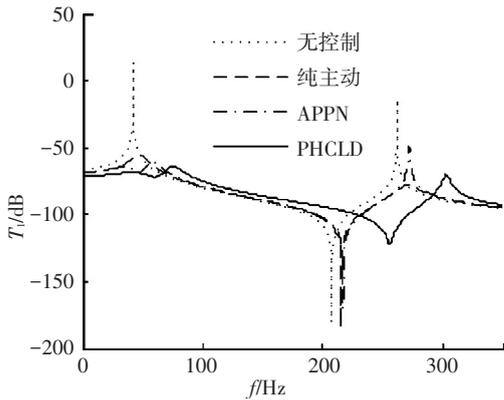


图4 闭环控制特性比较

综合开环和闭环特性分析可以看出,APPN只在窄频带(本文在第一阶主模态)具有良好的振动控制性能,而PHCLD结构则在更宽的频带(本文在第一阶主模态和第二阶主模态)具有比APPN更优的振动控制性能。

5 结 语

本文针对APPN控制频带较窄的缺点,提出了一种新型PHCLD结构,并以悬臂梁作为被控对象,对该结构进行了系统的研究。首先利用Hamilton原理和Rayleigh-Ritz法建立了PHCLD悬臂梁结构的动力学模型,其中粘弹性材料的力学特性由复剪切模量模型描述。其次采用速度反馈控制策略设计主动控制器,并对PHCLD悬臂梁结构的开环和闭环特性进行了数值仿真分析,仿真结果表明,PHCLD结构很好地克服了APPN控制频带较窄的缺点。PHCLD结构不仅能够有效地控制悬臂梁第一阶主模态的振动,而且对第二阶主模态亦具有显著的振动控制作用。

参考文献

- [1] CAI C, ZHENG H, LIU G. Vibration analysis of a beam with PCLD patch [J]. *Applied Acoustics*, 2004, 65(11): 1057-1076.
- [2] YU S C, HUANG S. Vibration of a three-layered viscoelastic sandwich circular plate [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43(10): 2215-2236.
- [3] CAO X T, ZHANG Z Y, HUA H X. Free vibration of circular cylindrical shell with constrained layer damping [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2011, 32(4): 495-506.
- [4] WILKE P S, JOHNSON C D, FOSNESS E. Whole-spacecraft passive launch isolation [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1998, 35(5): 690-694.
- [5] JOHNSON C D, WILKE P S, PENDLETON S C. SoftRide vibration and shock isolation systems that protect spacecraft from launch dynamic environments [C]//*Proceedings of the 38th Aerospace Mechanisms Symposium*. Langley Research Center; [s.n.], 2006: 1-15.
- [6] AGNES G S. Development of a modal model for simultaneous active and passive piezoelectric vibration suppression [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1995, 6(4): 482-487.
- [7] MORGAN R A, WANG K W. An integrated active-parametric control approach for active-passive hybrid piezoelectric network with variable resistance [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, 9(7): 564-573.
- [8] TSAI M S, WANG K W. On the structural damping characteristics of active piezoelectric actuators with passive shunt [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 221(1): 1-22.
- [9] TANG J, WANG K W. Active-passive hybrid piezoelectric networks for vibration control: comparisons and improvement [J]. *Smart Materials and Structures*, 2001, 10(4): 794-806.
- [10] TSAI M S, WANG K W. A coupled robust control/optimization approach for active-passive hybrid piezoelectric networks [J]. *Smart Materials and Structures*, 2002, 11(3): 389-395.
- [11] ZHAO Y. Vibration suppression of a quadrilateral plate using hybrid piezoelectric circuits [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2010, 16(5): 701-720.
- [12] TSAI M S, WANG K W. Control of a ring structure with multiple active-passive hybrid piezoelectric networks [J]. *Smart Materials and Structures*, 1996, 5(5): 695-703.
- [13] TANG J, WANG K W. High authority and nonlinearity issues in active-passive hybrid piezoelectric networks for structural damping [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2000, 11(8): 581-591.
- [14] HAGOOD N W, CHUNG W H, FLOTOW A V. Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1990, 1(3): 327-354.
- [15] DUTOIT N E, WARDLE B L, KIM S G. Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters [J]. *Integrated Ferroelectrics*, 2005, 71(1): 121-160.
- [16] DIETL J M, GARCIA E. Beam shape optimization for power harvesting [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2010, 21(6): 633-646.