第48卷 第2期 哈 尔 滨 工 业 大 学 学 报 Vol. 48 No. 2
2016年2月 JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY Feb. 2016

doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2016.02.022

近场动力学法频散特性及其在岩石层裂分析中应用

卢志堂[1], 王志亮[1,2]

(1.同济大学 土木工程学院,200092 上海; 2.合肥工业大学 土木与水利工程学院,230009 合肥)

摘　要: 为了解近场动力学方法(peridynamics, PD)的计算精度,考察该法用于岩石层裂破坏模拟的效果,对PD进行了频散分析和算法验证.首先由频散分析后发现:当空间步长不变时,随影响域变大PD法频散愈严重;而空间步长减小时,影响域节点数不变,其频散会变弱;当影响域大小不变时,内部划分节点越密集,频散越弱.其次,通过该方法与传统有限差分法的比较表明PD离散方程可看作一系列差分方程的组合,其截断误差为影响域半径δ的二阶无穷小;当δ为Δx时,PD算法与中心差分法是等价的,且此时计算精度最高.最后,通过PD法应用于岩杆一维层裂模拟分析,探讨了其空间步长、影响域尺寸对计算结果的影响,得出层裂时间、层裂位置及损伤分布情况,并与层裂试验进行对比分析.PD可用于岩石层裂破坏分析,将FDM和PD法两者结合进行层裂模拟时,计算时间少、优势明显.

关键词: 近场动力学;频散特性;有限差分法;岩杆;层裂

中图分类号: TU45　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 0367-6234(2016)02-0131-07

Dispersion characteristics of peridynamics method and its application to spalling analysis of rock

LU Zhitang[1], WANG Zhiliang[1,2]

(1.Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, 200092 Shanghai, China;
2.School of Civil & Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, 230009 Hefei, China)

Abstract: The dispersion characteristics of PD is carried out to figure out the accuracy of peridynamics method (PD) and its simulation effects on rock spalling. Firstly, based on the dispersion analyses of the PD discrete equations, it is found that the numerical dispersion is more apparent with increasing the domain size if the space step is fixed; with the number of nodes in the domain fixed, the numerical dispersion becomes weaker when the space step decreases; the numerical dispersion also gets weaker with the increase of the nodes at a fixed domain. Subsequently, by comparing it to the traditional finite difference method, it is pointed out that the PD discrete equations can be written as the combination of a series of differential equations, whose truncation error is the second order infinitesimal of the domain radius (δ); when δ is set as the space step, PD method is equivalent to the central difference method, owning the highest calculational accuracy. Finally, the PD method is used to explore the one-dimensional spalling phenomenon of rock bar. The effects of space step and domain size on computing results are discussed, and the spalling time, spalling locations and damage distribution are further given. The effectiveness of PD method is also verified by contrast with the spalling test. It is shown that PD can be used for rock spalling analysis and high-precision results can be obtained by PD method coupled with FDM, costing less time and owning a clear advantage.

Keywords: peridynamics; dispersion characteristics; finite differential method; rock bar; spalling

材料断裂损伤是工程领域热点问题之一,除了借助相关实验手段外,研究人员也在积极寻求数值方法上的突破,以期弄清楚材料裂纹产生及其破坏机理,并进而能对断裂进行预警.虽然有限元和有限差分等方法在工程分析中得到了广泛应用,但这些传统数值方法大多都是基于经典连续介质力学的偏微分方程而来,在解决不连续问题时会产生奇异值,很难实现对材料内部裂缝产生与损伤发展的模拟.

收稿日期: 2015-06-23.
基金项目: 国家自然科学基金(51174145,51379147,51579062);
教育部博士点专项资金(20120072110024).
作者简介: 卢志堂(1985—),男,博士研究生;
王志亮(1969—),男,教授,博士生导师.
通信作者: 王志亮,cvewzL@tongji.edu.cn.

为很好地刻画裂缝生成和材料损伤演化,革新数值方法和发展相关理论的研究一直未间断,而近场动力学(peridynamics,PD)正是其中的理论之一[1].文献[2]对经典连续介质力学进行了重建,提出了 PD 理论,将传统的偏微分方程替换为积分方程,并可直接对不连续介质力学问题(比如裂缝扩展与分叉)进行分析.在一定条件下,选择合适的响应函数,PD 方程收敛于经典连续介质力学方程[3].将 PD 方程离散,结合损伤模型就可实现对脆性和延性材料的断裂问题进行模拟.该方法理论清晰、过程简单,已有模拟结果与试验数据吻合较好[4-8].在国内,文献[9-10]利用 PD 理论模拟了混凝土的脆性损伤情况,指出 PD 法可很好刻画和模拟混凝土在拉伸情况下的损伤累积与渐进破坏过程.

虽然 PD 方法能很好反映材料断裂形式,但是材料断裂前,通常需要经历一段连续变形过程,此时该方法的频散特性还有待深入研究;另一方面,PD 的计算效果与基于连续介质力学发展起来的数值算法(如 FDM,有限差分法)相比,是否具有优势?能否将其与现有方法联合应用于材料断裂分析也值得探讨.

1 PD 法计算原理

1.1 基本方程

如图 1 所示,材料占据空间域 B,x 为 B 内一材料点,H_x 为 x 的影响域,δ 为 H_x 的半径.假设 x 与其影响域 H_x 内的另一材料点 x' 通过连接键产生相互作用,作用力 $\boldsymbol{f}$ 为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}',t),t), \tag{1}$$

式中 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|\leqslant\delta$,$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 分别为材料点 x 的位置矢量,$\boldsymbol{u}$ 表示位移矢量.

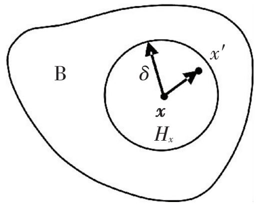


图 1 空间域 B 与影响域 H_x 示意

材料点 x 的 PD 方程为

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\int_{H_x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}V_{x'}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t). \tag{2}$$

式中:ρ 为密度,$\ddot{\boldsymbol{u}}$ 为 x 点加速度,$V_{x'}$ 为 x' 点所占体积,$\boldsymbol{b}$ 为体力.$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$,为相对位置矢量,$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$,为相对位移,见图 2.

相互作用力 $\boldsymbol{f}$ 可写为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})\,\frac{\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}|}. \tag{3}$$

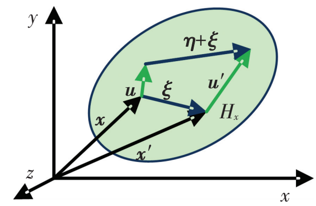


图 2 影响域内相对位置与相对位移

1.2 本构关系与损伤准则

$f(\eta,\xi)$ 可写成连接键伸长率的函数,即 PD 本构关系式:

$$f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=c_{\mathrm{m}}\cdot s(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})\cdot\mu(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}). \tag{4}$$

式中:c_{m} 表示微弹模,在一维、二维和三维条件下依次为 $2E/(A\delta^2)$、$9E/(\pi\delta^3)$、$12E/(\pi\delta^4)$[11],E 表示弹性模量,A 表示材料点占据的面积,s 表示材料点间连接键伸长率,其表达式为

$$s(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=(|\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}|-|\boldsymbol{\xi}|)/|\boldsymbol{\xi}|. \tag{5}$$

式中:$|\boldsymbol{\xi}|$ 为连接键初始长度,$|\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}|$ 为连接键当前长度.$s>0$ 表示连接键受拉,反之受压.μ 表示连接键的断裂与否,其表达式为

$$\mu(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})=\begin{cases}1, & s<s_0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{6}$$

式中 s_0 为连接键临界伸长率,当 $s\geqslant s_0$ 时,连接键断裂,且不可恢复.

x 点的局部损伤 φ 可表示为失效的连接作用与全部连接的比值,即

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=1-\int_{H_x}\mu(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}V_{x'}\Big/\int_{H_x}\mathrm{d}V_{x'}. \tag{7}$$

根据局部损伤可判断材料内部裂缝的发育及传播过程.通常情况下,需定义损伤值 φ_0 作为判断裂缝是否产生的准则,本文借鉴文献[4]建议值,即 $\varphi_0=0.3$.

1.3 求解思路

式(2)通常借助数值积分处理,写成求和表达式:

$$\rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}_i=\sum_p\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_p-\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{x}_i)V_p+\boldsymbol{b}_i. \tag{8}$$

式中:i 和 p 分别表示计算节点与其影响域内的节点编号,V_p 表示点 p 的在影响域内占据的体积.

图 3 给出二维节点分布,图中节点间距均为 Δx,每个节点占据的面积为$(\Delta x)^2$.V_p 近似[12]为

$$V_p=\begin{cases}V, & |\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta-\Delta x/2;\\ ((\delta-|\boldsymbol{\xi}|)/\Delta x+0.5)\,V, & \delta-\Delta x/2<|\boldsymbol{\xi}|\leqslant\delta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{9}$$

其中 $V=(\Delta x)^3$.

采用时域中心差分计算加速度:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_i^n=(\boldsymbol{u}_i^{n+1}-2\boldsymbol{u}_i^n+\boldsymbol{u}_i^{n-1})/(\Delta t)^2. \tag{10}$$

式中:上标 n 表示时步数,Δt 为时间间隔,计算的稳定性条件为 $\Delta t\leqslant\Delta x/c$,$c$ 表示波速.

PD 法数值计算流程见图 4.

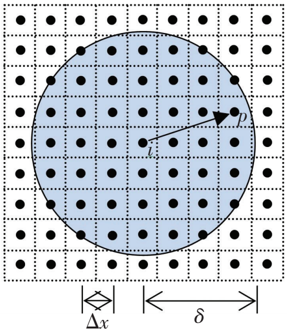


图 3　PD 计算的离散域示意

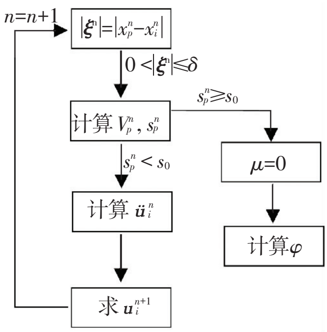


图 4　PD 程序流程图

2　频散特性分析

虽然目前已有研究表明 PD 在模拟脆性材料破坏过程与试验吻合较好,但对其在材料破坏前的模拟效果关注较少.文献[13]发现利用 PD 数值计算时存在频散现象,所谓数值频散实质上是一种因离散化求解波动方程而产生的伪波动[14],这种频散不同于波动方程本身引起的物理频散,而是PD离散方程所固有的本质特征.这会导致波在传播过程中,波前形状发生变化,并且逐渐散开,进而引起模拟得出的波速和裂缝扩展速度失真.数值频散对研究材料中波传播过程,尤其是在冲击荷载(高频波成分较多,数值频散愈严重)作用下是不利的.本节将结合频域分析,对 PD 法的数值频散特性进行分析,以求压制数值频散,提高计算精度.以一维方程为例,将式(2)的解写成一般形式:

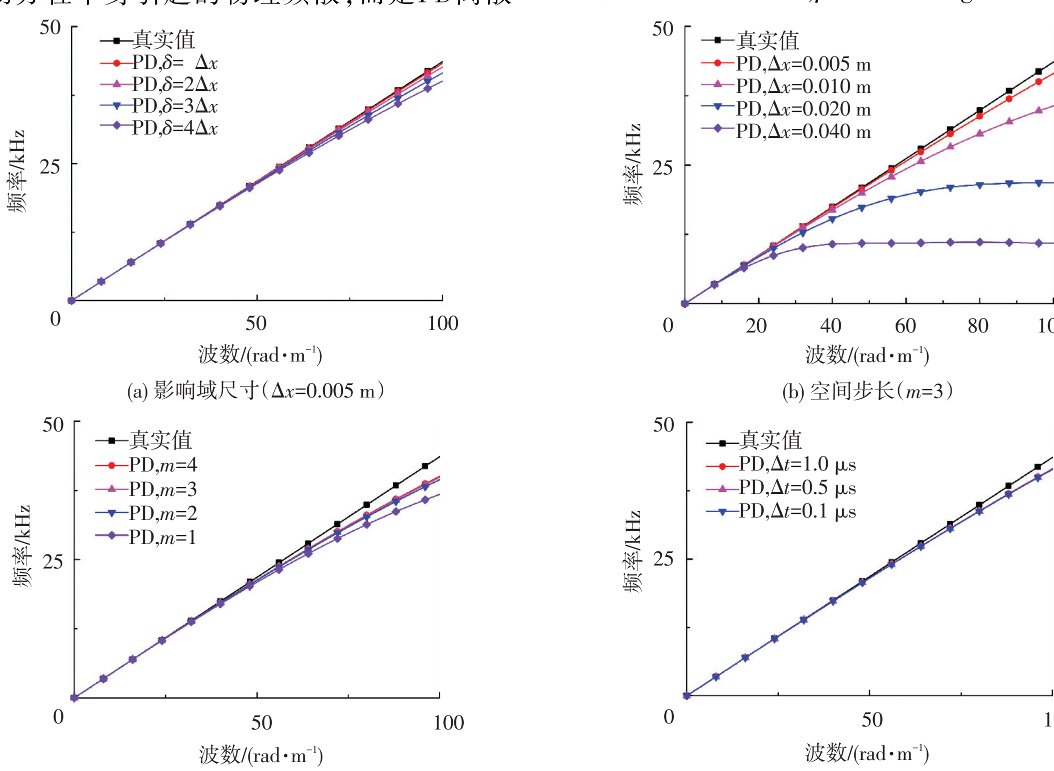
$$u = u_0 e^{j(\omega t - kx)}. \tag{11}$$

式中:$j=\sqrt{-1}$,为虚数单位,ω 表示圆频率,k 表示波数.对一维波动方程,有 $\omega = kc$,且 $c=\sqrt{E/\rho}$.

令影响域半径 $\delta = m\Delta x$,将式(11)写成离散形式 $u_i^n=u_0 e^{j(\omega n\Delta t-ki\Delta x)}$,代入式(8),联合式(9)可得频散方程(不考虑体力):

$$\cos\omega\Delta t - 1 = \frac{2c^2(\Delta t)^2}{m^2(\Delta x)^2}\left(\begin{array}{l}\cos k\Delta x - 1 + \\ \dfrac{\cos 2k\Delta x - 1}{2}\cdots + \\ \dfrac{\cos((m-1)k\Delta x) - 1}{m-1} + \\ \dfrac{\cos mk\Delta x - 1}{2m}\end{array}\right). \tag{12}$$

考虑影响域半径、空间步长的变化,得出频散曲线(见图 5,纵坐标表示频率 $\omega\cdot(2\pi)^{-1}$,横坐标表示波数),其中参数按照黑云母花岗岩参数给出:弹性模量 $E = 20$ GPa,$\rho = 2\ 620$ kg·m^{-3}.



(a) 影响域尺寸(Δx=0.005 m)　(b) 空间步长(m=3)

(c) 影响域内节点数(δ=0.02 m)　(d) 时间步长(m=3, Δx=0.005 m)

图 5　频散特性影响因素

图 5(a)中空间步长 $\Delta x = 0.005$ m 保持不变，不断增大影响域，不难发现 $\delta = \Delta x$ 时频散曲线与真实曲线最接近；m 越大，得到的曲线与真实曲线相差越大，即影响域增大时，PD 方法数值频散越严重；同时还能看出，频率越大，PD 方法频散愈加强烈.这表明在利用 PD 法计算高频荷载作用时，确定空间步长后，应尽量选取较小的影响域，否则会降低其计算精度；图 5(b)给出 $m = 3$ 时，空间步长 Δx 对 PD 方法频散性质的影响，当 Δx 从 0.005 m 增大到 0.02 m 时，频散急剧加重；根据图 5(c)，当保持影响域半径 $\delta = 0.02$ m，m 从 1 增大到 4 时对应的频散曲线愈接近真实曲线，这表明影响域内节点越密集，PD 方法精度越高；图 5(d)给出了 Δt 从 1 μs 减小到 0.1 μs 对 PD 方法频散性质的影响，发现频散曲线对时间步长不太敏感(Δt 取值已满足 PD 法的稳定性条件).通常在模拟裂缝开展时，取影响域半径为 $\delta = (3 \sim 4)\Delta x$[4, 6]，但增大影响域会降低 PD 方法模拟波传播问题的精度，这就要求计算时空间步长应尽量取小，或者尝试将预估裂缝区处节点局部进行加密.

3 PD 算法验证及应用

3.1 传统算法对比

有限差分法(FDM)是一种应用广泛的数值方法，在岩土力学问题上具有很好的适用性[15-18].下文将 PD 方法与 FDM 进行具体比较，分析两者之间的差别和联系.

不考虑体力和损伤，可将式(8)详细展开，以尝试深入分析 PD 和 FDM 的差别.一维条件下，影响域 $\delta = \Delta x$ 时，节点 i 的影响域内只有两个节点($i-1$, $i+1$)，于是式(8)变为

$$\ddot{u}_i = \frac{c^2(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{(\Delta x)^2}. \tag{13}$$

当 $\delta = 2\Delta x, 3\Delta x \cdots m\Delta x$ 时，依次可得：

$$\ddot{u}_i = \frac{c^2}{2}\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+2} - u_i + u_{i-2}}{(2\Delta x)^2}\right), \tag{14}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{2c^2}{9}\begin{pmatrix}\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \\ \dfrac{2(u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2})}{(2\Delta x)^2} + \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{u_{i+3} - 2u_i + u_{i-3}}{(3\Delta x)^2}\end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{2c^2}{m^2}\left(u'_1 + 2u'_2 + \ldots + (m-1)u'_{m-1} + \frac{m}{2}u'_m\right), \tag{16}$$

其中 $u'_m = \dfrac{u_{i+m} - 2u_i + u_{i-m}}{(m\Delta x)^2}$.

而一维波动方程经过 FDM 离散后变为

$$\ddot{u}_i^n = \frac{c^2(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{(\Delta x)^2}. \tag{17}$$

对比发现，式(17)即式(13)，这说明当 $\delta = \Delta x$ 时，PD 法和 FDM 等价.需要强调的是，式(13)给出的是一种临界情况，即节点 $i-1$ 和 $i+1$ 恰好在节点 i 影响域边界上，在 PD 计算过程中，影响域内的节点位置不断更新，当材料受拉伸时，节点 $i-1$ 或 $i+1$ 可能离开影响域，因此在计算时，δ 取值要比节点间距整数倍略大来保证计算过程中影响域内节点数不变，这样导致 FDM 和 $\delta = \Delta x$ 的 PD 计算结果会略有差别，下面的算例分析会体现这一点.

根据泰勒级数展开可知，式(13)和(14)的截断误差分别为 $O[(\Delta x)^2]$ 和 $O[(2\Delta x)^2]$，这也表明随着影响域增大，PD 方法的误差增大.一般，当影响域半径 $\delta = m\Delta x$ 时，得到的 PD 离散方程可看出一系列差分方程的组合，其截断误差变为 $O(\delta^2)$，这样从理论上说明了影响域变大，该方法频散严重(计算精度降低)的原因.

通过将 PD 与 FDM 对比分析，发现 PD 离散方程可写为差分方程组合形式，仅在影响域 $\delta = \Delta x$ 情况下，PD 与 FDM 计算效果相同，影响域增大之后，其计算精度降低，表明差分法在计算连续变形方面具有优势.利用 PD 计算断裂问题时，通常需要取较大影响域($\delta = (3 \sim 4)\Delta x$)才能很好模拟材料破坏过程[4, 6]，这反而会降低 PD 法对波传播过程的计算精度.为尽可能保证计算精度，在材料破坏之前采用 $\delta = \Delta x$ 的 PD 法或直接用 FDM，而当材料临近破坏时(文中按连接键伸长率达到临界值考虑)，再采用影响域较大的 PD 法进行计算，将使得计算结果更精确.

3.2 岩石层裂过程的 PD 分析

这里以岩石一维层裂试验为研究对象.根据一维波动理论，对杆状试样入射端施加应力脉冲，应力波在杆自由端反射形成拉伸波，当强度达到岩石的抗拉强度时会引起拉伸断裂[20].然后根据层裂位置，就可间接求出层裂强度，并可讨论应变率效应[21-27].根据 PD 法频散性质，选择合适的网格参数压制数值频散，可有效避免计算求得的应力波形在向岩杆自由端传播过程保持足够稳定，保证计算结果具有较高精度.

计算中首先施加强度较小的压力脉冲，采用 PD 法分析岩杆中波传播特点，对应的定解问题可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \sigma\big|_{x=0}=p(t),\sigma\big|_{x=l}=0,u\Big|_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}\tag{18}$$

式中 $p(t)$ 表示杆件所受的冲击荷载，试验中荷载时程曲线见图 6，这里将其简化为上升沿较短的三角波进行分析. 三角波峰值 p_m 为 8.9 MPa，出现时刻 $t_p=0.04$ ms，持续时间 $t_0=0.12$ ms.

首先采用 PD 法求解该问题，岩杆长 $l=1$ m，取 $\Delta x=0.005$ m，$\Delta t=1$ μs. 考虑了 4 个不同的影响域：δ 分别为 Δx、$2\Delta x$、$4\Delta x$ 和 $8\Delta x$，同时将 FDM（$\Delta x=0.005$ m）计算的杆中点（$x=0.5$ m）应力时程曲线给出（见图 7(a)，纵坐标表示轴向应力，横坐标为时间），规定拉为正. 可看出 FDM 和 $\delta=\Delta x$ 的 PD 方法计算结果比较接近，但仍存在一定偏差（上文在与 FDM 对比时已指出）；δ 为 Δx 和 $2\Delta x$ 时，图 7(a) 得出两曲线基本吻合；当 δ 增大到 $4\Delta x$ 时，$t=0.5$ ms 后应力波波形发生频散，计算结果吻合度变差；当 δ 为 $8\Delta x$ 时，从 $t=0.8$ ms 后应力波因数值频散而失真，说明随着影响域增大，PD 法计算结果变差. 图 7(b) 中令 $\delta=3\Delta x$，首先保持 t_0 不变，Δx 由 0.005 m 增为 0.01 m，约在 0.5 ms 后出现频散（带●标记的曲线），而带■标记的曲线无明显频散，反映了影响域增大，PD 法频散加重；当 Δx 不变，t_0 由 0.12 ms 增大至 0.24 ms 时（即频率降低），波形保持较好，说明随 t_0 增大，频散效应变弱. 通过该对该算例的分析，也可看出 PD 方法的计算效果与上文频散分析结论一致.

采用 PD 计算断裂问题时，若 Δx，δ 等参数选择不当，产生的数值频散会使应力波在传播过程中分散开来，致使尾端加载的压应力波波形偏离原始波形，产生错误的计算结果.

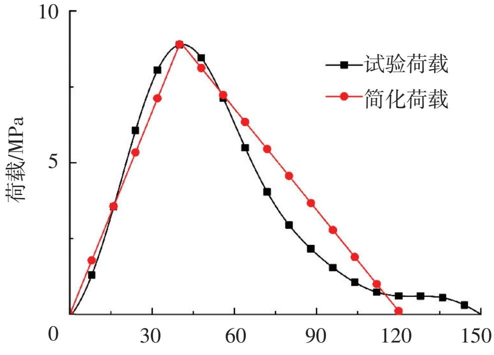
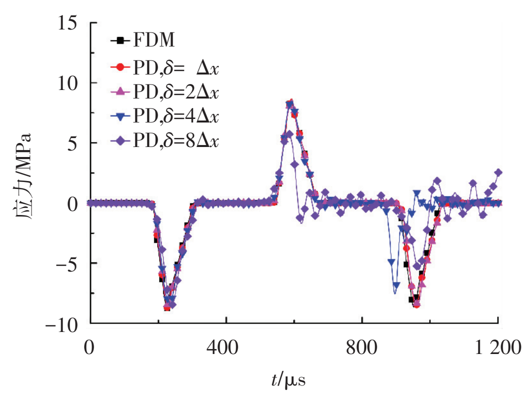
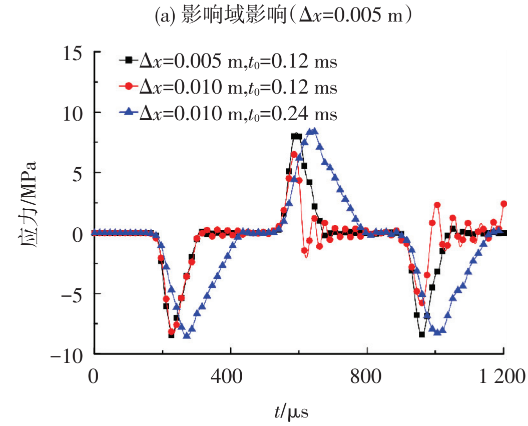


图 6　荷载时程曲线

为说明 PD 法对层裂模拟分析的效果，方便起见，直接假设试样的抗拉强度 σ_t 为 10 MPa，增大压力脉冲 $p(t)$，使试样发生层裂. 计算时考虑 m、Δx、p_m 和 t_0 等参数的变化，试件断裂（$\varphi_0=0.3$）时尾端损伤分布见图 8(a) 所示（纵坐标为损伤，横坐标表示杆件尾部位置）. 其中参数 m、Δx、p_m、t_0、断裂位置 x_F，断裂发生时间 t_F 列于表 1. 根据曲线 1～3，可看出当影响域半径由 $3\Delta x$ 增大到 $10\Delta x$ 时，断裂的区域和发生时间增大，但彼此相差不大. 当空间步长减小到 0.000 5 m 时，对比曲线 4 和 5，影响域增大时，断裂区域和发生时间也有变大. 同时还发现，空间步长分别为 0.001 和 0.000 5 m 时，断裂的区域和发生时间相差不大. 为了考察冲击荷载作用时间对层裂位置影响，特将 t_0 增大到 0.24 ms 并得出断裂时损伤分布，见图 8(a) 中曲线 6. 对比曲线 1 和 6 可看出，层裂位置距自由端变远，这符合拉应力波峰值到时延迟，致使层裂位置远离自由端. 曲线 7 对应的冲击荷载峰值强度 p_m 为 15 MPa，与曲线 1 相比，层裂位置更加靠近自由端，这是由于冲击荷载强度提高，反射后拉应力峰值达到岩石层裂强度所需时间缩短. 图 8(b) 给出图 8(a) 中曲线 1 对应试件尾部拉应力区随时间发展情况，可以发现随时间增大，拉应力逐渐增大，当 $t=0.439\ 5$ ms 时，尾部拉应力峰值达到层裂强度，此时岩杆拉伸断裂瞬间发生. 以上分析表明 PD 法用于岩石一维层裂模拟可行，效果令人满意.

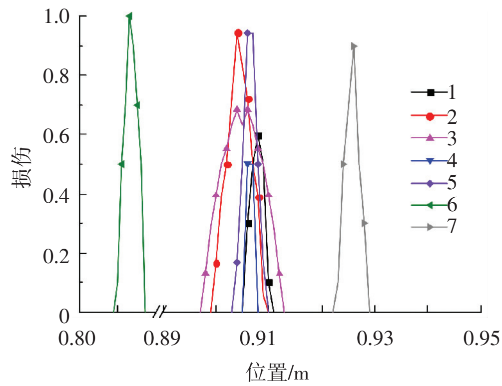


(a) 影响域影响（Δx=0.005 m）

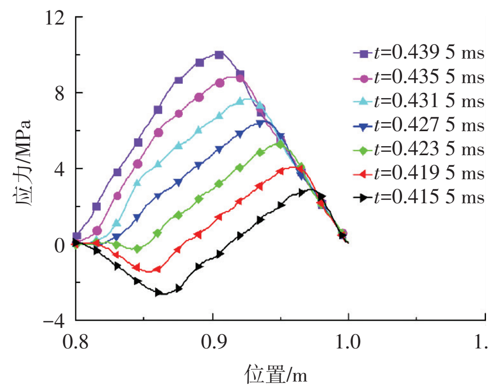


(b) 空间步长与频率影响（m=3）

图 7　岩杆中点的应力时程曲线



(a) 自由端损伤分布



(b) 自由端拉应力分布

图 8　层裂现象 PD 法模拟

表 1　层裂模拟参数

编号	m	Δx/m	p_m/MPa	t_0/ms	Δt/μs	x_F/m	t_F/ms
1	3	0.001 0	12	0.12	0.10	0.906~0.909	0.439 5
2	5	0.001 0	12	0.12	0.10	0.901~0.908	0.439 9
3	10	0.001 0	12	0.12	0.10	0.900~0.910	0.440 7
4	3	0.000 5	12	0.12	0.05	0.905~0.907	0.438 9
5	5	0.000 5	12	0.12	0.05	0.904~0.908	0.439 2
6	3	0.001 0	12	0.24	0.10	0.811~0.816	0.512 6
7	3	0.001 0	15	0.12	0.10	0.924~0.928	0.432 7

3.3　试验验证

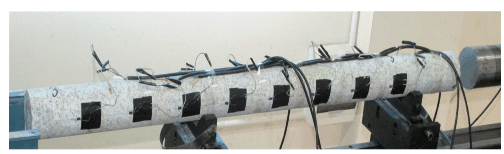
试验中采用的岩杆见图 9(a),杆长 0.99 m,直径 0.07 m,密度 2 620 kg·m^{-3}.由于岩石中存在微裂纹,应力脉冲在传播时会发生衰减.小振幅弹性波在岩石中的衰减是指数式的,一般情况下可通过弹性波振幅的变化获得其衰减系数,关系式为[26]

$$\sigma(x_F) = \sigma_0 e^{-\beta x_F}, \tag{19}$$

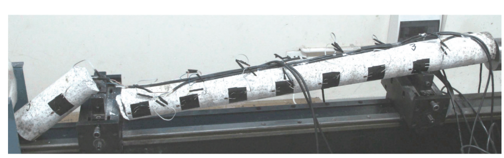
式中:σ_0表示初始位置的应力峰值,$\sigma(x_F)$表示传到距初始位置 x_F 处的应力峰值,β 为衰减系数.

首先采用低强度应力波冲击岩杆,得到杆中部位置(5#应变片,距入射端为 0.6 m)应变信号,见图 10(纵坐标为电压,横坐标为时间).由相邻拉应力波峰值时间差与杆长,求出波速 c 为 2 740 m · s^{-1},则传播距离 x 可由 $x = ct$ 得出.利用图 10 前 5 个拉应力波峰值拟合得出式(19)中的衰减系数 β=0.52 m^{-1}.

加大应力波强度,使得岩杆发生层裂,见图 9(b),测得其断裂面距加载端为 0.79 m.按照镜像法,不考虑衰减效应,利用 5#应变片信号,可得到不同时刻自由面附近的应力波形,见图 11(纵坐标为轴向应力,横坐标表示杆件尾部位置).然后根据断裂位置找出该点的最大拉应力,就能确定“名义”层裂强度为 σ_0= 25.5 MPa.考虑压应力波由 5#应变片位置传至自由端形成的拉应力波,再到断裂位置这一过程的衰减(传播距离 x=(0.39+0.20)= 0.59 m),修正后得出层裂强度 σ_t =25.5e$^{-0.52\times0.59}$ = 18.8 MPa.



(a) 试验前



(b) 试验后

图 9　花岗岩杆层裂前后照片

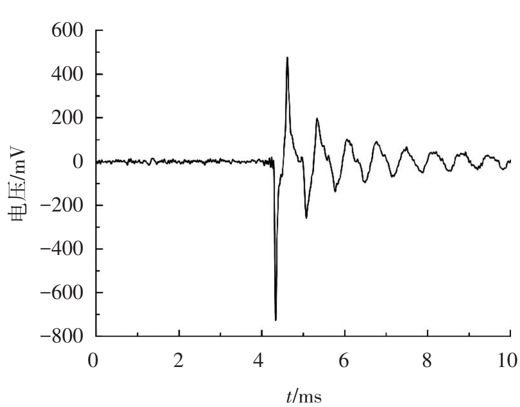


图 10　应力波衰减过程

将应力脉冲作为边界条件代入 PD 计算程序,其中 Δx=0.01 m,Δt=2 μs.根据层裂强度,设定临界伸长率 $s_0=\sigma_t/E$= 0.000 95.考虑 3 种方法求解:

1)采用 $\delta=3\Delta x$ 的 PD 法进行计算;

2)先采用 $\delta=\Delta x$ 的 PD 法进行计算,当最大连接键伸长率 $s_{max}=0.9s_0$时,再令 $\delta=3\Delta x$ 计算;

3)先采用 FDM 法进行计算,当最大连接键伸长率 $s_{max}=0.9s_0$时,再用 $\delta=3\Delta x$ 的 PD 法计算.

以上 3 种方法分别记为:PD_3,PD_1-PD_3和 $FDM-PD_3$,得出的断裂时间和计算耗时见表 2,岩杆断裂时损伤情况见图 12(纵坐标为损伤,横坐标表示杆件尾部位置).由表 2 看出,采用 $FDM-PD_3$求解耗时最少,PD_3耗时最多.PD_1-PD_3和 $FDM-PD_3$得出的断裂时间接近,而 PD_3得出的断裂时间较大,这也反映了影响域增大,频散加重的特点.由图 12 可看出,杆 0.79 m 处发生断裂,与试验断裂位置一致,表明该方法能很好模拟杆中拉伸波导致的岩石层裂现象.文章提出的 FDM 和 PD 联合算法耗时少,精度高,有利于提高 PD 法对断裂问题的计算效率.

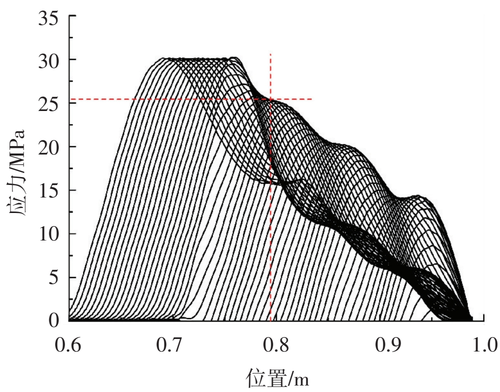


图 11　应力波形叠加

表 2　3 种算法比较

方法	断裂时间/ms	计算耗时/s
PD_3	0.478	2.00
PD_1-PD_3	0.466	0.95
$FDM-PD_3$	0.464	0.53

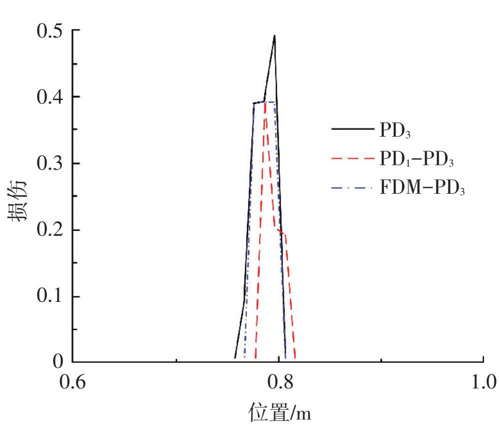


图 12　岩杆断裂时损伤分布

4　结　论

研发了近场动力学法计算程序,并详细分析了该算法频散特性的影响因素,以及对数值计算的影响,之后应用到一维应力波作用下岩杆层裂破坏问题计算分析中,得出如下结论:

1)当空间步长不变时,随影响域变大,PD 法计算精度降低;影响域内节点数目不变时,空间步长越小,PD 法精度会显著提高;同一影响域内节点分布越密集,精度也有所提高;满足计算稳定性条件的前提下,PD 法对时间步长变化不敏感.

2)PD 法的离散方程可看作是一系列差分方程的组合,其截断误差为 $O(\delta^2)$,当影响域半径 δ 等于 Δx 时,PD 算法与中心有限差分法等价,此时计算精度高.当影响域增大时,PD 法对连续变形问题计算效果要差于有限差分法.

3)岩杆一维波动层裂模拟结果与试验结果吻合度高.该方法简单易行,通过选择合适的计算参数压制数值频散,能很好地仿真出岩石拉伸波损伤发展演化直至断裂破坏的全过程,将 FDM 和 PD 法两者结合用于脆性材料损伤问题的分析,计算时间少,精度高,能够发挥各自优势,提高计算效率.

参考文献

[1] MADENCI E, OTERKUS E. Peridynamic theory and its applications[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2013.

[2] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(1):175-209.

[3] SILLING S A, ZIMMERMANN M, ABEYARATNE R. Deformation of a peridynamic bar[J]. Journal of Elasticity, 2003, 73(1/2/3):173-190.

[4] SILLING S A, ASKARI E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics[J]. Computers & Structures, 2005, 83:1526-1535.

[5] HA Y D, BOBARU F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics [J]. International Journal of Fracture, 2010, 162(1/2):229-244.

[6] HA Y D, BOBARU F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2011, 78(6):1156-1168.

[7] WILDMAN R A, GAZONAS G A. A perfectly matched layer for peridynamics in two dimensions [J]. Journal of Mechanics of Materials and Structures 7(8):765-781.

[8] FOSTER J T, SILLING S A, CHEN W W. Viscoplasticity using peridynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 81(10):1242-1258.

[9] HUANG Dan, ZHANG Qing, QIAO Pizhong. Damage and progressive failure of concrete structures using non-local peridynamic modeling[J]. Science China: Technological Sciences, 2011, 54 (3):591-596.

[10]沈峰, 章青, 黄丹,等. 基于近场动力学理论的混凝土轴拉破坏过程模拟[J].计算力学学报, 2013(增 1):79-83.

[11] LIU W, HONG J W. Discretized peridynamics for linear elastic solids [J]. Computational Mechanics, 2012, 50 (5):579-590.

(下转第 151 页)