

GPS/INS 组合导航的变分贝叶斯自适应卡尔曼滤波

沈 忱, 徐定杰, 沈 锋, 蔡佳楠

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 150001 哈尔滨)

摘要:为解决 GPS/INS 组合导航的数据融合问题中卡尔曼滤波器因噪声统计特性会发生变化而性能严重退化的问题,针对组合导航的系统模型提出并推导了一种基于变分贝叶斯学习的自适应卡尔曼滤波算法.该方法从概率角度将系统状态与噪声的统计矩一起作为待估计的随机变量,在每次递推地对状态进行估计之前,用变分贝叶斯学习迭代逼近得到噪声的后验分布.仿真结果证明:在组合导航系统中,该自适应算法能够较好地跟踪变化的噪声方差,并对速度、位置等系统状态进行估计.

关键词:卡尔曼滤波;自适应;变分贝叶斯;组合导航

中图分类号: V241.62

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2014)05-0059-07

Variational bayesian adaptive Kalman filtering for GPS/INS integrated navigation

SHEN Chen, XU Dingjie, SHEN Feng, CAI Jianan

(College of Automation, Harbin Engineering University, 150001 Harbin, China)

Abstract: To circumvent the problem in GPS/INS integrated navigation for data infusion that Kalman filter degrades severely since the statistics of the noise might be time-variant, an adaptive Kalman filtering algorithm based on variational Bayesian learning is suggested and used in the integrated navigation system model in which both the moment of noise and the states are considered as stochastic parameters and estimated together. Using a probabilistic approach, a concrete derivation is given to represent how variational Bayesian learning works in a recursive way to approximate the true posterior of the noise together with the states. Experimental results demonstrate that the proposed filter is adaptive and performs well in tracking variances of the noise and estimating the states including position and velocity in GPS/INS integrated navigation system.

Keywords: Kalman filtering; adaptive; variational bayes; integrated navigation

经典卡尔曼滤波器的设计是针对系统参数与噪声确定且在工作过程中保持不变的状态空间模型,但在组合导航等实际工程领域的建模过程中,由于系统本身模型可能存在摄动,或受到统计特性未知的噪声干扰及其他控制输入等诸多不确定因素,经典滤波器中假设不变的参数在系统运行过程中都有可能发生变化,因此,上述假设通常不能得到很好的满足,从而使滤波器产生更大的

估计误差,极端情况下甚至不能工作^[1].近年来,为了增强系统的自适应性,许多自适应算法都相继被提出,用以确定因不同的扰动而发生变化的参数^[2-3].

文献[4]概括了目前几种主要的自适应卡尔曼滤波算法,包括贝叶斯法、最大似然法、相关法以及协方差匹配法.其中,出于计算方面便利性的考虑,相关法相比于其他方法受到了更多关注.事实上,所有这些算法都可以被视为贝叶斯方法在不同情形下的特例.但在大多数情形下,积分项过于复杂,或者变量维数过高,导致积分运算求解困难^[5],使得贝叶斯方法在应用上有很大局限性.于是,为了避开求解后验分布所涉及的积分运算,采

收稿日期: 2012-12-17.

基金项目: 中国博士后科学基金特别资助项目(2012T50330).

作者简介: 沈 忱(1988—),男,博士研究生;

徐定杰(1966—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 沈 忱, shen15503@126.com.

样方法受到了关注.其中以马尔可夫链蒙特卡洛方法最为典型,它属于随机采样逼近,能够无限逼近得到精确的后验分布,但是这种精确性是以牺牲运算量为代价的.所以,在很多实时性要求较高的场合,譬如本文关注的组合导航,采样方法是不提倡的.

另一种可行的、更快速的逼近方法是确定型逼近.本文所采用的变分贝叶斯学习就属于这类逼近.变分贝叶斯学习的叫法来源于文献[6].它最早源于计算机科学领域,文献[7]对该理论体系进行了详细的阐述.虽然变分贝叶斯方法最初的提出大都是为了解决机器学习以及模式识别领域当中的参数估计与模型选择等问题,但是,近年来许多学者也陆续将其与状态估计问题相结合,应用到滤波器相关的设计中来,使变分贝叶斯的应用领域得到了极大扩展.其中,文献[8]最早提出将变分贝叶斯用于卡尔曼滤波的动态噪声参数估计;文献[9]将其用于有未知输入干扰的状态空间模型进行噪声、状态估计;文献[10]用变分贝叶斯对整个随机系统的参数估计;而文献[11]将变分贝叶斯与卡尔曼滤波结合,用于高维数图像的分析.

考虑到实际 GPS/INS 组合导航系统中,由于运载体自身形变产生的杆臂效应,或导航设备受到外界环境干扰引入的误差,通常以 GPS 和 INS 所测导航参数的差为量测的噪声统计信息将会变得不确定,且容易发生变化.本文在文献[8-9]基础上,进一步详细阐述了变分贝叶斯参数估计的机理并利用它,从贝叶斯滤波的角度,设计了一种针对 GPS/INS 组合导航的高斯线性模型的噪声自适应卡尔曼滤波器.每次时间更新后,用变分贝叶斯学习估计得到方差阵的后验分布,再根据该噪声统计矩对运载体的速度与位置状态进行更新,从而达到自适应滤波的目的.实验部分将验证该算法在组合导航系统中在噪声可变环境下对于运载体运动状态估计的有效性.

1 准备工作

1.1 变分贝叶斯学习

在模型选择与参数估计的问题当中,核心任务是在得到观测数据后,根据已有先验知识估计一组参数 θ . 根据贝叶斯准则, θ 的后验分布表示如下:

$$p(\theta | z) = \frac{p(\theta, z)}{p(z)} = \frac{p(z | \theta)p(\theta)}{\int p(z, \theta) d\theta}. \quad (1)$$

其中一个关键的步骤是计算上式的分母,也叫证据或者边缘似然函数.当观测量的维数或者参数的个数增加,上述积分将十分困难,甚至无法求解.考虑到诸如 MCMC 的数值计算方法的效率问题,采用变分贝叶斯学习来逼近求解参数的后验分布.该方法提议用一个新的、形式较为简单的分布(简单是因为它可求)来逼近真实的后验分布^[6].对式(1)分母,即边缘似然函数取对数,运用一次 Jensen 不等式,如下所示:

$$\ln p(z) = \ln \int p(z, \theta) d\theta = \ln \int q(\theta) \frac{p(z, \theta)}{q(\theta)} d\theta \geq \int q(\theta) \ln \frac{p(z, \theta)}{q(\theta)} d\theta = F(q(\theta)).$$

其中 $F(q(\theta))$ 源于统计物理学,是自由能量的负值.根据文献[5]中的建议再对边缘似然函数进行数学处理,可以得到

$$\begin{aligned} \ln p(z) &= \iint q(\theta) \ln \frac{p(\theta, z)}{p(\theta | z)} d\theta = \\ &= \iint q(\theta) \ln \frac{p(\theta, z)}{q(\theta)} d\theta + \\ &= \iint q(\theta) \ln \frac{q(\theta)}{p(\theta | z)} d\theta = \\ &= F(q(\theta)) + D_{KL}(q(\theta) \| P(\theta | z)). \quad (2) \end{aligned}$$

式(2)中最后一个等号右边的第二项被定义为 Kullback-Leibler (KL) 散度,具有如下性质:当新的分布 $q(\theta)$ 等于真实后验 $p(\theta | z)$ 时, D_{KL} 散度等于零为最小值.此时 $F(q(\theta))$ 达到最大值.于是,我们可以把 $F(q(\theta))$ 当作 $\ln p(z)$ 的下界,通过不断最大化 $F(q(\theta))$ (下界) 来使 $q(\theta)$ 逼近 $p(\theta | z)$. 将 $F(q(\theta))$ 关于 $q(\theta)$ 求导并置零,可以得到 $q(\theta)$ 的通解表达式如下^[6]:

$$q(\theta_i) = \frac{\exp(E_{q(\theta_{k \neq i})} [\ln p(z, \theta)])}{\int \exp(E_{q(\theta_{k \neq i})} [\ln p(z, \theta)]) d\theta_k}. \quad (3)$$

其中, $E_{q(\theta_{k \neq i})} []$ 代表关于 $q(\theta_{k \neq i})$ 的期望,可以认为参数集合近似分布的联合概率密度函数可分解为各个参数独立分布的乘积.这个假设是变分贝叶斯学习核心所在,在求解后验分布时具有很大的计算优势,而该假设的理论基础最早出现在均值域理论领域 (Mean Field Theory), 多篇关于变分贝叶斯方法的论文也证明了该理论及其在实际运用中的可行性与便利性^[6,12]. 这样,多变量的联合概率分布 $p(\theta)$ 就可以近似为各变量边缘分布 $q(\theta_i)$ 的乘积,使得对多变量的联合估计可以方便地转化为对这些变量边缘分布的迭代估计,从而显著降低计算的复杂程度.

根据式(3),变分贝叶斯学习可以归纳如下:对于每个待估计参数,通过计算联合概率密度函数关于其他参数分布的期望,可以得到该参数新的分布.如此迭代计算,直至负自由能量(下界)达到最大值.这里涉及到变分贝叶斯算法的收敛性问题,即判断何时下界达到最大值,而下界可以表示为

$$F[q(\boldsymbol{\theta})] = E_q \left[\ln \frac{p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \mathbf{z})}{q(\theta_1)q(\theta_2)\dots q(\theta_n)} \right] = E_q[\ln p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \mathbf{z})] - E_{q(\theta_1)}[\ln q(\theta_1)] - E_{q(\theta_2)}[\ln q(\theta_2)] \dots - E_{q(\theta_n)}[\ln q(\theta_n)]q(\theta_n).$$

其中, $E_{q(\theta_i)}[\cdot]$ 表示对 $[\cdot]$ 表达式求关于 θ 中除去 θ_i 外其他随机变量的期望.由文献[5]可知,该下界函数是关于所有 $q(\theta)$ 的凸函数,且随着迭代循环估计的进行而递增.根据文献[13]中凸函数性质,下界 $F[q(\boldsymbol{\theta})]$ 一定收敛,且曲线梯度趋于平滑.本方法中,可以用相邻两次迭代的下界的差值作为判断收敛的依据,当差值小于某一阈值后可以判定算法收敛,得到估计结果.所以,本质上讲,变分贝叶斯参数迭代估计属于梯度下降算法^[13].

需要指出的是,根据式(3)的形式,如果在共轭指数函数分布域(conjugate-exponential family, CE)中合理选取待估计参数的先验分布,它的近似分布也将得到形式相同、参数不同的后验分布.而CE域是一类应用很广的分布域,大多数常用分布都属于这个域.它的上述性质也在Beal的博士论文的2.4节作了详细证明^[6],在之后的推导中我们也将看到合理选取CE中的分布带来的计算上的便利性.

1.2 组合导航滤波模型

本文研究对象为零输入、高斯线性离散时间的GPS/INS组合导航系统,其模型通常表述如下^[14-15]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (4)$$

在 k 时刻,时变观测噪声 \mathbf{v}_k 被认为是一个 $d \times 1$ 的,方差为 $\mathbf{R}_k (d \times d)$ 的零均值高斯噪声序列,满足 $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$.更特别的,选取的协方差矩阵是一个对角线元素依次为 d 个 $\sigma_{k,i}^2$ 的对角阵. \mathbf{z}_k 是一个 $d \times 1$ 的观测向量.系统状态变量 \mathbf{x}_k (包括位置误差、速度误差等) 是一个 $n \times 1$ 的,初始化均值和协方差分别为 m_0 与 \mathbf{P}_0 的服从高斯分布的向量.即满足 $\mathbf{x}_k \sim N(\mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)$. \mathbf{w}_k 、 \mathbf{G}_k 、 $\boldsymbol{\Phi}_k$ 与 \mathbf{H}_k 分别是系统噪声、系统噪声输入矩阵、状态转移矩阵与观测矩阵,它们都被认为是已知的.

考虑到推导的简洁性,用 $\mathbf{z}_{1:k}$ 表示从时刻1到 k 的观测序列,假设 $\boldsymbol{\theta}$ 代表被估计参数,则 $\boldsymbol{\theta}_k^-$ 表征了在时刻 k 观测前,根据 $k-1$ 时刻估计的先验参数值. $\boldsymbol{\theta}_k$ 表征在进行第 k 次观测后得到的更新的后验估计值, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代表 $\boldsymbol{\theta}$ 的期望值.

显然,当观测噪声服从方差可变的高斯分布时,经典的卡尔曼滤波器的估计性能就会因为现实噪声统计特性与设计值不匹配而降低,当噪声变化频繁或与预期值相去甚远时,滤波器甚至不能工作.一个可行的办法就是在每次状态更新前对观测噪声的分布进行实时估计,这也是自适应滤波的一个重要特点:实时更新系统或噪声参数.本文采用的是变分贝叶斯学习.同时,因为该分布是高斯分布,所以可以用其二阶统计矩(均值或方差)来刻画其分布.在下一节中,文章将以贝叶斯准则为基础,从概率论的角度对于改进的卡尔曼滤波算法进行推导.

2 自适应卡尔曼滤波

2.1 参数估计推导

在这个模型中,结合贝叶斯准则(1),我们感兴趣的参数系统状态与观测噪声方差的后验分布表述如下:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{z}_{1:k})} = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{1:k-1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)}{p(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{1:k-1})} = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{z}_{1:k-1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) p(\mathbf{z}_{1:k-1})} = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{R}_k. \quad (6)$$

对于式(5)中倒数第二项中的 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$,假设第 k 次测量 \mathbf{z}_k 与之前的测量无关,固可化简为 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$.而对于一阶马尔科夫过程,又有

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{R}_k, \mathbf{R}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{R}_k | \mathbf{R}_{k-1}) \cdot p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{R}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}).$$

对 \mathbf{x}_{k-1} 与 \mathbf{R}_{k-1} 积分,可以得到如下的Chapman-Kolmogorov方程:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \cdot p(\mathbf{R}_k | \mathbf{R}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{R}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} d\mathbf{R}_{k-1}. \quad (7)$$

所以,在贝叶斯滤波理论当中,递推的滤波算法每一步可以被看作是由预测(7)和更新(5)组成.在预测步骤中,参数的分布依赖于第 $k - 1$ 次观测,时间更新后,得到参数的先验分布(7);在第 k 次观测更新后,根据贝叶斯准则对先验进行校正,从而得到后验分布(5),为 $k + 1$ 时刻前的预测步骤提供输入.另外,注意到这个预测 - 更新步骤中,除了一些极简单特殊的情形,式(6)与式(7)中的积分基本无法得到其解析解,即使先前已经假设系统是高斯线性的.

现假设式(7)中各个参数是相互独立的,根据先验知识,系统状态与观测噪声方差分别服从高斯分布和逆伽玛分布:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) p(\mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = N(\mathbf{x}_k | \mathbf{m}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \prod_{i=1}^d G_i(\sigma_{k,i}^2 | \alpha_{k,i}^-, \beta_{k,i}^-). \quad (8)$$

现根据变分贝叶斯学习,进行如下设计:在第 k 次观测后,建议用 1 个新的分布 $q(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ 来代替 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k})$. 同理,也认为该近似分布是因子可分解的,即: $q(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = q(\mathbf{x}_k) q(\mathbf{R}_k)$. 这里,考虑到表述的简洁,略去了近似分布中参数 $\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k$ 对于 $\mathbf{z}_{1:k}$ 依赖的表述.

根据通解(3)的表达式,对每个参数分布取对数表达式计算依次如下:

$$\begin{aligned} \ln q(\mathbf{x}_k) &= E_{R_k} [\ln p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{z}_{1:k})] + C = \\ \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) &+ E_{R_k} [\ln p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)] + C = \\ &- 0.5 \mathbf{x}_k^T ((\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{H}_k) \mathbf{x}_k + \\ &\mathbf{x}_k^T [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} \mathbf{m}_k^- + \mathbf{H}_k^T \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{z}_k] + C. \end{aligned} \quad (9)$$

其中 C 代表归一化因子,它代表对式(6)中的证据所求期望的值,在变分贝叶斯学习中,它被认为是常数而略去.

对式(9)两边取指数表达式后发现, $q(\mathbf{x}_k)$ 是一个拥有新的均值与方差的高斯分布.这得益于之前所叙述的在共轭指数函数域中选取先验分布的优越性.于是有 $q(\mathbf{x}_k) = N(\mathbf{x}_k | \mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k)$, 其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \hat{\mathbf{R}}_k \mathbf{H}_k]^{-1} = \mathbf{P}_k^- - \\ &\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\hat{\mathbf{R}}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^-, \quad (10) \\ \mathbf{m}_k &= \mathbf{P}_k [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} \mathbf{m}_k^- + \mathbf{H}_k^T \hat{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{z}_k] = \mathbf{m}_k^- + \\ &\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\hat{\mathbf{R}}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T)^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{m}_k^-), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = E \mathbf{R}_k = \text{diag} [E \sigma_{k,1}^2, E \sigma_{k,2}^2, \dots, E \sigma_{k,d}^2]. \quad (12)$$

同理,对于变量 \mathbf{R}_k 有

$$\begin{aligned} \ln q(\mathbf{R}_k) &= E_{x_k} [\ln p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{z}_{1:k})] + C = \\ \ln p(\mathbf{R}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) &+ E_{x_k} [\ln p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)] + C = \\ &\sum_{i=1}^d \left[\left(-\alpha_{k,i}^- - \frac{1}{2} - 1 \right) \ln \sigma_{k,i}^2 \right] - \\ &\sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_{k,i}^2} \left[\beta_{k,i}^- + \frac{1}{2} E_{x_k} [((\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)_i)^2] \right] + C. \end{aligned} \quad (13)$$

所以,方差 \mathbf{R}_k 仍然服从跟式(8)中形式一样的逆伽玛分布

$$q(\mathbf{R}_k) = \prod_{i=1}^d G_i(\sigma_{k,i}^2 | \alpha_{k,i}, \beta_{k,i}). \quad (14)$$

新分布的参数分别为

$$\alpha_{k,j} = \alpha_{k,i}^- + \frac{1}{2}, \quad (15)$$

$$\beta_{k,j} = \beta_{k,i}^- + \frac{1}{2} E_{x_k} [((\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)_i)^2]. \quad (16)$$

上述两式在变分贝叶斯学习中也被称作参数更新方程.考虑到

$$E_{x_k} [\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] = \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T + \mathbf{P}_k. \quad (17)$$

展开式(16)第二项得

$$\begin{aligned} E_{x_k} [((\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)_i)^2] &= ((\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{m}_k)_i)^2 + \\ &(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T)_i. \end{aligned} \quad (18)$$

式中 \mathbf{m}_k 与 \mathbf{P}_k 分别是新的高斯分布中的两个参数.而又根据逆伽玛分布的性质,式(12)中的每个元素可以分别计算得到

$$E \sigma_{k,i}^2 = \frac{\beta_{k,i}}{\alpha_{k,i}}, \quad i = 1 \sim d. \quad (19)$$

最后考虑算法收敛的判断.下界函数的计算可以表示为

$$\begin{aligned} F[\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k] &= E_q [\ln p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{z}_{1:k})] - E_{q(\mathbf{R}_k)} [\ln q(\mathbf{x}_k)] - \\ E_{q(\mathbf{x}_k)} [\ln q(\mathbf{R}_k)] &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \mathbf{P}_k^- - \\ &\frac{1}{2} E_{x_k} [(\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k^-)^T (\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k^-)] - \\ &\frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}_k| + \sum_{i=1}^d E_{\sigma_{k,i}^2} \left[\left(-\alpha_{k,i}^- - 1 \right) \ln \sigma_{k,i}^2 - \frac{\beta_{k,i}^-}{\sigma_{k,i}^2} \right] - \\ &\frac{d}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}_k| - \frac{1}{2} E_{x_k, \mathbf{R}_k} [(\mathbf{z}_k - \\ &\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)] - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{P}_k| - \frac{n}{2} (1 + \\ &\ln(2\pi)) + \sum_{i=1}^d (-\alpha_{k,i} - \ln(\beta_{k,i} \Gamma(\alpha_{k,i}))) - (1 + \\ &\alpha_{k,i}) \varphi(\alpha_{k,i}). \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 与 $\varphi(\cdot)$ 分别为 Gamma 函数和 digamma 函数.当 $|F^{(n)}[\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k] - F^{(n-1)}[\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k]| < \Delta$ (Δ 为

一较小量) 时, 即相邻两次迭代的下界值变化可忽略不计, 可认定算法收敛, 进入下一滤波时刻。

这样, 式(9) ~ (10) 就形成了对于状态变量和观测噪声方差实时进行联合迭代估计的变分贝叶斯学习算法。2.2 节将该算法与卡尔曼滤波算法结合, 得到新的自适应滤波器。

2.2 算法总结

变分贝叶斯卡尔曼滤波与经典卡尔曼滤波一样, 可以划分为预测(时间更新)和更新(数据更新)两个步骤。

在零初时刻, 初始化系统状态与噪声的超参数。

在某个 $k - 1$ 时刻观测后, 根据式(4)中系统状态方程进行时间更新, 对系统状态变量均值与方差首先进行预测, 如下:

$$m_k^- = \Phi_k m_{k-1},$$

$$P_k^- = \Phi_k P_{k-1} \Phi_k^T + G_k Q_k G_k^T.$$

对于观测噪声方差分布参数的时间递推, 本文根据文献[16]最大熵值约束定理的论述, 取逆伽玛分布的超参数:

$$\alpha_{k,i}^- = \lambda \alpha_{k-1,i}, \quad i = 1 \sim d,$$

$$\beta_{k,i}^- = \lambda \beta_{k-1,i}, \quad i = 1 \sim d.$$

其中 λ 是一个在 $(0, 1]$ 内的变化因子, 它的引入用以保证时变的方差 σ^2 能以一定的概率分布(譬如本文的逆伽玛)变化, 即使后验与先验拥有相同的概率密度函数形式。正如 1.1 节最后一段所讨论的, 这将为变分贝叶斯学习提供算法上的保证与计算上的便利。

在 k 时刻观测后, 根据 k 时刻数据依次对噪声方差和系统状态进行估计。需要分别计算式(19)、(10) ~ (12)、(15) 与 (16)。算法具体流程如图 1。

注意到上述更新步骤中, 运用变分贝叶斯方法, 不仅系统状态变量统计矩(均值 m_k 与协方差 P_k) 的估计需要确定的噪声方差, 噪声方差的计

$$x = [\varphi_E, \varphi_N, \varphi_U, \Delta v_E, \Delta v_N, \Delta v_U, \Delta L, \Delta \lambda, \Delta h, \varepsilon_{bx}, \varepsilon_{by}, \varepsilon_{bz}, \nabla_{bx}, \nabla_{by}, \nabla_{bz}]^T.$$

式中下标 E, N, U 代表导航坐标系(东北天坐标系)的 3 个轴; $\varphi_E, \varphi_N, \varphi_U$ 为平台失准角; $\Delta v_E, \Delta v_N, \Delta v_U$ 表示速度误差, $\Delta L, \Delta \lambda, \Delta h$ 代表位置误差; $\varepsilon_{bx}, \varepsilon_{by}, \varepsilon_{bz}$ 为沿载体坐标系 3 个轴向陀螺漂移; $\nabla_{bx}, \nabla_{by}, \nabla_{bz}$ 为沿载体坐标系 3 个轴向加速度计漂移。本实验中只关注输出的位置误差与速度误差的估计值。于是, 1.2 节中 $d = 3, n = 15$ 。

在 Matlab 环境下设计轨迹发生器模拟飞行器的理想运动。通过设定初始的位置、速度、加速度、姿态、姿态角变化率等参数, 描述理想运动轨

迹。设定各初始值分别为: 经度 120° , 纬度 45° , 高度 300 m, 飞行器加速度、速度、姿态角、姿态角变化率均为 0, 且初始化自适应算法的变分超参数 $\alpha_i = 1, \beta_i = 0.02$, 其中 $i = 1, 2, 3$ (因为位置观测量为三维矢量)。

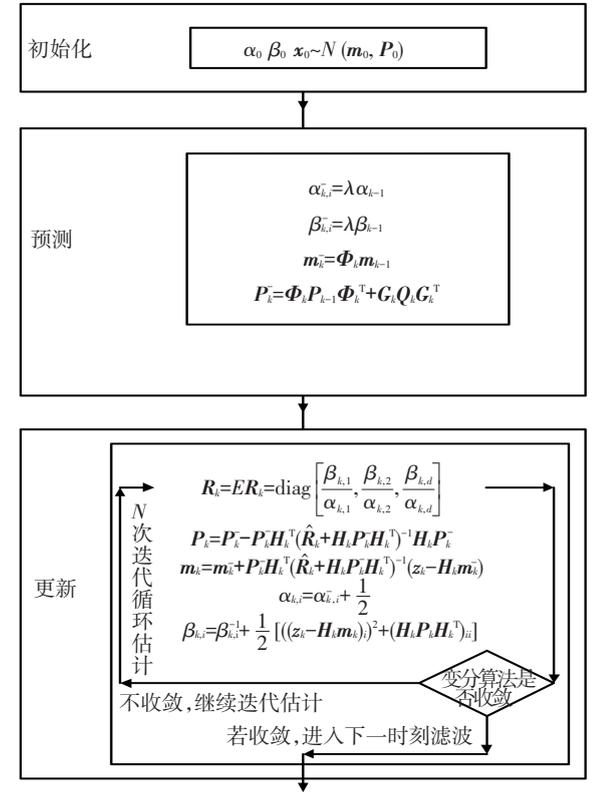


图 1 变分贝叶斯卡尔曼滤波

3 仿真实验

仿真实验主要从两方面来验证算法的性能与效果: 第一, 对系统状态量的估计; 第二, 对变化噪声的跟踪。

参考文献[15]建模方法, 取东北天坐标系为导航坐标系, 以 GPS 和 INS 测得位置的差值为观测量, 选取 INS 的误差为 15 维状态变量, 即

迹。设定各初始值分别为: 经度 120° , 纬度 45° , 高度 300 m, 飞行器加速度、速度、姿态角、姿态角变化率均为 0, 且初始化自适应算法的变分超参数 $\alpha_i = 1, \beta_i = 0.02$, 其中 $i = 1, 2, 3$ (因为位置观测量为三维矢量)。

图 2 显示了该飞行器在 1 000 s 仿真时间段内的飞行轨迹, 采样间隔为 1 s。

为验证该滤波器的变分贝叶斯自适应滤波效果, 将观测噪声方差阵在时间 $[1, 250]$ 内设为

$$R = \text{diag}([r_1 \ r_2 \ r_3]) = \text{diag}([\sqrt{2} \times 10^{-2} \text{rad}]^2 \ (\sqrt{5} \times 10^{-2} \text{rad})^2 \ (\sqrt{500} \text{m})^2]$$

其中 diag 为对角阵函数.然后在 251~700 s, 701~1 000 s 内分别设为

$$R = \text{diag}([10r_1 \ 10r_2 \ 2r_3]),$$

$$R = \text{diag}([5r_1 \ 5r_2 \ 1.5r_3]).$$

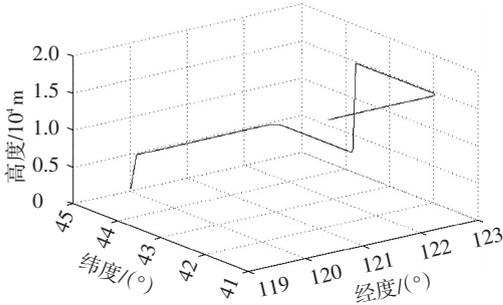


图 2 飞行器运动轨迹

图 3 与图 4 给出了上述假设条件下,基于变分贝叶斯的自适应卡尔曼滤波器的滤波误差图,并与单独使用 INS 时的情形做比较.图 3 实线为滤波后飞行器位置误差的估计值,图 4 实线为滤波后飞行器速度误差的估计值.发现无论是位置误差估计,还是速度误差估计,由于惯导误差的积累,未经滤波的状态估计(虚线表示)在一定时刻后均出现发散.考察本文设计的组合模型的滤波器,其观测量的噪声统计特性未知,且随时间发生变化,但却有着较好的滤波精度,误差值较小,依然能对位置误差与速度误差进行良好的估计.

更进一步,图 5 与图 6 比较了噪声变化条件下卡尔曼滤波与自适应滤波的误差.如图所示,250 s 时刻之前,由于噪声没有发生变化,卡尔曼滤波器与自适应滤波器有着相当的滤波误差.而 250 s 时刻之后,噪声开始发生变化,由于卡尔曼滤波器自身的局限性,并不能够在线调整,以至于在之后 750 s 的时间里,总体估计误差显著增大,相比自适应滤波的曲线,滤波精度较差,尤以 250~700 s 间变化波动最为剧烈.

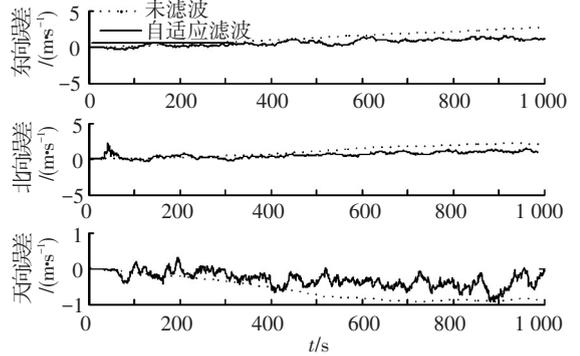


图 4 滤波前后速度误差对比

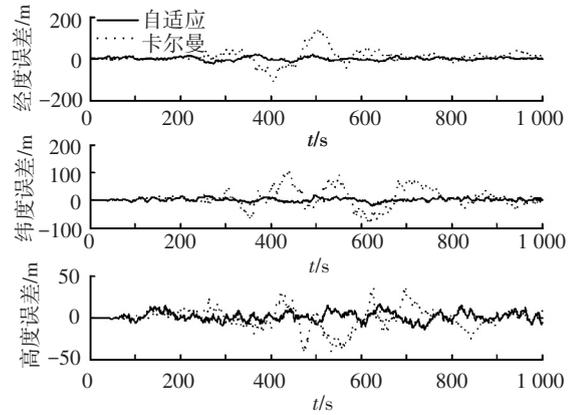


图 5 滤波算法位置误差对比

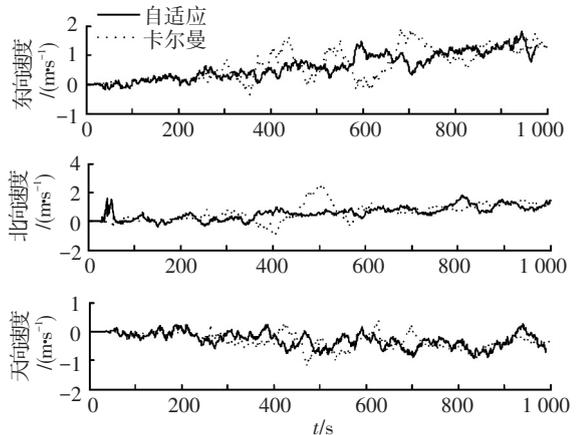


图 6 滤波算法速度误差对比

图 7 给出了该自适应滤波器对观测噪声方差的跟踪情况.从图中可以看出,对于每一维噪声参数不确定的量测,在给定初始值后,滤波器很快估计出各自的噪声统计特性,而当后来真实噪声方差发生变化时,还能对其进行动态跟踪,并有着较为可观的估计精度.而传统卡尔曼滤波器因为假设模型的所有参数已知,并不会随时间推移而发生变化,因此不具备自适应滤波功能,这也限制了其在工程领域内的广泛应用.

值得注意的是,当噪声方差发生突变后,跟踪曲线会略微延迟,后经过快速调整跟踪到真实值.这是由于利用变分贝叶斯方法对参数估计本质上是一个逐步逼近的过程,它不同于其他采样的参

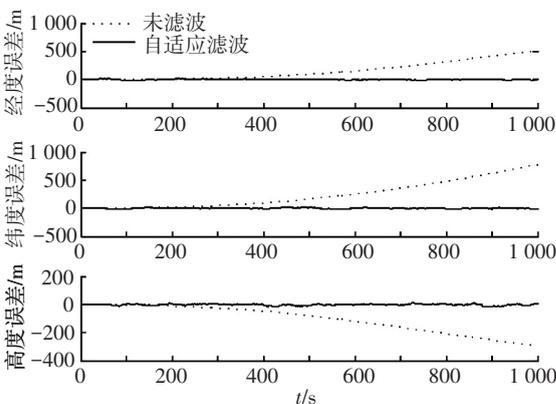


图 3 滤波前后位置误差对比

数估计方法,需要通过反复迭代计算参数的近似分布,当下界的变化可以忽略时才能认为近似分布为参数的真实分布,即给出合理的参数估计值。所以,如果当噪声保持不变,变分贝叶斯学习算法就会迅速收敛(通常一到两次迭代循环),更快地估计出方差值。

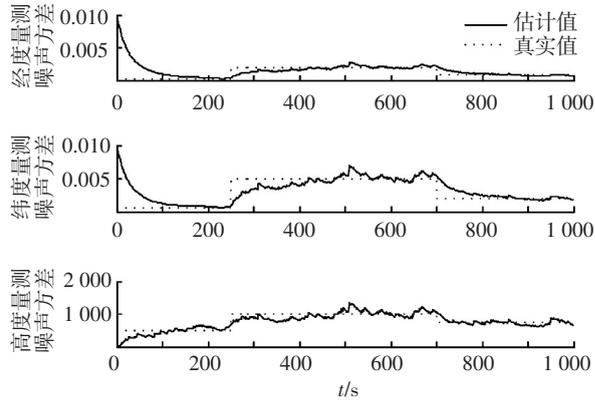


图7 滤波器噪声方差跟踪

4 结 语

针对实际噪声统计特性未知或变化的GPS/INS组合导航系统,本文提出的基于变分贝叶斯学习的自适应卡尔曼滤波算法,用变分贝叶斯学习将观测噪声的方差作为随机变量进行估计,实时跟踪噪声,同时能对系统状态进行良好的估计,具有令人满意的滤波精度,在工程上较有应用价值。

参 考 文 献

[1] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 1960, 82(D): 35-45.

[2] KIM K H, LEE J G, CHAN G P. Adaptive two-stage Kalman filter in the presence of unknown random bias [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2006, 20(7): 305-319.

[3] HSIEH C S. On the optimality of two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs [J]. Asian Journal of Control, 2010, 12(4): 510-523.

[4] MEHRA R. Approaches to adaptive filtering [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1972, 17(5): 693-698.

[5] BISHOP C M. Pattern recognition and machine learning [M]. New York: Springer, 2007: 462-469.

[6] BEAL M J. Variational algorithms for approximate Bayesian inference [D]. London: University College London, 2003: 53-70.

[7] ATTIAS H. Inferring parameters and structure of latent variable models by variational Bayes [C]//Proceedings of the 15th Conference Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1999: 21-30.

[8] SARKKA S, NUMMENMAA A. Recursive noise adaptive Kalman filtering by variational Bayesian approximations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(3): 596-600.

[9] SUN Junlong, ZHOU Jie, GU Xuekui. Variational Bayesian two-stage Kalman filter for systems with unknown inputs [J]. Procedia Engineering, 2012, 29(2012): 2265-2273.

[10] VRETTAS M D, CORNFORD D. Estimating parameters in stochastic systems: a variational Bayesian approach [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2011, 240(23): 1877-1900.

[11] BOUJEMMA A, RODET T. Variational Bayesian Kalman filtering in dynamical tomography [C]//Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Prague: [s.n.], 2011: 4004-4007.

[12] ARMAGEN A, ZARETZKI R L. A note on mean-field variational approximations in Bayesian probit models [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2011, 55(1): 641-643.

[13] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 67-78.

[14] 付梦印,邓志红,闫丽萍. Kalman滤波理论及其在导航系统中的应用 [M]. 第2版. 北京:科学出版社, 2010: 12-15.

[15] YUAN Gannan, YUAN Kefei, ZHANG Hongwei. A variable proportion adaptive federal Kalman filter for INS/ESGM/GPS/DVL integrated navigation system [C]//Proceedings of the 2011 Fourth International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization. Washington, DC: [s.n.], 2011: 978-981.

[16] KARNY M, DEDECIUS K. Approximate Bayesian recursive estimation: on approximation errors [R]. Prague: UTIA AV CR, 2012: 3-7.

(编辑 张 宏)