

# 运费无差异的多品种流交通网络最小费用算法

寇玮华, 崔皓莹

(西南交通大学 交通运输与物流学院, 610031 成都)

**摘要:**为了解决交通网络应用中多品种流问题,对运送费用无差异的多品种流交通网络进行分析,在借鉴连续最短路算法和 Ford-Fulkerson 算法基础上,构造了复合参数和复合指标.基于设定的复合参数、复合指标以及相应的计算规则,构建了多品种流交通网络最小费用流分配算法,通过算例验证了算法的可行性.运费无差异的多品种流交通网络最小费用算法为解决交通运输领域普遍存在的运送费用无差异的多品种流最小费用流问题提供了应用基础.

**关键词:**多品种流;交通网络;最小费用流;复合参数和复合指标;连续最短路算法;Ford-Fulkerson 算法

中图分类号: U113

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2014)08-0122-07

## A minimum cost algorithm for multicommodity flow traffic network which has same convey cost

KOU Weihua, CUI Haoying

(School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, 610031 Chengdu, China)

**Abstract:** To solve the multicommodity flow problem in traffic network, this paper analyses the multicommodity flow traffic network with same cost, and builds the composite parameters and composite indicators on account of the successive shortest path algorithm and the Ford-Fulkerson algorithm. Based on the corresponding calculation rules of composite parameters and composite indicators, this paper builds a minimum cost flow algorithm for multicommodity flow traffic network and the feasibility of this algorithm is verified by an example. This algorithm provides the basis to solve the problem of multicommodity flow minimum cost flow with same cost which is quite widespread in the field of transportation.

**Keywords:** the multicommodity flow; traffic network; minimum-cost flow; composite parameters and composite indicators; successive shortest path algorithm; Ford-Fulkerson algorithm

最小费用流问题是网络与流的核心问题之一,最基本的算法是 Ford-Fulkerson 算法,其他的算法还有网络单纯形算法(graph simplex algorithm)、松弛算法(relaxation algorithm)、消圈算法(cycle-canceling algorithm)、瑕疵算法(out-of-kilter algorithm)等等<sup>[1-8]</sup>,这些算法都可以解决单一品种流的最小费用流分配问题.在实际的交通网络应用中,普遍出现了多品种流问题,所以有了流变换、流分解、组合应用、多品种流及预流推进等新的理论和方法<sup>[9-13]</sup>,但这些算法都没有彻底

解决多品种流的最小费用流分配问题.针对交通运输领域出现的多品种流交通网络,有必要对其最小费用流分配问题作进一步研究,并在其他算法的基础上,构造可行的最小费用流分配算法.

本文主要对运送费用无差异的多品种流交通网络相关问题进行分析,再基于连续最短路算法(successive shortest path algorithm)和 Ford-Fulkerson 算法的思路,构造相应的多品种流交通网络的最小费用流算法.

### 1 运送费用无差异的多品种流交通网络分析

#### 1.1 运送费用无差异的多品种流的交通网络引例

为了解运送费用无差异的多品种流交通网络最小费用流问题,也为清晰地阐述相关算法的研

收稿日期: 2013-05-14.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271176).

作者简介: 寇玮华(1967—),男,副教授.

通信作者: 崔皓莹, 498910902@qq.com.

究,先给出运送费用无差异的多品种流交通网络的一个引例.

**引例** 有一交通网络如图 1 所示,图中的边分别给出了运送能力和运送量,即边的容量、流量(零流)、费用. 其中  $x_1$  有 I、II 两种产品,质量分别为 18、8 t; $x_2$  有 II、III 两种产品,质量分别为 6、

19 t. $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  为 3 个需求地, $y_1$  需要 I、II 两种产品,需求量分别为 6、7 t; $y_2$  需要 II、III 两种产品,需求量分别为 4、9 t; $y_3$  需要 I、III 两种产品,需求量分别为 8、13 t.现在需要设计的方案是在满足总运送费用最少的前提下,将尽可能多的产品运送到需求地.

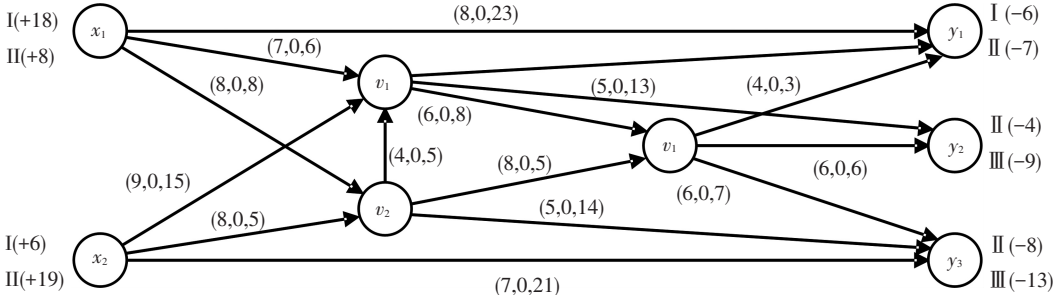


图 1 多品种流交通网络图

针对此引例,再利用传统的最小费用流算法,就不能设计出可行的最小费用流分配方案,所以有必要研究此类多品种流交通网络的最小费用流问题.

1.2 运送费用无差异的多品种流交通网络问题分析

先给定单一品种流的交通网络  $G = (V, E, C, F, W, X, Y)$ ,其中顶点集合  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,边  $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ .对集合  $V$  取定两个非空子集  $X$  和  $Y$ , $X$  为只发出流量的顶点集合, $Y$  为只接收流量的顶点集合,且  $X \cap Y = \emptyset$ ,把  $X$  中的顶点  $x$  称为网络  $G$  的源, $Y$  中的顶点  $y$  称为网络  $G$  的汇.针对边  $(v_i, v_j)$  赋予 3 个非负的整数参数  $c_{ij}, f_{ij}, w_{ij}$ ,分别为容量、流量、费用.设顶点  $v_i \notin X, Y$ ,即  $v_i$  为转运点,用  $f^+(v_i)$  表示顶点  $v_i$  发出的流量之和, $f^-(v_i)$  表示顶点  $v_i$  接收的流量之和.设分配目标流的流值为  $A$ , $f_A$  为流值为  $A$  的网络流,即  $Val f = A$ .

以上给出的交通网络描述,是针对运送费用无差异的单一品种流,在实际的交通网络中,在同一个阶段不同品种流运送费用相同的多品种流现象普遍存在,下面对运送费用无差异的多品种流交通网络特点进行分析.

设  $r$  为  $q$  个品种中的第  $r$  个品种,其中  $r = 1, 2, \dots, q$ , $f_{ij}^r$  为第  $r$  个品种在边  $(v_i, v_j)$  上的流量, $f^+(v_{ir})$  表示顶点  $v_i$  发出第  $r$  个品种的流量之和, $f^-(v_{ir})$  表示顶点  $v_{ir}$  接收第  $r$  个品种的流量之和, $w_{ij}$  为所有品种在边  $(v_i, v_j)$  上的运送费用.边  $(v_i, v_j)$  也要遵从容量约束条件,即所有品种的流量之和要小于该边的容量,则有  $0 \leq \sum_{r=1}^q f_{ij}^r \leq c_{ij}$ .所有转运顶点  $v_i$  也都要遵从流量守恒条件,而这里所谓的流量守恒是,既要保证所有品种的流量总和守恒,也要保证每一个单一品种的分量之和守恒,则有

$$\sum_{r=1}^q f^+(v_{ir}) = \sum_{r=1}^q f^-(v_{ir}), f^+(v_{ir}) = f^-(v_{ir}).$$

基于以上分析,运送费用无差异的多品种流交通网络最小费用流分配的线性规划模型如模型 (1) 所示.针对模型 (1) 所刻画的多品种流交通网络,需要设计特定的最小费用流分配算法.

$$\begin{aligned} \min z = & \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=1}^q f_{ij}^r w_{ij}. \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0 \leq \sum_{r=1}^q f_{ij}^r \leq c_{ij}; & (\text{容量约束条件}) \\ \sum_{r=1}^q f^+(v_{ir}) = \sum_{k=1}^q f^-(v_{ir}); & (\text{总流量守恒条件}) \\ f^+(v_{ir}) = f^-(v_{ir}); & (\text{品种分流量守恒条件}) \\ f_{ij} = \sum_{r=1}^q f_{ij}^r; & (\text{边流量等于分量之和}) \\ \sum_{i=1}^n f^+(x_i) = \sum_{i=1}^n f^-(y_i) \leq A, \\ i, j = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2, \dots, q. & (\text{目标流限制条件}) \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

2 运送费用无差异的多品种流交通网络最小费用流算法设计

单一品种流最小费用流 Ford-Fulkerson 算法,是通过构造增流网络,在增流网络中寻找关于费用代数和最低的路径,再针对此路径所对应原网络中的增流链进行流量调整.

针对运送费用无差异的多品种流交通网络,再构造增流网络,势必会造成增流网络的结构变得庞大而且复杂,同时计算过程更为繁琐,所以直接利用 Ford-Fulkerson 算法可行但不是优化的方法.

2.1 算法思想

本文在借鉴连续最短路算法和 Ford-Fulkerson

算法的基础上,将网络图中边的属性设计为复合参数的形式,再针对流量分配构建复合指标,从而建立运送费用无差异的多品种流交通网络最小费用流算法。

### 2.1.1 复合参数及复合指标的设定

复合参数.费用没有差异的单一品种流交通网络中,边 $(v_i, v_j)$ 的属性参数为 $(c_{ij}, f_{ij}, w_{ij})$ .针对运送费用无差异的多品种流,本文把边 $(v_i, v_j)$ 的属性设计为复合参数形式,即为 $[c_{ij}, f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq}), w_{ij}]$ ,其中 $f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq})$ 表示边 $(v_i, v_j)$ 的总流量 $f_{ij}$ 中,每个品种的分流量的多少。

复合指标.在连续最短路算法中,顶点 $v_j$ 的指标为 $(l(v_j), v_i)$ ,其中 $l(v_j)$ 表示从起点经过顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 关于费用的最短路长度, $v_i$ 表示 $v_j$ 的前一个顶点.在Ford-Fulkerson算法中,针对流量调整,顶点 $v_j$ 的指标为 $(u, \text{边的方向}, \delta)$ ,其中 $u$ 表示被标识点 $v_j$ 的前一个顶点;边的方向通过“+”或“-”来标识是前向边还是后向边; $\delta$ 表示流量的调整量.针对多品种流交通网络,既要考虑最短路指标和流量调整指标,还要考虑多品种问题,所以本文构建了复合指标,其形式为 $(l(v_j), v_i, \text{边的方向}) | [\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p)]$ .其中 $l(v_j)$ 表示第 $r$ 个品种从起点经过前一个顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 关于运送费用最低的最短路长度; $v_i$ 表示顶点 $v_j$ 的前一个顶点;边的方向表明边 $(v_i, v_j)$ 是前向边还是后向边,即 $(v_i, v_j)$ 的流量是增加还是减少; $\lambda$ 表示在关于运送费用最低的当前链路中,针对总流量 $f_{ij}$ 的调整量; $\lambda_r$ 表示在当前链路中,针对第 $r$ 个品种分流量 $f_{ijr}$ 的最大可能调整量。

### 2.1.2 复合指标中相关指标的计算规则

**规则1** 若边 $(v_i, v_j)$ 为前向边且 $f_{ij} < c_{ij}$ 时, $l(v_j) = \min\{l(v_j), l(v_i) + W_{ij}\}$ ,  $\lambda = \min\{\lambda, c_{ij} - f_{ij}\}$ .因为此时总流量只能增加,而每个品种的分流量都有增加的可能性,所以 $\lambda_r = \lambda$ ,其中 $r = 1, 2, \dots, q$ .

**规则2** 若边 $(v_i, v_j)$ 为后向边且 $f_{ij} > 0$ , $l(v_j) = \min\{l(v_j), l(v_i) - W_{ij}\}$ ,  $\lambda = \min\{\lambda, f_{ij}\}$ .因为此时总流量只能减小,每个品种的分流量都有减小的可能性,但每个品种的分流量不能减小为小于0,所以 $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{ijr}\}$ ,其中 $r = 1, 2, \dots, q$ .

规则1、2基于连续最短路算法给出了当前最短路的长度 $l(v_j)$ ;基于Ford-Fulkerson算法给出了当前链路中针对总流量 $f_{ij}$ 的调整量 $\lambda$ ;基于前面的容量约束条件,给出了当前链路中针对第 $r$ 个品种分流量 $f_{ijr}$ 的最大可能调整量 $\lambda_r$ .

### 2.1.3 增流链的流量调整量确定规则

尽管规则1、规则2计算了当前链路的相关指标,但针对第 $r$ 个品种的分流量 $f_{ijr}$ ,只给出了最大

可能的调整量,那么针对从源到汇的增流链,总流量 $f_{ij}$ 的调整量以及各个品种分量 $f_{ijr}$ 的调整量还没有最终确定。

设计针对增流链总流量 $f_{ij}$ 的调整量为 $\delta$ ,基于Ford-Fulkerson算法可知 $\delta = \min\{\lambda, A - \text{Val}f\}$ .

设计针对增流链品种分量 $f_{ijr}$ 的调整量为 $\delta_r$ ,下面给出确定 $\delta_r$ 的规则3和规则4。

**规则3** 若至少存在一个品种的最大可能调整量与总流量调整量相等,即有 $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p\} = \delta$ ,则任取其中一个最大的关于品种 $k$ 的 $\lambda_k$ ,令 $\delta_k = \lambda_k = \delta$ ,此时增流链的总流量以及分流量的调整量即为 $\delta(0, \dots, \delta_k, \dots, 0)$ .

**规则4** 若不存在任意一个品种的最大可能调整量与总流量调整量相等,即 $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p\} < \delta$ ,则任取其中一个最大的 $\lambda_k$ ,令 $\delta_k = \lambda_k$ .此时针对分流量的调整幅度还剩余 $\delta = \delta - \delta_k$ ,再任取其一个最大的 $\lambda_m$ ,即 $\lambda_m = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p; \text{其中不包含 } \lambda_k\}$ ,那么 $\delta_m = \min\{\delta, \lambda_m\}$ .此时针对分流量还剩余 $\delta = \delta - \delta_m$ ,依次如上类推,直到 $\delta = 0$ 为止.没有被确认的分流量的调整量 $\lambda_i = 0$ .此时增流链的总流量以及分流量的调整量即为 $\delta(0, \dots, \delta_k, \dots, \delta_m, \dots, 0)$ .

规则3、规则4是在所有品种流量之和要小于该边容量的基础上,对分流量调整幅度最大的品种来优先增加流量,目的是在运送费用最低的增流链上,尽可能多的增加分流量。

### 2.1.4 增流链的流量调整规则

基于Ford-Fulkerson算法,将关于运送费用最低的增流链的流量进行调整,即增流链中的边 $(v_i, v_j)$ 的复合参数按照如下规则修改。

**规则5** 若 $(v_i, v_j)$ 为前向边,其复合参数修改为 $[c_{ij}, f_{ij} + \delta(f_{ij1} + \delta_1, \dots, f_{ijr} + \delta_r, \dots, f_{ijq} + \delta_q), w_{ij}]$ ;若 $(v_i, v_j)$ 为后向边,其复合参数修改为 $[c_{ij}, f_{ij} - \delta(f_{ij1} - \delta_1, \dots, f_{ijr} - \delta_r, \dots, f_{ijq} - \delta_q), w_{ij}]$ .

### 2.2 算法步骤

基于给出的复合参数、复合指标以及相应的规则,本文算法的思路是,随着所求最短路的延伸,同时消除非增流边,这样既杜绝了二次求解问题,也避免了全枚举的问题,算法步骤如下.第1~3步为初始化过程,第4~8步为寻找费用最低的增流链过程,第9~11步为流量调整过程。

**第1步** 设源 $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ ,转运点 $\mathbf{V} = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ ,汇 $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ .设源 $x_i$ 具有第 $r$ 品种的数量为 $s_i^r$ ,汇 $y_i$ 需要第 $r$ 品种的数量为 $t_i^r$ .设 $\lambda = \lambda_r = +\infty$ ,设集合 $\mathbf{S} = \emptyset$ ,集合 $\mathbf{T} = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n, y_1,$

$\dots, y_i, \dots, y_n\}$ .

**第2步** 对运送费用无差异的多品种流交通网络,在零流(平凡流)基础上,利用给出的容量、费用,把边的属性设为复合参数形式,即 $[c_{ij}, f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq}), w_{ij}]$ ,此时初始的流量 $f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq})$ 均为 $0(0, \dots, 0, \dots, 0)$ ,即有 $Valf = 0$ .

**第3步** 设 $l(x_i) = 0$ ,对起点 $x_i$ 赋予复合指标 $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+\infty, \dots, +\infty, \dots, +\infty)]$ ;设其余顶点的 $l(v_i) = +\infty, l(y_i) = +\infty$ ,那么其余顶点均可以赋予复合指标 $(+\infty, 0, +) \mid [+ \infty(+\infty, \dots, +\infty, \dots, +\infty)]$ .

**第4步** 选择起点 $x_i$ 检查,将起点 $x_i$ 复合指标上\*,表示顶点 $v_i$ 已被检查.同时设集合 $S = \{x_i\}, x_i \notin T$ .

**第5步** 若 $x_i$ 与其他顶点没有直接连线,其他顶点的复合指标保持不变;若有直接连线,则计算其他顶点的复合指标值,计算方法如下:1) $(x_i, v_j)$ 为前向边.若 $f_{ij} = c_{ij}$ ,此时流量不能增加,即边 $(x_i, v_j)$ 不能成为增流链中的边,那么最短路也就不能经过该边,此时顶点 $v_j$ 的复合指标保持不变.若 $f_{ij} < c_{ij}$ ,此时流量可以增加,即边 $(x_i, v_j)$ 可以成为增流链中的边,那么最短路也就可以经过该边.复合指标中的各个指标计算如下:按照规则1可知 $l(v_j) = \min\{l(v_j), l(x_i) + W_{ij}\}$ ,如果 $l(v_j)$ 值来自第1项 $l(v_j)$ ,顶点 $v_j$ 的复合指标保持不变.如果 $l(v_j)$ 值来自第2项 $l(x_i) + W_{ij}$ ,总流量调整量 $\lambda = \min\{\lambda, c_{ij} - f_{ij}, A - Valf\}$ .当 $v_j \in V$ 时,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \lambda$ .当 $v_j \in Y$ 时,若 $s_i^k - f^+(x_{ik}) = 0$ 或 $t_j^k - f^-(y_{jk}) = 0$ ,则 $k$ 品种的最大可能调整量 $\lambda_k = 0$ ,其余品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ ;否则,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ .此时需要将顶点 $v_j$ 复合指标修改为 $(l(v_j), x_i, \text{边的方向}) \mid [\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p)]$ .2) $(x_i, v_j)$ 为后向边.若 $f_{ij} = 0$ ,此时流量不能减少,即边 $(x_i, v_j)$ 不能成为增流链中的边,那么最短路也就不能经过该边,此时顶点 $v_j$ 的复合指标保持不变.若 $f_{ij} > 0$ ,此时流量可以减少,即边 $(x_i, v_j)$ 可以成为增流链中的边,那么最短路也就可以经过该边.复合指标中的各个指标计算如下:按照规则2可知 $l(v_j) = \min\{l(v_j), l(x_i) - W_{ij}\}$ ,如果 $l(v_j)$ 值来自第1项 $l(v_j)$ ,顶点 $v_j$ 复合指标保持不变.如果 $l(v_j)$ 值来自第2项 $l(x_i) - W_{ij}$ ,总流量的调整量 $\lambda = \min\{\lambda, f_{ij}, A - Valf\}$ .当 $v_j \in V$ 时,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{ijr}\}$ .当 $v_j \in Y$ 时,若 $s_i^k -$

$f^+(x_{ik}) = 0$ 或 $t_j^k - f^-(y_{jk}) = 0$ ,则 $k$ 品种的最大可能调整量 $\lambda_k = 0$ ,其余品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{ijr}, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ ;否则,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{ijr}, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ .此时需要将顶点 $v_j$ 复合指标修改为 $(l(v_j), x_i, \text{边的方向}) \mid [\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p)]$ .

**第6步** 针对顶点 $v_j$ ,计算 $l(v_j) * = \min\{l(v_j)\}$ ;其中 $j = 1, 2, \dots, n; v_j \notin S$ .将顶点 $v_j$ 的复合指标上\*,表示顶点 $v_j$ 已被检查,设集合 $S = \{x_i, \dots, v_j\}, v_j \notin T$ .当 $v_j \in Y$ 时,转第9步,否则转第7步.

**第7步** 从顶点 $v_j$ 出发,求其他顶点 $v_k$ 的复合指标.若顶点 $v_j$ 与顶点 $v_k$ 没有直接连线,顶点 $v_k$ 的复合指标保持不变;若有直接连线,则计算顶点 $v_k$ 的复合指标值,计算方法如下:1) $(v_j, v_k)$ 为前向边.若 $f_{jk} = c_{jk}$ ,此时流量不能增加,即边 $(v_j, v_k)$ 不能成为增流链中的边,那么最短路也就不能经过该边,此时顶点 $v_k$ 的复合指标保持不变.若 $f_{jk} < c_{jk}$ ,此时流量可以增加,即边 $(v_j, v_k)$ 可以成为增流链中的边,那么最短路也就可以经过该边.复合指标中的各个指标计算如下:按照规则1可知 $l(v_k) = \min\{l(v_k), l(v_j) + W_{jk}\}$ ,如果 $l(v_k)$ 值来自第1项 $l(v_k)$ ,顶点 $v_k$ 的复合指标保持不变.如果 $l(v_k)$ 值来自第2项 $l(v_j) + W_{jk}$ ,总流量的调整量 $\lambda = \min\{\lambda, c_{jk} - f_{jk}, A - Valf\}$ .当 $v_k \in V$ 时,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \lambda$ .当 $v_k \in Y$ 时,若 $t_j^k - f^-(y_{jk}) = 0$ ,则 $k$ 品种的最大可能调整量 $\lambda_k = 0$ ,其余品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ ;否则,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ .此时需要将顶点 $v_k$ 复合指标修改为 $(l(v_k), v_j, \text{边的方向}) \mid [\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p)]$ .2) $(v_j, v_k)$ 为后向边.若 $f_{jk} = 0$ ,此时流量不能减少,即边 $(v_j, v_k)$ 不能成为增流链中的边,那么最短路也就不能经过该边,此时顶点 $v_k$ 的复合指标保持不变.若 $f_{jk} > 0$ ,此时流量可以减少,即边 $(v_j, v_k)$ 可以成为增流链中的边,那么最短路也就可以经过该边.复合指标中的各个指标计算如下:按照规则2可知 $l(v_k) = \min\{l(v_k), l(v_j) - W_{jk}\}$ ,如果 $l(v_k)$ 值来自第1项 $l(v_k)$ ,顶点 $v_k$ 复合指标保持不变.如果 $l(v_k)$ 值来自第2项 $l(v_j) - W_{jk}$ ,总流量的调整量 $\lambda = \min\{\lambda, f_{jkr}, A - Valf\}$ .当 $v_k \in V$ 时,所有品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{jkr}\}$ .当 $v_k \in Y$ 时,若 $t_j^k - f^-(y_{jk}) = 0$ ,则 $k$ 品种的最大可能调整量 $\lambda_k = 0$ ,其余品种的最大可能调整量 $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{jkr}, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ ;否则,

所有品种的最大可能调整量  $\lambda_r = \min\{\lambda, f_{jkr}, t_j^k - f^-(y_{jk})\}$ . 此时需要将顶点  $v_k$  复合指标修改为  $(l(v_k), v_j, \text{边的方向}) \mid [\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_p)]$ .

**第 8 步** 针对顶点  $v_k$ , 计算  $l(v_k) * = \min\{l(v_k)\}$ ; 其中  $j = 1, 2, \dots, n; v_k \notin S$ . 将顶点  $v_k$  复合指标标上 \*, 表示顶点  $v_k$  已被检查, 设集合  $S = \{x_i, \dots, v_k\}, v_k \notin T$ . 当  $v_k \in Y$  时, 转第 9 步.

**第 9 步** 当  $y_i \in S$  时, 自汇  $y_i$  逆向追踪, 沿着每个顶点复合指标中第 1 个子指标组的  $v_i$  即可得出运送费用最低的增流链, 路长为  $l(y_i)$ , 总流量的调整量  $\delta = \lambda$ . 再按照规则 3、4, 即可确定出增流链中每个品种的分流量的调整量  $\delta_r$ .

**第 10 步** 按照规则 5, 对增流量的总流量及分流量进行调整.

**第 11 步** 转到第 3 步, 反复进行, 直到找不到关于运送费用最低的增流链为止.

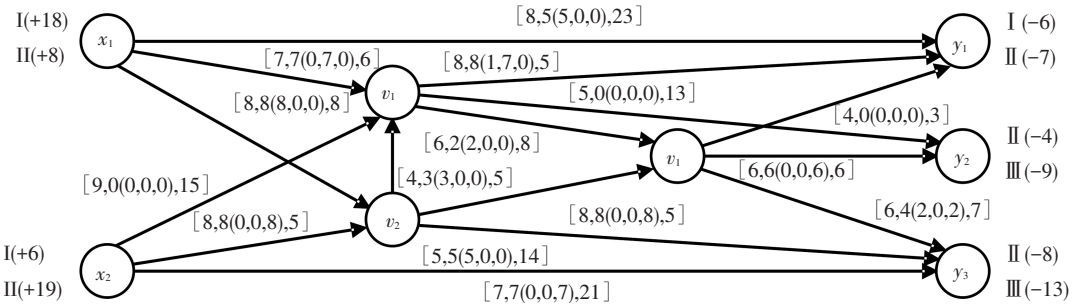


图 2 某一过程流量调整后的状态图

**第 2 步** 对图 2 继续寻找关于运送费用最低的增流链. 表 1 为分别从源  $x_1, x_2$  出发的复合指标计算结果表 (此计算过程省略).

表 1 复合指标结果

| 顶点    | 复合指标                                                             |
|-------|------------------------------------------------------------------|
| $x_1$ | $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)] *$      |
| $x_2$ | $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)] *$      |
| $v_1$ | $(15, x_2, +) \mid [9(9, 9, 9)] *$                               |
| $v_2$ | $(+ \infty, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ |
| $v_3$ | $(+ \infty, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ |
| $y_1$ | $(23, x_1, +) \mid [3(0, 0, 0)]$                                 |
| $y_2$ | $(+ \infty, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ |
| $y_3$ | $(+ \infty, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ |

针对表 1 取  $l(v_j) * = \min\{l(v_j); v_j \notin S\} = \min\{15, 23\} = 15 = l(v_1) *$ , 将表 1 中顶点  $v_1$  的指标标记 \*, 此时  $S = \{x_1, x_2, v_1\}$ , 集合  $T = \{v_2, v_3, y_1, y_2, y_3\}$ . 从顶点  $v_1$  出发, 继续求复合指标, 顶点  $v_1$  与顶点  $v_2, v_3, y_1, y_2$  有直接连线, 只需计算这 4 个顶点的复合指标即可, 其余顶点复合参数保持不变, 详细计算过程如下: 1)  $(v_1, v_2)$  为后向边, 同时  $f_{12} =$

3 示例求解

为了说明本文算法, 下面对引例进行最小费用最大流分配, 最小费用最大流的目标流是最大流, 此时将算法中总流量调整量  $\lambda$  公式中的  $A - Valf$  去掉即可. 由于图显示空间的局限, 不对顶点进行复合指标的标号; 另外, 因篇幅限制, 将相应的计算过程省略.

**第 1 步** 设集合  $S = \emptyset$ , 集合  $T = \{x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3\}$ . 此时初始的流量  $f_{ij}(f_{i1}, f_{i2}, f_{i3})$  均为  $0(0, 0, 0)$ . 此问题涉及 I、II、III 3 个品种, 这里用 1、2、3 序号来标识. 对起点  $x_i$  均赋予复合指标  $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ ; 对其余各个顶点均可以赋予复合指标  $(+ \infty, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ . 图 2 为求解时流量调整以后某一过程的状态图.

$3 > 0$ , 此边可以成为增流链中的边, 则  $l(v_2) = \min\{l(v_2), l(v_1) - W_{12}\} = \min\{+ \infty, 10\} = 10$ ,  $l(v_2)$  值来自第 2 项, 总流量的调整量  $\lambda = \min\{\lambda, f_{12}\} = \min\{9, 3\} = 3, v_2 \in V$ , 各个品种的最大调整量分别为  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.2$  ( $v_1, v_3$ ) 为前向边, 同时  $f_{13} = 2 < c_{13} = 6$ , 此边可以成为增流链中的边, 则  $l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_1) + W_{13}\} = \min\{+ \infty, 23\} = 23, l(v_2)$  值来自第 2 项, 总流量的调整量  $\lambda = \min\{\lambda, c_{13} - f_{13}\} = \min\{9, 6 - 2\} = 4$ , 此时  $v_3 \in V$ , 各个品种的最大调整量分别为  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$ . 3)  $(v_1, y_1)$  为前向边, 此时  $f_{11} = 8 = c_{11} = 8$ , 此时总流量不能增加, 即边不可以成为增流链中的边, 那么最短路也就不能经过该边, 此时顶点  $y_1$  的复合指标保持不变. 4)  $(v_1, y_2)$  为前向边, 同时  $f_{12} = 0 < c_{12} = 5$ , 此边可以成为增流链中的边, 则  $l(y_2) = \min\{l(y_2), l(v_1) + W_{12}\} = \min\{+ \infty, 28\} = 28, l(y_2)$  值来自第 2 项, 总流量的调整量  $\lambda = \min\{\lambda, c_{12} - f_{12}\} = \min\{9, 5 - 0\} = 5$ . 汇  $y_2$  不需要第 I 品种, 则第 I 品种的最大可能调整量  $\lambda_1 = 0$ ; 针对第 II 品种有  $\lambda_2 = \min\{\lambda, t_2^2 - f^-(y_{22})\} =$

$\min\{5, 4 - 0\} = 4$ ; 对第 III 品种有  $\lambda_3 = \min\{\lambda, t_3^3 - f^-(y_{23})\} = \min\{5, 9 - 6\} = 3$ . 修改后的复合指标如表 2 所示.

表 2 复合指标结果

| 顶点    | 复合指标                                                             |
|-------|------------------------------------------------------------------|
| $x_1$ | $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)] *$      |
| $x_2$ | $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)] *$      |
| $v_1$ | $(15, x_2, +) \mid [9(9, 9, 9)] *$                               |
| $v_2$ | $(10, v_1, -) \mid [3(3, 0, 0)] *$                               |
| $v_3$ | $(23, v_1, +) \mid [4(4, 4, 4)] *$                               |
| $y_1$ | $(23, x_1, +) \mid [3(0, 0, 0)]$                                 |
| $y_2$ | $(28, v_1, +) \mid [5(0, 4, 3)]$                                 |
| $y_3$ | $(+ \infty, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)]$ |

针对表 2 取  $l(v_j) * = \min\{l(v_j); v_j \notin S\} = \min\{10, 23, 23, 28\} = 10 = l(v_2) *$ , 将表 2 中顶点  $v_2$  的指标标记 \*. 此时  $S = \{x_1, x_2, v_1, v_2\}$ , 集合  $T = \{v_3, y_1, y_2, y_3\}$ . 从顶点  $v_2$  出发, 继续求复合指标, 顶点  $v_2$  与顶点  $v_3, y_3$  有直接连线. 但由于在前向边  $(v_2, v_3)$  上,  $f_{23} = 8 = c_{23} = 8$ , 此时流量不能增加, 即边  $(v_2, v_3)$  不能成为增流链中的边, 那么最短路也就不能经过该边, 此时顶点  $v_3$  的复合指标保持不变; 同理, 在前向边  $(v_2, y_3)$  上由于  $f_{23} = 5 = c_{23} = 5$ , 流量不能增加, 此时顶点  $y_3$  的复合指标保持不变. 此种情况说明, 无法通过顶点  $v_2$  找到一条到达汇的增流链, 此时需要返回到前一个顶点  $v_1$ , 通过与顶点  $v_1$  有直接连线的其他顶点来寻找最短路. 针对表 2 取  $l(v_j) * = \min\{l(v_j); v_j \notin S\} = \min\{23, 23, 28\} = 23 = l(y_1) = l(v_3) *$ , 这里选择顶点  $v_3$  作为标记点, 即将表 2 中顶点  $v_3$  的指标标记 \*. 此时  $S = \{x_1, x_2, v_1, v_2, v_3\}$ , 集合  $T = \{y_1, y_2, y_3\}$ .

从顶点  $v_3$  出发, 继续求复合指标, 顶点  $v_3$  与顶点  $y_1, y_2, y_3$  有直接连线, 只需要计算这 3 个顶点的复合指标即可, 其余顶点复合参数保持不变, 详细计算过程如下: 1)  $(v_3, y_1)$  为前向边, 此时  $f_{31} = 0 < c_{31} = 4$ , 此边可以成为增流链中的边, 则  $l(y_1) = \min\{l(y_1), l(v_3) + W_{31}\} = \min\{23, 26\} = 23, l(y_1)$  值来自第 1 项, 顶点  $y_1$  的复合指标保持不变. 2)  $(v_3, y_2)$  为前向边, 此时  $f_{32} = c_{32} = 6$ , 此时流量不能增加, 即边  $(v_3, y_2)$  不能成为增流链中的边, 那么最短路也就不能经过该边, 顶点  $y_2$  的复合指标保持不变. 3)  $(v_3, y_3)$  为前向边, 此时  $f_{33} = 4 < c_{33} = 6$ , 此边可以成为增流链中的边. 则  $l(y_3) = \min\{l(y_3), l(v_3) + W_{33}\} = \min\{+ \infty, 30\} = 30, l(y_3)$  值来自第 2 项, 总流量的调整量  $\lambda = \min\{\lambda, c_{33} - f_{33}\} = \min\{4, 6 - 4\} = 2$ , 此时针

对第 I 品种有  $t_3^1 - f^-(y_{31}) = 8 - (5 + 2) = 1$ , 则第 I 品种的最大可能调整量  $\lambda_1 = \min\{\lambda, t_3^1 - f^-(y_{31})\} = \min\{2, 1\} = 1$ ; 针对第 II 品种有  $t_3^2 - f^-(y_{32}) = 0$ , 则第 II 品种的最大可能调整量  $\lambda_2 = 0$ ; 针对第 III 品种有  $t_3^3 - f^-(y_{33}) = 13 - (0 + 2 + 7) = 4$ , 则第 III 品种的最大可能调整量  $\lambda_3 = \min\{\lambda, t_3^3 - f^-(y_{33})\} = \min\{2, 4\} = 2$ . 修改后的复合指标如表 3 所示.

表 3 复合指标结果

| 顶点    | 复合指标                                                        |
|-------|-------------------------------------------------------------|
| $x_1$ | $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)] *$ |
| $x_2$ | $(0, 0, +) \mid [+ \infty(+ \infty, + \infty, + \infty)] *$ |
| $v_1$ | $(15, x_2, +) \mid [9(9, 9, 9)] *$                          |
| $v_2$ | $(10, v_1, -) \mid [3(3, 0, 0)] *$                          |
| $v_3$ | $(23, v_1, +) \mid [4(4, 4, 4)] *$                          |
| $y_1$ | $(23, x_1, +) \mid [3(0, 0, 0)]$                            |
| $y_2$ | $(28, v_1, +) \mid [5(0, 4, 3)] *$                          |
| $y_3$ | $(30, v_3, +) \mid [2(1, 0, 2)]$                            |

针对表 3 取  $l(v_j) * = \min\{l(v_j); v_j \notin S\} = \min\{23, 28, 30\} = 23 = l(y_1) *$ . 由此可知关于费用的最短路为  $x_1 \rightarrow y_1$ , 但由于汇  $y_1$  需要的第 I、II 品种已全部满足, 其流量无法增加, 此时需要选择包含汇的次最短路. 针对表 3 取  $l(v_j) * = \min\{l(v_j); v_j \notin S\} = \min\{28, 30\} = 28 = l(y_2) *$ . 将表 3 中顶点  $y_2$  的指标标记 \*, 此时  $S = \{x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, y_2\}$ , 集合  $T = \{y_1, y_3\}$ . 因为  $y_2 \subseteq S$ , 说明已经找到关于运送费用最低的增流链.

自汇  $y_2$ , 沿着每个顶点复合指标中第 1 个子指标组的第 2 个指标逆向追踪, 可得出关于费用的最短路为  $x_2 \rightarrow v_1 \rightarrow y_2$ , 路长为 28, 总流量调整量  $\delta = 5$ . 因为  $\max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \max\{0, 4, 3\} \leq \delta = 5$ , 则任取其中一个最大的  $\lambda_2 = 4$ , 令  $\delta_2 = \lambda_2 = 4$ . 此时针对分流量的调整幅度还剩余  $\delta = \delta - \delta_2 = 5 - 4 = 1$ , 再任取其余一个最大的  $\lambda_3$ , 则  $\delta_3 = \min\{\delta, \lambda_3\} = \min\{1, 3\} = 1$ , 此时分流量的调整幅度已经为  $\delta = 0$ , 则  $\delta_1 = 0$ . 即增流链的总流量及分流量的调整量为  $5(0, 4, 1)$ . 流量分配结果如图 3 所示.

**第 3 步** 针对图 3 继续寻找关于运送费用最低的增流链, 余下过程省略, 最终的最小费用最大流分配结果如图 4 所示.

针对图 4, 仍能寻找到增流链  $x_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow y_1$ , 但由于  $y_1$  所需要的第 I、II 品种已经全部得到满足, 不需要对流量进行增加, 并且从源  $x_1, x_2$  出发的边中, 只有边  $(x_1, y_1)$  为不饱和边, 但汇  $y_1$  需要的第 I、II 品种已经得到全部满足, 不需要对流

量进行增加,因此此时为最小费用流.由图 4 可以知道,该引例中各个品种的具体运送方案,把该引例的总体方案以及各个品种的具体方案汇总,发

送和接收的总量均为 42,则 3 个品种的费用  $W_I$ 、 $W_{II}$ 、 $W_{III}$  分别为 299、189、365,总费用  $W = W_I + W_{II} + W_{III} = 853$ .

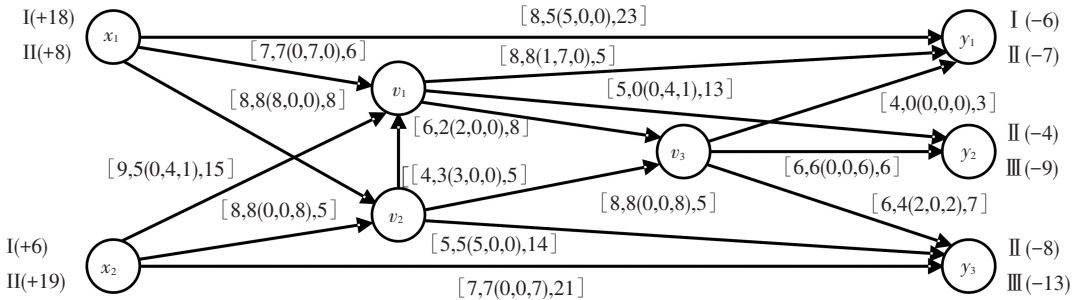


图 3 流量调整后的状态图

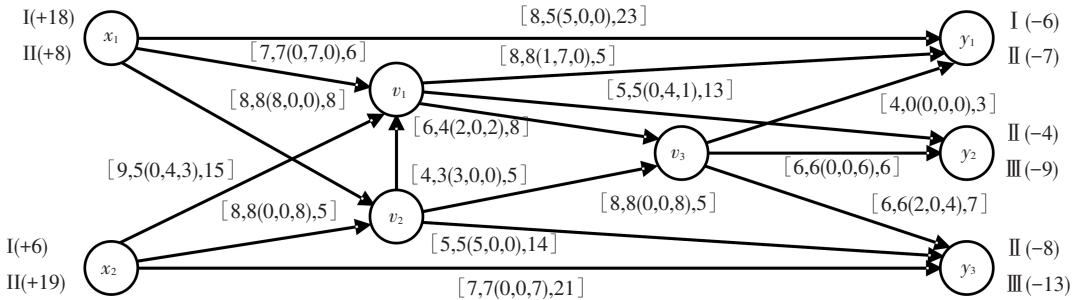


图 4 多品种流的最小费用最大流量终分布状态图

4 结 论

- 1)在连续最短路算法和 Ford-Fulkerson 算法基础上,通过构建复合指标,建立了运送费用无差异的多品种流最小费用流分配方法,另外,通过设计复合参数,也标定了多品种流的流量分配状态.
- 2)构造的基于复合参数和复合指标的多品种流最小费用流算法,避免了传统算法需要改变网络图结构的不足,在算法实现上也体现了便利.在交通运输领域,存在运送费无差异的多品种流分配问题,但针对此类问题的研究文献还不多见,该算法也为解决交通网络的一系列相关实际问题提供了应用基础.
- 3)在实际应用中,多品种流大部分会存在费用上的差异,相对的算法设计难度较大,在此研究的基础上,后期需要研究运送费用有差异的多品种流交通网络最小费用流分配问题.

参考文献

[1] 寇玮华.运筹学[M].成都:西南交通大学出版社,2013.

[2] 甘爱英.运筹学[M].北京:清华大学出版社,2002.

[3] 寇玮华,崔皓莹.满足交通网络流量增长态势的扩能优化研究[J].交通运输工程与信息学报,2012,10(4):19-25.

[4] 寇玮华,董雪,吕林剑.交通运输网络中两个结点间有

流量约束的最小费用最大流算法[J].兰州交通大学学报,2009,28(6):104-109.

[5] 谢政,汤泽滢.带模糊约束的最小费用流问题[J].模糊系统与数学,1999,13(2):90-941.

[6] 程琳,王伟.Dial 交通量分配模型和选择率问题的研究[J].交通运输系统工程与信息,2002,2(3):29-32.

[7] 陈光亚.带有向量值费用函数的交通网络平衡问题:模型与分析[J].交通运输系统工程与信息,2006,6(5):56-58.

[8] 任刚,王伟.可直接计算转向流量的改进型 Dial 交通分配算法[J].中国公路学报,2005,18(4):83-86.

[9] ORLIN J B. Network optimization [EB/OL]. [2010-05-08]. <http://www.core.org.cn/OcwWeb/index.htm>.

[10] CHABINI I, ODONI A R. Transportation flow system [EB/OL]. [2012-03-16]. <http://www.core.org.cn/OcwWeb/index.htm>.

[11] SHEPHERD B, ZHANG L. A cycle augmentation algorithm for minimum cost multicommodity flows on a ring [J]. Global Telecommunications Conference, 1999,2: 1535-1543.

[12] RETVARI G, BIRO J J, CINKLER T. A novel lagrangian-relaxation to the minimum cost multicommodity flow problem and its application to OSPF traffic engineering [J]. Computers and Communications, 2004,2:957-962.

[13] 寇玮华,崔皓莹.有运送路径限制的多品种流交通网络最小费用流算法研究[J].兰州理工大学学报,2013,32(6):1-7.

(编辑 魏希柱)