doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2016.02.026

任意裂纹面荷载作用下界面断裂分析

钟　红,宋平平

(大连理工大学 建设工程学部,110624 辽宁 大连)

摘　要: 为研究裂纹面上作用的荷载对裂纹稳定性的影响,本文基于比例边界有限元方法提出裂纹面作用有任意方向、任意大小面荷载的界面应力强度因子求解模型.界面裂纹具有复数形式的应力奇异性指数,在任意裂纹面荷载作用下其奇异应力场更为复杂.应用本模型,径向的位移和应力可解析求解,无需网格细分即可自动反映裂尖的应力奇异性.裂纹面上的任意荷载首先可分解成平行于裂纹面以及垂直于裂纹面的分量,并进一步分解成有限项幂函数的和.对每个幂函数荷载解析求解,基于线性叠加原理获得结构在全部荷载作用下的解.该模型对各向同性材料和各向异性材料均适用.文中通过板承受裂缝面荷载时的应力强度因子求解的多个算例对该模型进行了验证和应用,对板的几何尺寸和双材料参数进行了敏感性分析,并应用于重力坝坝踵界面裂缝在水压力作用下的应力强度因子求解.

关键词: 比例边界有限元;界面断裂;任意裂纹面荷载;应力强度因子

中图分类号: TU311.1　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 0367-6234(2016)02-0152-06

Analysis of interface crack with arbitrary crack tractions

ZHONG Hong, SONG Pingping

(Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, 110624 Dalian, Liaoning, China)

Abstract: This paper presents a model for solving interface crack with arbitrary crack traction based on the Scaled boundary finite element method to study the significant influence of the traction acting on the crack faces on the stability of a crack. The order of stress singularity is complex for an interface crack. With the existence of crack traction, the stress singularity is more complicated. Base on the proposed model, stress and displacement are solved analytically in the radial direction, and the stress singularity at crack tip is obtained with high precision without refined mesh. The arbitrary crack traction is firstly decomposed to one component parallel to the crack and the other one perpendicular to the crack, then both the two components are expressed as the sum of a limited number of power functions respectively. The effect of each power function is solved analytically. According to the Linear superposition principle, the solution of a structure with arbitrary crack traction can be obtained. The proposed model is effective for both anisotropic and isotropic materials. The model is verified by several plates with crack tractions, in which stress intensity factors are calculated. Sensitivity analysis is also performed concerning the plate geometry and material properties. Finally the model is applied to solve the stress intensity factors of an interface crack of a gravity dam filled with water.

Keywords: the scaled boundary finite element method; interface crack; arbitrary crack traction; stress intensity factor

很多实际工程都涉及界面,例如岩基上的混凝土坝,坝基和混凝土的交界面通常比较薄弱,易于出现裂纹,尤其是当水进入缝内后,水压力将对裂缝的进一步扩展起促进作用,从而劣化大坝的稳定性.在日常生活中,也常常遇到界面断裂问题,诸如焊接、粘接等结合材料,通常在结合处或者其附近首先开裂.这是因为结合材料界面附近不仅容易存在缺陷,导致结合强度的低下,而且会因界面的存在而引发应力集中并产生残余应力,使界面附近的材料处于较高的应力水平.随着复合材料应用范围的扩大,界面问题变得越来越重要,传统的强度分析和评价方法局限性也日益明显.

不同于均质材料断裂,界面断裂有一些特殊性.Williams[1]分析了界面裂纹尖端的奇异场,利用应

收稿日期: 2014-11-08.

基金项目: 国家自然科学基金(51009019,51579033);中央高校基本科研业务费专项资金(DUT14LK40);中国博士后基金特别资助项目(2013T60283).

作者简介: 钟　红(1981—),女,副教授,硕士生导师.

通信作者: 钟　红,hzhong@dlut.edu.cn.

力函数的分离变量形式,求得奇异性指数和奇异应力场,但是该奇异性指数($0.5\pm i\varepsilon$)不是实数而是复数,导致了裂纹尖端应力场的振荡奇异性和裂纹面的互相嵌入.振荡引起 I 型断裂和 II 型断裂耦合,对称结构内的裂缝即使处于对称荷载作用下,其断裂也是复合型的.常见的断裂力学求解方法,包括有限元法、边界元法、边界配置法[2]和扩展有限元[3]等,所采用的标准插值函数都是光滑的,与奇异应力场相差甚远[4].有限元法求解断裂问题时,为了得到更精确的应力解,划分有限元网格时需要在裂尖局部加密或引入奇异单元(如四分之一节点单元[5-6])进行求解.然而对于界面断裂问题,奇异应力场的近似解是非常复杂的,对单元进行改进的复杂程度远远大于求解断裂问题本身.Miyazaki 等[7]提出 M_1 积分方法求解双材料界面断裂问题,分别计算了含单边裂纹和中心斜裂纹双材料板的应力强度因子;Munz 等[8]基于有限元方法描述了双材料界面裂纹处的应力分布特征;陈瑛等[9]综合评述和分析了多种断裂力学模型和实验方法,同时介绍了双材料界面断裂力学在 FRP-混凝土复合结构中的应用.

界面裂缝的缝面荷载对裂缝的稳定性有至关重要的影响.在这种情况下,裂尖的奇异应力场和应力强度因子都将产生显著变化,从而对数值方法和数值模型提出了新的挑战.对于裂纹面上承受任意荷载的复杂情况研究较少,其中胡小飞[10]采用基于辛体系的解析奇异单元分析含裂纹的结构;刘钧玉[11]基于比例边界有限元法计算了一类面荷载作用下的裂缝奇异应力场;涂传林[2]利用边界元法研究了裂纹面上受均匀法向外荷载的断裂问题.以上研究所考虑的荷载形式和作用方向均较简单.

比例边界有限元法(scaled boundary finite element method,SBFEM)是一种新型的半解析数值方法,可计算多种材料交界面处[4]的奇异应力场,以及温度荷载[12]、动荷载[13]等作用下的奇异应力场,并已推广至非线性断裂模拟[14].本文采用比例边界有限元法,基于裂纹面荷载的幂级数展开和线性叠加原理,提出了求解任意裂纹面荷载作用下的界面断裂求解模型.将该模型应用于各向同性和各向异性双材料板的界面问题,通过与文献结果对比进行了验证.在此基础上开展了一定的参数敏感性分析.

1　比例边界有限元方法的基本原理

比例边界有限元控制方程的推导和求解见文献[15-17].本文主要介绍对任意裂纹面荷载的处理和奇异应力场的求解.图 1 是具有 V 形裂纹口的比例边界有限元模型,O 为比例中心,断裂问题比例中心通常选在裂尖处.定义 $\xi(0\leqslant\xi\leqslant1)$ 为径向坐标,模型边界离散成一维线单元,$\xi-\eta$ 形成比例边界有限元坐标.

整体坐标系下一点的坐标用比例边界有限元坐标表示为

$$\begin{Bmatrix}\hat{x}(\xi,\eta)\\ \hat{y}(\xi,\eta)\end{Bmatrix}=\xi[N(\eta)]\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix},\qquad(1)$$

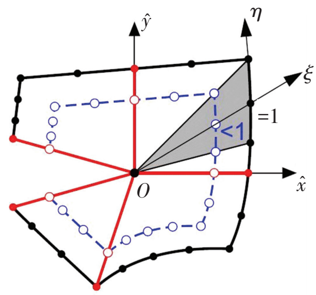


图 1　比例边界有限元模型和 $\xi-\eta$ 坐标

式中$\{N(\eta)\}$为形函数,$\{x\}$、$\{y\}$是节点坐标.区域内的节点位移$\{u(\xi)\}$,边界上的节点位移为$\{u\}=\{u(\xi=1)\}$,则区域内任意一点位移函数可表示为

$$\{u(\xi,\eta)\}=[N(\eta)]\{u(\xi)\},\qquad(2)$$

应力为

$$\{\sigma(\xi,\eta)\}=[D]\left([B^1(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi}+\frac{1}{\xi}[B^2(\eta)]\{u(\xi)\}\right).\qquad(3)$$

式中$[D]$是材料的弹性矩阵,$B^1(\eta)$和$B^2(\eta)$是应变位移矩阵,参见文献[15].用位移表达的比例边界有限元方法的控制方程为

$$[E^0]\xi^2\{u(\xi)\}_{,\xi\xi}+([E^0]-[E^1]+[E^1]^{\mathrm{T}})\cdot\xi\{u(\xi)\}_{,\xi}-[E^2]\{u(\xi)\}+\{F(\xi)\}=0,\qquad(4)$$

式中$[E^1]$、$[E^2]$和$[E^3]$为系数矩阵[15],各单元系数矩阵的计算和组装与有限元法类似.$\{F(\xi)\}$是外部荷载向量,包括裂纹面荷载$\{F_t(\xi)\}$.裂纹面上的任意荷载可以分解成有限项幂函数和的形式

$$\{F_t(\xi)\}=\sum_{i=1}^{M}\xi^{t_i}\{F_{t_i}\},\qquad(5)$$

$$t_i=i-1+\mu,(i=1\cdots M)\qquad(6)$$

式中μ是个很小的数(如 0.000 1),径向的内部节点力为[17]

$$\{q(\xi)\}=[E^0]\xi\{u(\xi)\}_{,\xi}+[E^1]^{\mathrm{T}}\{u(\xi)\}.\qquad(7)$$

方程(4)可写成一阶常微分方程

$$\xi\begin{Bmatrix}u(\xi)\\ q(\xi)\end{Bmatrix}_{,\xi}=-[Z]\begin{Bmatrix}u(\xi)\\ q(\xi)\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\ F_t(\xi)\end{Bmatrix},\qquad(8)$$

式中$[Z]$是 Hamiltonian 系数矩阵[17],特征值为λ_i和$-\lambda_i$,方程(8)可以通过$[Z]$阵特征向量进行解耦,运算中容易出现数值不稳定,产生对数奇异.

本文采用块对角 Schur 分解[17]

$$[\boldsymbol{Z}][\boldsymbol{\Psi}] = [\boldsymbol{\Psi}][\boldsymbol{S}], \tag{9}$$

裂纹面荷载的节点位移模态为

$$\{\psi_t\} = [(t+1)^2[\boldsymbol{E}^0] + (t+1)[[\boldsymbol{E}^1]^{\mathrm{T}} - [\boldsymbol{E}^1]] - [\boldsymbol{E}^2]]^{-1}\{-\boldsymbol{F}_t\}, \tag{10}$$

相应的等效节点力为

$$\{\boldsymbol{q}_t\} = [(t+1)[\boldsymbol{E}^0] + [\boldsymbol{E}^1]^{\mathrm{T}}]\{\psi_t\}, \tag{11}$$

则位移解为

$$\{\boldsymbol{u}(\xi,\eta)\} = [\boldsymbol{N}(\eta)]\left(\sum_{i=1}^{M}\xi^{t_i+1}\{\psi_{t_i}\} + \sum_{i=1}^{n}c_i\xi^{-\lambda_i}\{\psi_i\}\right). \tag{12}$$

对于给定的积分常数,边界上的节点位移为

$$\{\boldsymbol{u}_b\} = \{\boldsymbol{u}(\xi=1)\},$$

$$\{\boldsymbol{u}_b\} = \{\psi_t\} + [\boldsymbol{\Psi}]\{\boldsymbol{c}\}. \tag{13}$$

则对应的等效边界节点力为

$$\{\boldsymbol{P}\} = \{\boldsymbol{q}_t\} + [\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{c}\}, \tag{14}$$

由式(13)可得积分常数用边界位移表达为

$$\{\boldsymbol{c}\} = [\boldsymbol{\Psi}]\{\{\boldsymbol{u}\} - \{\psi_t\}\}, \tag{15}$$

将方程(15)代入方程(14)得

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{u}_b\} = \{\boldsymbol{P}\} - \{\boldsymbol{q}_t\} + [\boldsymbol{K}]\{\psi_t\}, \tag{16}$$

式中[$\boldsymbol{K}$]为刚度矩阵.通过边界条件,由式(16)解出边界节点位移{$\boldsymbol{u}_b$},代入式(15)求得积分常数{$\boldsymbol{c}$},位移场由式(12)求出.求得的位移场代入式(3),最后求出应力场:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta)\} = [\boldsymbol{D}]\sum_{i=1}^{m}\xi^{t_i}[(t_i+1)[\boldsymbol{B}^1(\eta)] + [\boldsymbol{B}^2(\eta)]]\cdot\{\psi_{t_i}\} + [\boldsymbol{D}]\sum_{i=1}^{n}c_i\xi^{-\lambda_i-1}[-\lambda_i[\boldsymbol{B}^1(\eta)] + [\boldsymbol{B}^2(\eta)]]\{\psi_i\}. \tag{17}$$

上式可整理写成

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta)\} = \sum_{i=1}^{n+m}\bar{c}_i\xi^{\bar{\lambda}_i-1}\{\bar{\psi}_{\sigma i}(\eta)\}, \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}&\bar{\lambda}_i = -\lambda_i, i=1,\cdots,n;\\&\bar{\lambda}_i = t_i+1, i=n+1,\cdots,n+m.\end{aligned} \tag{19}$$

$\{\bar{\psi}_{\sigma i}(\eta)\}$为应力模态,表示为

$$\{\bar{\psi}_{\sigma i}(\eta)\} = \begin{Bmatrix}\psi_{xx}(\eta)\\ \psi_{yy}(\eta)\\ \psi_{xy}(\eta)\end{Bmatrix}_i = [\boldsymbol{D}][\bar{\lambda}_i[\boldsymbol{B}^1(\eta)] + [\boldsymbol{B}^2(\eta)]]\{\bar{\psi}_i\}. \tag{20}$$

2 应力强度因子

应力强度因子通过极坐标下的奇异应力$\sigma_{\theta\theta}^{(s)}(r,\theta)$和$\tau_{r\theta}^{(s)}(r,\theta)$来定义.对于双材料界面断裂问题,具有振荡奇异性,应力奇异性指数是一对共轭复数$0.5\pm\mathrm{i}\varepsilon$,$\varepsilon$为振荡指数,大小取决于两种结合材料参数的差异.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\kappa_1/\mu_1 + 1/\mu_2}{\kappa_2/\mu_2 + 1/\mu_1}\right), \tag{21}$$

其中μ_i是剪切模量

$$\kappa_i = \begin{cases}3-4\nu_i, \text{平面应变问题}\\ (3-\nu_i)/(1+v_i), \text{平面应力问题.}\end{cases}$$

对于各向同性双材料板,标准应力强度因子定义为

$$\sigma_{\theta\theta}^{(s)}(\hat{r},0) + \mathrm{i}\tau_{r\theta}^{(s)}(\hat{r},0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}}\left(\frac{\hat{r}}{L}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon}(K_{\mathrm{I}} + \mathrm{i}K_{\mathrm{II}}). \tag{23}$$

式中L为特征长度.方程(23)可表示为矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\theta\theta}^{(s)}(\hat{r},0)\\ \tau_{r\theta}^{(s)}(\hat{r},0)\end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}}\begin{bmatrix}c(\hat{r}) & -s(\hat{r})\\ s(\hat{r}) & c(\hat{r})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}K_{\mathrm{I}}\\ K_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}, \tag{24}$$

其中

$$c(\hat{r}) = \cos(\varepsilon\ln(\hat{r}/L)),\ s(\hat{r}) = \sin(\varepsilon\ln(\hat{r}/L)). \tag{25}$$

对于各向异性双材料板,应力强度因子可定义为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\theta\theta}^{(s)}(\hat{r},0)\\ \tau_{r\theta}^{(s)}(\hat{r},0)\end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}}\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c(\hat{r}) & -s(\hat{r})\\ s(\hat{r}) & c(\hat{r})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}K_{\mathrm{I}}\\ K_{\mathrm{II}}\end{Bmatrix}, \tag{26}$$

其中W_1,W_2可由各向异性材料的弹性常数计算得出[18].本文采用的广义应力强度因子通过推导可表示为[15]

$$\{\boldsymbol{K}(\theta)\} = \sqrt{2\pi L}[\psi_{\sigma L}^{(s)}(\theta)]\{\boldsymbol{c}^{(s)}\}, \tag{27}$$

式中$\{\boldsymbol{K}(\theta)\} = [\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}(\theta), \boldsymbol{K}_{\mathrm{II}}(\theta)]$,$[\psi_{\sigma L}^{(s)}(\theta)]$为奇异应力模态,$\{\boldsymbol{c}^{(s)}\}$是奇异应力项对应的积分常数.

3 数值算例

给出4个带裂缝平板的应力强度因子,考虑了各向同性和各向异性材料,裂纹面荷载考虑了法向和切向荷载.执行计算工作的计算机配置为:处理器Intel(R)Core(TM)i5-2300 CPU @ 2.80 GHz,4个内核,4个逻辑处理器,物理内存8.00 GB.

3.1 各向同性单边裂纹单材料板承受法向裂纹面荷载

考虑如图2所示的含单边裂纹平板,板的尺寸是$W\times2W$,裂纹长度是a,比例中心为O.裂纹表面受到法向裂纹面荷载$\sigma_0=\sigma_0(r)$的作用,$\sigma_0=\lambda(r/a)^n$,其中$n=1,2,\cdots,n$;n是任意常数,N表示W边划分的线单元个数,图2给出$N=6$的网格图,线单元采用具有Gauss-Lobatto-Legendre形函数的11节点高阶单元.表1给出不同板长,不同网格下($N=2,6,10$)无量纲化应力强度因子$K_{\mathrm{I}}/\lambda\sqrt{\pi a}$的数值计算结果.

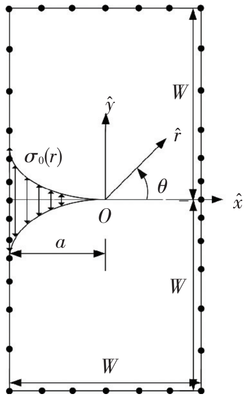


图 2　单边裂纹单材料板

表 1 同时给出了半无限大板单边裂纹承受任意荷载的 I 型应力强度因子解析解[19]，作为本文的参考解.从结果可以看出，随着荷载指数 n 的增大，应力强度因子减小，随着板的尺寸 W/a 增大，应力强度因子减小，板的尺寸 W/a 足够大时，可以近似用来模拟单边裂纹半无限大板.当 $W/a=30$，网格划分 $N=10$ 时的计算结果与解析解很接近，表格最后一行给出了 $W/a=30$，$N=10$ 计算结果与解析解之间的误差，误差范围均小于 3%.图 3 给出了板尺寸 $W/a=30$ 时，不同网格下的计算结果与解析解的对比，可以看出误差很小，粗细不同的 3 种网格计算结果相差较小，由此说明本方法的计算精度对网格粗细划分不敏感，较少的网格就可以达到计算精度. $N=2$ 时 1.4 s 即可完成整个计算过程，$N=10$ 时 60 s 完成计算过程.

表 1　各向同性单边裂纹单材料板承受法向裂纹面荷载的无量纲应力强度因子

W/a	网格疏密	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
5	$N=2$	1.367 882	0.587 560	0.388 117	0.291 725
	$N=6$	1.367 883	0.587 560	0.388 100	0.291 690
	$N=10$	1.367 882	0.587 558	0.388 105	0.291 812
10	$N=2$	1.189 265	0.479 268	0.310 218	0.232 504
	$N=6$	1.189 329	0.479 292	0.310 272	0.231 388
	$N=10$	1.189 328	0.479 289	0.310 225	0.230 874
20	$N=2$	1.139 052	0.449 377	0.288 969	0.216 678
	$N=6$	1.139 897	0.449 631	0.289 731	0.216 867
	$N=10$	1.139 898	0.449 612	0.288 079	0.214 919
30	$N=2$	1.128 514	0.443 804	0.290 567	0.231 779
	$N=6$	1.129 902	0.443 663	0.287 129	0.223 066
	$N=10$	1.129 947	0.443 684	0.285 007	0.203 025
解析解[19]		1.121 471	0.438 548	0.281 146	0.208 314
误差/%		0.75	1.17	1.37	2.54

3.2　各向同性单边裂纹双材料板承受法向裂纹面荷载

考虑如图 4 所示的单边裂纹各向同性双材料板，界面处有一长度为 a 的裂纹，板的尺寸是 $W\times 2W$，比例中心为 O，裂纹表面作用有法向裂纹面荷载 $\sigma_0=\lambda\ (r/a)^n$，其中 $n=1,2,\cdots,n$；n 是任意常数.虽然几何对称、荷载对称，由于材料不对称，本题是个复合断裂问题.下面给出了无量纲化应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}^*=K_{\mathrm{I}}/\lambda\sqrt{\pi a}$，$K_{\mathrm{II}}^*=K_{\mathrm{II}}/\lambda\sqrt{\pi a}$，$W/a=30$，$\eta=E_2/E_1$，$v=0.3$，$n$ 取 1 和 3，比例中心 O 选在裂尖，线单元采用具有 Gauss-Lobatto-Legendre 形函数的 11 节点高阶单元，W 边划分 4 个线单元，网格剖分见图 4，计算结果见表 2.

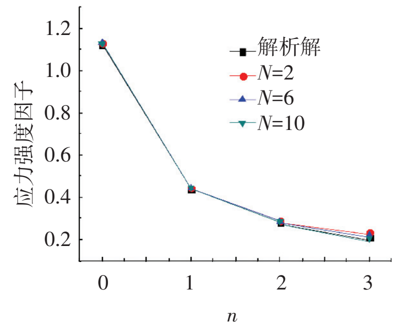


图 3　不同网格计算结果与解析解对比

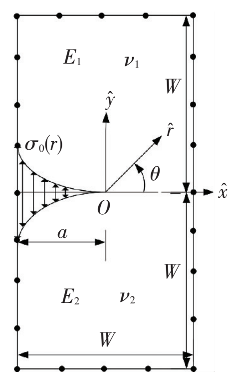


图 4　单边裂纹双材料板

表 2　各向同性单边裂纹双材料板承受法向裂纹面荷载的无量纲应力强度因子

η	应力强度因子	$n=1$		$n=3$	
		K_{I}^*	K_{II}^*	K_{I}^*	K_{II}^*
1	本文	0.443 476	0	0.195 010	0
	文献[10]	0.436 264	0	0.207 840	0
2	本文	0.443 854	−0.006 482	0.217 686	−0.007 837
	文献[10]	0.438 484	−0.004 901	0.209 213	−0.008 282
5	本文	0.444 680	−0.015 739	0.206 461	−0.022 349
	文献[10]	0.438 604	−0.012 702	0.209 820	−0.018 613
10	本文	0.444 920	−0.021 941	0.213 263	−0.025 749
	文献[10]	0.438 746	−0.018 292	0.209 939	−0.024 628

胡小飞[10]利用辛对偶体系构造高阶精度解析奇异单元，与常规有限元单元相结合求解应力强度因子.本文方法的计算结果与其计算结果很相近，随着 $\eta=E_2/E_1$ 的增大，K_{II}^* 也相应增大，这是由于两种材料的不匹配加剧造成的.

3.3　正交各向异性单边裂纹双材料板承受法向裂纹面荷载

如图 5 所示单边裂纹双材料板，界面处有一长度为 a 的裂纹，板的尺寸是 $W\times 2W$，$W/a=5$，比例中心为 O，裂纹面上承受 $\sigma_0(r)=\lambda\ (r/a)^n(n=1,2,3)$ 的法向裂纹面荷载，材料 1 的属性为 $E_{11}=200$ MPa，

$E_{22}=200$ MPa, $\nu_{12}=0.4$, $G_{12}=29.41$ MPa,材料 2 的属性 $E_{11}=10$ MPa, $E_{22}=100$ MPa, $\nu_{12}=0.02$, $G_{12}=28.07$ MPa, φ_1 与 φ_2 是材料主轴与 $\hat{x}$ 正方向的夹角.计算 $\varphi_2=0$,不同 φ_1 下的应力强度因子.其中 $K_{\mathrm{I}}^*=K_{\mathrm{I}}/\lambda\sqrt{\pi a}$, $K_{\mathrm{II}}^*=K_{\mathrm{II}}/\lambda\sqrt{\pi a}$, W 边划分 4 个线单元,网格划分见图 5.

本文求得的应力强度因子见表 3,无解析解可与之对比.可以看出虽然几何图形是对称的,裂纹面只承受对称法向荷载的作用,但是由于材料 1 和材料 2 的差异性会产生 II 型应力强度因子,并且随着指数 n 的增大,相应的 I 型和 II 型应力强度因子减小.当 $\varphi_1=0°$, 90°时,材料 1 为正交各向异性材料, Ⅰ型和Ⅱ型应力强度因子绝对值小于 $\varphi_1=30°$、60°时应力强度因子的绝对值.原因是当材料为正交各向异性材料时式(26)中 W_2 为 0.

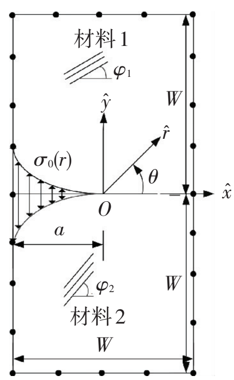


图 5　承受法向裂纹面荷载的单边裂纹板

3.4　正交各向异性单边裂纹双材料板承受切向和法向面荷载

如图 6 所示的单边裂纹双材料板,位于界面上的裂纹 a,板的尺寸是 $W\times 2W$, $W/a=5$,比例中心为 O,裂纹面上承受荷载 $\sigma_0(r)=\lambda\ (r/a)^n$, $\tau_0(r)=\lambda\ (r/a)^n (n=1,2,3)$, φ 为材料弹性主方向与 $\hat{x}$ 轴正向夹角,材料 1 的弹性参数 $E_{11}=100$ GPa, $E_{22}=10$ GPa, $\nu_{12}=0.3$, $G_{12}=27.03$ GPa, $\varphi_1=0$,材料 2 的弹性参数 $E_{11}=100$ GPa, $E_{22}/E_{11}=1$、0.5、0.3、0.1, $\nu_{12}=0.3$, $G_{12}=27.03$ GPa, $\varphi_2=0$,图 6 给出了网格划分, W 边划分 4 个线单元.表 4 给出了无量纲化应力强度因子的计算结果.

对于裂纹表面既承受法向裂纹面荷载 σ,又承受剪切荷载 τ 的问题,I 型和 II 型应力强度因子不仅与法向荷载 σ 有关,还与剪切荷载 τ 有关.同时 I 型、II 型应力强度因子也与两种材料的弹性常数有关,两种材料之间有干涉作用,4 组材料中材料 1 的性能不变,材料 2 的 y 方向弹性模量在变化,随着 y 方向弹性模量的减小,I 型应力强度因子增大,II 型应力强度因子减小.应用本文界面断裂求解模型整个计算过程不超过 5 s.

表 3　正交各向异性单边裂纹双材料板承受法向裂纹面荷载的无量纲应力强度因子

φ_1/(°)	应力强度因子	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	K_{I}^*	1.376 708	0.623 168	0.414 962	0.312 437
	K_{II}^*	−0.219 304	−0.044 082	−0.021 666	−0.013 602
30	K_{I}^*	1.529 958	0.664 131	0.438 071	0.330 323
	K_{II}^*	−0.417 664	−0.147 609	−0.095 482	−0.071 517
60	K_{I}^*	1.601 302	0.691 245	0.455 605	0.342 079
	K_{II}^*	−0.654 783	−0.244 728	−0.160 870	−0.121 181
90	K_{I}^*	1.489 204	0.651 089	0.429 986	0.322 961
	K_{II}^*	−0.723 042	−0.240 713	−0.152 680	−0.112 912

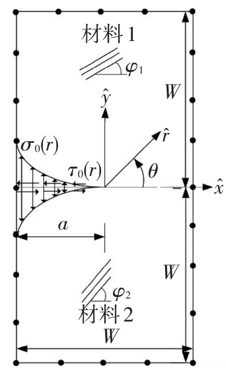


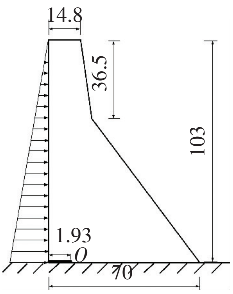
图 6　承受法向和切向裂纹面荷载的单边裂纹板

3.5　重力坝算例

以 Koyna 重力坝(图 7)为例,计算了坝踵裂缝在任意分布水压力作用下的应力强度因子.假定裂缝长 1.93 m,位于坝体与地基结合面.大坝承受满库水压力及自重,考虑平面应力状态.坝体混凝土与坝基均为各向同性材料,两者的泊松比均为 0.25,混凝土密度为 2 450 kg/m^3,坝基自重不考虑,两者的弹性模量分别记为 E_1和 E_2,通过调整 E_1/E_2研究结合材料差异对应力强度因子的影响.地基模拟范围为从坝体向上下游及向下延伸各 2 倍坝高.采用具有 Gauss-Lobatto-Legendre 形函数的 11 节点高阶线单元对坝和地基进行离散,整个模型共剖分 7 个子域,含 108 个线单元(图 8).以裂尖为原点,假定裂缝承受水压力 $\sigma_0(r)=\lambda\ (r/a)^n$, $(n=0,1,2)$, r 为缝面上的节点与裂尖的距离, λ 为裂缝口的静水压力. $\lambda=0$ 时对应缝内无水压, $n=0,1,2$ 分别代表水压力均匀分布、线性分布和按二次函数分布的情况.

表 5 给出了坝体和地基的不同模量比、不同缝面水压力分布时的应力强度因子.可看出对于不同水压力分布形式,随着坝体和坝基弹模比值的增大, K_{I}均明显减小;对于给定弹模, $\lambda=0$ 时 K_{I}最小,随着 n 的减小,施加的缝内水压增大, K_{I}增大.当坝体地基模量比较小时,水压力的差异对 K_{I} 的影响更为重要,随着模量比增大,界面断裂的耦合效应影响加大. K_{II}的大小主要取决于上游面水压力,因此受缝内水压分布影响不大,但当坝体地基模量比增大时,界面断裂耦合效应使得 K_{II} 有所增大.由于此时 K_{I} 减

小,$K_{\mathrm{II}}/K_{\mathrm{I}}$呈增大趋势,裂尖剪切分量增大.



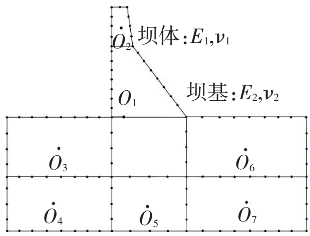


图 7　重力坝尺寸(m)　图 8　子域划分与网格剖分

表 4　正交各向异性单边裂纹双材料板承受切向和法向面荷载的无量纲应力强度因子

$(E_{22}/E_{11})_{\mathrm{II}}$	应力强度因子	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	K_{I}^*	1.125 992	0.520 949	0.347 632	0.262 732
	K_{II}^*	1.474 827	0.517 280	0.321 445	0.234 461
0.5	K_{I}^*	1.196 175	0.539 462	0.358 774	0.270 020
	K_{II}^*	1.409 067	0.504 930	0.316 323	0.231 479
0.3	K_{I}^*	1.254 433	0.556 023	0.369 132	0.278 416
	K_{II}^*	1.345 349	0.492 732	0.310 875	0.228 502
0.1	K_{I}^*	1.386 411	0.598 864	0.395 958	0.297 984
	K_{II}^*	1.148 765	0.454 600	0.292 409	0.216 945

表 5　坝基界面裂缝的应力强度因子　$10^6\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3/2}$

E_1/E_2	应力强度因子	$\lambda=0$	$n=0$	$n=1$	$n=2$
1	K_{I}	1.296 381	1.659 483	1.383 028	1.335 719
	K_{II}	1.407 656	1.461 453	1.439 359	1.407 656
2	K_{I}	1.010 123	1.504 426	1.135 653	1.071 478
	K_{II}	1.422 328	1.393 004	1.426 053	1.427 230
5	K_{I}	0.611 296	1.253 552	0.795 935	0.712 791
	K_{II}	1.510 472	1.349 369	1.473 253	1.485 265
10	K_{I}	0.347 189	1.066 808	0.569 772	0.476 663
	K_{II}	1.603 841	1.360 383	1.540 006	1.559 327

4　结　语

基于比例边界有限元方法提出了裂纹面作用有任意方向、任意大小面荷载的界面断裂求解模型.首先给出了比例边界有限元方法的基本方程,针对任意裂纹面荷载问题,将荷载分解成平行于裂纹面以及垂直于裂纹面的分量,并各自分解成有限项幂函数的和,对每个幂函数荷载解析求解,基于线性叠加原理获得结构在全部荷载作用下的解.第一个算例单材料板的计算结果与解析解进行对比,验证了本模型有较高的计算精度和计算效率,网格剖分简单.接着 3 个算例双材料界面断裂问题,研究了几何尺寸和材料参数的变化对 K_{I}和 K_{II}的影响,本文计算模型可用于求解各向同性和各向异性双材料界面断裂问题.最后将本模型应用于重力坝坝踵裂缝承受水压力时的应力强度因子求解,发现缝内水压分布形式对 K_{I}影响较大;随着坝体和地基模量比的增大,K_{I}明显减小,K_{II}有所降低,裂尖的剪切分量比重增大,断裂模态复合的程度加剧.

参考文献

[1] WILLIAMS M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, 49(2): 199-204.

[2] 涂传林.裂缝面上受外荷载作用下的边界配置法及其应用[J].水利学报,1983,7: 9-16.

[3] BECHET E, MINNEBO H, MOES N, et al. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 64(8): 1033-1056.

[4] SONG C, WOLF J P. Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method [J]. Computers & Structures, 2002, 80(2): 183-197.

[5] BARSOUM R S. Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics [J]. International Journal of Fracture, 1974, 10(4): 603-605.

[6] HENSHELL R D, SHAW K G. Crack tip finite elements are unnecessary[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1975, 9(3): 495-507.

[7] MIYAZAKI N, IKEDA T, SODA T, et al. Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method-application of contour-integral method [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1993, 45(5): 599-610.

[8] MUNZ D, YANG Y Y. Stresses near the edge of bonded dissimilar materials described by two stress intensity factors[J]. International Journal of Fracture, 1993, 60(2): 169-177.

[9] 陈瑛,乔丕忠,姜弘道,等. 双材料界面断裂力学模型与实验方法[J].力学进展,2008,38(1):53-61.

[10] 胡小飞.基于辛空间的解析奇异单元及其在断裂力学中的应用[D].大连:大连理工大学,2012.

[11] 刘钧玉.裂纹内水压对重力坝断裂特性影响的研究[D]. 大连:大连理工大学,2008.

[12] SONG C. Analysis of singular stress fields at multi-material corners under thermal loading[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2006, 65(5): 620-652.

[13] SONG C. A super-element for crack analysis in the time domain[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2004, 61(8): 1332-1357.

[14] YANG Z J, DEEKS A J. Fully-automatic modelling of cohesive crack growth using a finite element-scaled boundary finite element coupled method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2007, 74(16): 2547-2573.

[15] WOLF J P, SONG C. The scaled boundary finite-element method-a primer: derivations[J]. Computers & Structures, 2000, 78(1): 191-210.

[16] SONG C, WOLF J P. The scaled boundary finite-element method-a primer: solution procedures[J]. Computers & Structures, 2000, 78(1): 211-225.

[17] SONG C. A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(23): 2325-2356.

[18] SONG C, TIN-LOI F, GAO W. A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77(12): 2316-2336.

[19] 丁遂栋.断裂力学[M].北京:机械工业出版社.1997.

（编辑　赵丽莹）