

doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2016.03.024

矩形中厚板弯曲问题的解耦解法

钟 阳,刘 衡

(大连理工大学 交通运输学院,116024 辽宁 大连)

摘 要:为简化中厚板弯曲问题解析解的求解方法,采用解耦法和改进的重三角级数法对问题进行求解.首先从板问题的原始控制方程组出发,通过引入过渡函数,用解耦法对变量相互耦合的偏微分方程组进行分解化简,分别解耦成可以直接求解和间接求解的独立偏微分方程,进而在四边固支边界条件下,利用改进的重三角级数法,将计算过程中不同的级数核统一化,分别求得原始控制方程中各个变量的级数解,最后将所得解析解与有限元解进行对比分析.结果表明:随着级数项的增加,级数解与有限元解趋于一致,从而验证了该方法及推导过程的正确性.同时,在整个求解过程中,通过对控制方程组的解耦化简,避免了复杂的运算过程,使得问题的整个解法更为简洁、直观.

关键词: Mindlin 板;四边固支;弯曲问题;解耦法;重三角级数法

中图分类号: TB125 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2016)03-0143-04

An analytical method for bending rectangular plates with all edges clamped supported

ZHONG Yang, LIU Heng

(School of Transportation and Logistics, Dalian University of Technology, 116024 Dalian, Liaoning, China)

Abstract: In order to simplifying the analytic method of bending problem of rectangular thick plate, the decoupling method and the modified Navier method are combined for accurate bending analysis of rectangular thick plates with all edges clamped supported. By using the transition function, the basic governing equations for Mindlin plates are first decoupled into independent differential equations which can be solved separately. With the different series corns unified by modified navier method, analytic solution of rectangular thick plate with all edges clamped supported is derived simply. Numerical comparisons show the correctness and accuracy of the results at last. The method used in this paper leaves out the complicated derivation for calculating coefficients and obtain the solution to problems directly.

Keywords: Mindlin plates; clamped supported; bending problem; decoupling method; modified Navier method

矩形中厚板是一种常见的结构形式,广泛应用于公路、建筑、航天等领域,实际工程中有很多问题都可以简化为中厚板的弯曲问题,而随着现代工业的发展,对板结构的分析也提出了更高的要求,因此,更为准确的研究中厚板的弯曲具有十分重要的理论和实际意义.

目前,处理复杂板问题的流行办法是,采用数值方法来求解问题的数值解,其中具有代表性的方法包括有限差分法^[1]、有限元法^[2]等,但数值解的本质是近似解而非精确解,所以在数值解法不断发展

的同时,学者们也针对板问题的解析解进行了进一步研究,并提出了一些新的求解办法,例如黄义等^[3]采用变分解法,对于弹性地基上四边自由矩形板的弯曲问题进行了求解.钟阳等^[4]建立了矩形中厚板 Hamilton 体系的构造方法,发展了矩形薄板和中厚板弯曲问题的辛几何解法.另外,钟阳等^[5]还采用有限积分变换法求解了部分边界条件下的矩形薄板和中厚板问题.

本文采用的是改进的重三角级数法,来求解 Mindlin 板弯曲问题控制方程,求解过程中采用了解耦法,先通过引入新变量,将原来的二阶偏微分方程组,解耦为 4 个独立的偏微分方程,再以改进的重三角级数法,来分别求解完全独立的方程,进而简化了求解过程.

收稿日期: 2015-11-26.

作者简介: 钟 阳(1955—),男,教授,博士生导师.

通信作者: 钟 阳, zhongyang58@vip.tom.com.

1 Mindlin 板控制方程以及方程的解耦

Mindlin 板弯曲问题控制方程为

$$\nabla^2 w - \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{q}{C} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + \frac{C}{D} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_x \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \frac{C}{D} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \right) = 0. \quad (3)$$

该方程组以弹性理论为基础建立. 其中 $\nabla^2 =$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, w 为板的挠度函数, φ_x 、 φ_y 分别为变形前

垂直中面的直线段在 xy 、 yz 平面内的转角函数, q 为

板单位面积上的外荷载, $C = \frac{5Eh}{12(1+\mu)}$ 为板的剪切

刚度, μ 为泊松系数, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的弯曲刚

度, E 、 h 分别为板的弹性模量和厚度. 板的弯矩以及

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\ M_y = -D \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \\ M_{xy} = \frac{D(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (4)$$

其中 M_x 、 M_y 分别为垂直于 x 、 y 轴截面上的弯矩;

M_{xy} 为扭矩. 控制方程 (1) ~ (3) 为耦合的二阶偏

微分方程组, 求解非常困难. 为了简化求解过程,

首先对耦合偏微分方程 (1) ~ (3) 进行解耦, 根据式

(1) 的基本形式, 令

$$M = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad (5)$$

进而, 分别对式 (1) 进行改写, 将式 (2) 对 x 求导, 将

式 (3) 对 y 求导相加, 经过整理得到

$$\nabla^2 w - M + \frac{q}{C} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 M + \frac{C}{D} (\nabla^2 w - M) = 0. \quad (7)$$

又由式 (6)、(7) 括号内变量, 得到

$$\nabla^2 M - \frac{q}{D} = 0. \quad (8)$$

进一步, 对式 (6) 中作用算子 ∇^2 , 并与式 (8) 相加,

便得到关于已知荷载函数的独立方程为

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} - \frac{\nabla^2 q}{C}. \quad (9)$$

再对式 (1) 分别进行 x 和 y 的求导, 得到

$$\nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

将式 (10) 乘以系数 $(1+\mu)/2$, 再与式 (2) 作相减, 消去方程中的 φ_y 项, 得到 w 与 φ_x 的独立关系表达式为

$$\nabla^2 \varphi_x - Q \varphi_x = -Q \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 w + \frac{q}{C} \right). \quad (12)$$

其中常系数 $Q = 2C/[D(1-\mu)]$. 同理, 由式 (11) 乘

以系数 $(1-\mu)/2$, 和式 (3) 作相减, 消去方程中的 φ_x 项, 得到 w 与 φ_y 的独立关系表达式为

$$\nabla^2 \varphi_y - Q \varphi_y = -Q \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 w + \frac{q}{C} \right). \quad (13)$$

再由式 (6), 对式 (12)、(13) 中的括号内变量进一步简写, 得

$$\nabla^2 \varphi_x - Q \varphi_x = -Q \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\nabla^2 \varphi_y - Q \varphi_y = -Q \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (15)$$

至此, 求解 Mindlin 板弯曲问题控制方程组, 可以

归结为分别求解独立方程 (8)、(9)、(14)、(15).

其中式 (8)、(9) 分别为关于 w 和 M 的独立偏微分

方程, 求解的过程会大大简化于式 (1) ~ (3) 所表示的耦合二阶偏微分方程组.

2 问题的求解

为了求得四边固支 Mindlin 板弯曲问题的解析

解. 本文利用改进的重三角级数法, 对解耦的方程

组展开求解, 四边固支边界条件表达式为

$$\begin{cases} w = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0; & (x = 0 \text{ 或 } x = a) \\ w = 0, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0. & (y = 0 \text{ 或 } y = b) \end{cases} \quad (16)$$

根据边界条件表达式, 设 3 个广义位移变量 w 、 φ_x 和 φ_y 的重三角级数解的基本形式为

$$\begin{cases} w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \\ \varphi_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \\ \varphi_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y. \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\alpha_n = n\pi/a$, $\beta_m = m\pi/b$. 另外根据 M 的定义表达

式(5),故不妨也设 M 的重三角级数解形式为

$$M(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}M_{nm}\sin\alpha_nx\sin\beta_my.\quad(18)$$

将外荷载 q 也进行双重正弦级数展开,可以得到

$$q=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Q_{nm}\sin\alpha_nx\sin\beta_my.\quad(19)$$

其中 Q_{nm} 为傅里叶积分常数.

将式(18)、(19)代入到关于 M 的独立偏微分方程(8)中,得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}M_{nm}(\alpha_n^2+\beta_m^2)\sin\alpha_nx\sin\beta_my= \\ -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_{nm}}{D}\sin\alpha_nx\sin\beta_my. \end{aligned}\quad(20)$$

由级数展开的唯一性定理,等式成立则等式两端级数项前系数相等,故解得

$$M_{nm}=-\frac{Q_{nm}}{D(\alpha_n^2+\beta_m^2)}.\quad(21)$$

将式(21)代回式(18)中,得到 M 的级数解表达式为

$$M(x,y)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_{nm}}{D(\alpha_n^2+\beta_m^2)}\sin\alpha_nx\sin\beta_my.\quad(22)$$

同理将式(17)和式(22)代入式(9)中,得到 w 的级数解表达式为

$$\begin{aligned} w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Q_{mn}\left(\frac{1}{D}+\frac{\alpha_n^2+\beta_m^2}{C}\right)\cdot \\ (\alpha_n^4+\beta_m^4+2\alpha_n^2\beta_m^2)^{-1}\sin\alpha_nx\sin\beta_my. \end{aligned}\quad(23)$$

至此,就求得了 M 和 w 的级数解(22)、(23),然后将它们分别代入式(14)、(15)中,得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}X_{nm}(\alpha_n^2+\beta_m^2+Q)\sin\alpha_nx\sin\beta_my= \\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[M_{nm}\frac{1+\mu}{1-\mu}+W_{nm}Q\right]\alpha_n\cos\alpha_nx\sin\beta_my, \end{aligned}\quad(24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Y_{nm}(\alpha_n^2+\beta_m^2+Q)\sin\alpha_nx\sin\beta_my= \\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[M_{nm}\frac{1+\mu}{1-\mu}+W_{nm}Q\right]\beta_m\sin\alpha_nx\cos\beta_my. \end{aligned}\quad(25)$$

其中 M_{nm} 和 W_{nm} 已求得.

显然,等式(24)、(25)两侧的级数核不同,不可以直接使用级数展开的唯一性定理,来求得项前系数 X_{nm} 和 Y_{nm} ,故使用改进的重三角级数法,利用级数核的变换关系为

$$\begin{cases} \cos\alpha_nx=\sum_{r=1}^{\infty}h_{rn}\sin\alpha_rx, & 0<x<a; \\ \cos\beta_my=\sum_{s=1}^{\infty}h_{sm}\sin\beta_sy, & 0<y<b. \end{cases}\quad(26)$$

其中

$$\begin{aligned} h_{sm}&=\begin{cases} \frac{4s}{\pi(s^2-m^2)} & s+m=\text{odd and } m-s=\text{odd}, \\ 0 & m-s=\text{even and } m-s=\text{even}. \end{cases} \\ h_{rn}&=\begin{cases} \frac{4r}{\pi(r^2-n^2)} & n+r=\text{odd and } n-r=\text{odd}, \\ 0 & n+r=\text{even and } n-r=\text{even}. \end{cases} \end{aligned}$$

将上述级数变换关系代入式(24)、(25),经整理得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_nx\sin\beta_myX_{nm}(\alpha_n^2+\beta_m^2+Q)= \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\alpha_nx\sin\beta_my\sum_{r=1}^{\infty}\left[M_{rm}\frac{1+\mu}{1-\mu}+ \right. \\ \left. W_{rm}Q\right]h_{nr}\alpha_r, \end{aligned}\quad(27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_nx\sin\beta_myY_{nm}(\alpha_n^2+\beta_m^2+Q)= \\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_nx\sin\beta_my\sum_{s=1}^{\infty}\left[M_{ns}\frac{1+\mu}{1-\mu}+ \right. \\ \left. W_{ns}Q\right]h_{ms}\beta_s. \end{aligned}\quad(28)$$

从而经过级数核的变换,等式两端级数形式统一,再由级数展开的唯一性定理,直接解得项前系数 X_{nm} 和 Y_{nm} 分别为

$$\begin{aligned} X_{nm}=-\left(\alpha_n^2+\beta_m^2+Q\right)^{-1}\sum_{r=1}^{\infty}\left[M_{rm}\frac{1+\mu}{1-\mu}+ \right. \\ \left. W_{rm}Q\right]h_{nr}\alpha_r, \end{aligned}\quad(29)$$

$$\begin{aligned} Y_{nm}=-\left(\alpha_n^2+\beta_m^2+Q\right)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\left[M_{ns}\frac{1+\mu}{1-\mu}+ \right. \\ \left. W_{ns}Q\right]h_{ms}\beta_s. \end{aligned}\quad(30)$$

将式(29)、(30)代入式(17),即求得所有广义位移变量 φ_x 和 φ_y 的级数解表达式为

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2+\beta_m^2+Q}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{Q_{rm}}{\alpha_r^2+\beta_m^2}\cdot \\ \left\{\frac{1+\mu}{D(1-\mu)}+\left[\frac{1}{D(\alpha_r^2+\beta_m^2)}+\frac{1}{C}\right]Q\right\}\cdot \\ h_{nr}\alpha_r\sin\alpha_nx\sin\beta_my, \end{aligned}\quad(31)$$

$$\begin{aligned} \varphi_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2+\beta_m^2+Q}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Q_{ns}}{\alpha_n^2+\beta_s^2}\cdot \\ \left\{\frac{1+\mu}{D(1-\mu)}+\left[\frac{1}{D(\alpha_n^2+\beta_s^2)}+\frac{1}{C}\right]Q\right\}\cdot \\ h_{ms}\beta_s\sin\alpha_nx\sin\beta_my. \end{aligned}\quad(32)$$

再由广义位移与内力的关系式,便可以求得弯矩 M_x 和 M_y 表达式分别为

$$\begin{aligned} M_x = & -D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n \cos \alpha_n x \sin \beta_m y (\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \right. \\ & Q)^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} \left[-\frac{Q_{rm}}{D(\alpha_r^2 + \beta_m^2)} \frac{1+\mu}{1-\mu} + Q \left(\frac{Q_{rm}}{D} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\alpha_r^2 + \beta_m^2}{C} \right) (\alpha_r^4 + \beta_m^4 + 2\alpha_r^2 \beta_m^2)^{-1} \right] \cdot \\ & h_{nr} \alpha_r + \mu \beta_m \sin \alpha_n x \cos \beta_m y (\alpha_n^2 + \beta_m^2 + Q)^{-1} \cdot \\ & \sum_{s=1}^{\infty} \left[-\frac{Q_{ns}}{D(\alpha_n^2 + \beta_s^2)} \frac{1+\mu}{1-\mu} + Q \left(\frac{Q_{ns}}{D} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\alpha_n^2 + \beta_s^2}{C} \right) (\alpha_n^4 + \beta_s^4 + 2\alpha_n^2 \beta_s^2)^{-1} \right] h_{ms} \beta_s, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} M_y = & -D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \beta_m \sin \alpha_n x \cos \beta_m y (\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \right. \\ & Q)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[-\frac{Q_{ns}}{D(\alpha_n^2 + \beta_s^2)} \frac{1+\mu}{1-\mu} + Q \left(\frac{Q_{ns}}{D} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\alpha_n^2 + \beta_s^2}{C} \right) (\alpha_n^4 + \beta_s^4 + 2\alpha_n^2 \beta_s^2)^{-1} \right] h_{ms} \beta_s + \\ & \mu \alpha_n \cos \alpha_n x \sin \beta_m y (\alpha_n^2 + \beta_m^2 + Q)^{-1} \cdot \\ & \sum_{r=1}^{\infty} \left[-\frac{Q_{rm}}{D(\alpha_r^2 + \beta_m^2)} \frac{1+\mu}{1-\mu} + Q \left(\frac{Q_{rm}}{D} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\alpha_r^2 + \beta_m^2}{C} \right) (\alpha_r^4 + \beta_m^4 + 2\alpha_r^2 \beta_m^2)^{-1} h_{nr} \alpha_r \right] \}. \end{aligned} \tag{34}$$

3 算 例

为验证本方法的正确性,以四边固支均布荷载作用下的矩形中厚板为例,取板的尺寸 $a = b$,泊松比 $\mu = 0.3$, 设 $\delta = a/h$ 为板的边长厚度比. 图 1 为 $\delta = 3$ 时矩形中厚板弯曲问题挠度无量纲化变化情况示意图.

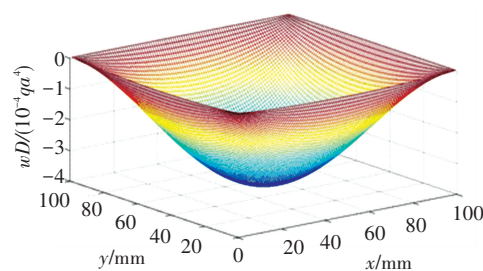


图 1 矩形中厚板弯曲问题挠度变化情况

表 1 中列出了算例条件下,中厚板中点挠度以及固支边中点弯矩的数值求解结果. 结果表明,除 $\delta = 5$ 时的弯矩解析解与有限元解存在 0.2% 的相对误差外,在级数项 m, n 取至 30 时,本文所得的其他解析结果与有限元结果基本一致,从而可以证明本方法及推导的正确性. 另外,通过解析解还可以研究剪切变形占总变形比例随板厚度的变化情况,从

而探讨板种类的划分问题,相关内容会在之后的工作中具体讨论.

表 1 中厚板的挠度与弯矩解析解

δ	$m(n)$	$w/(qa^4 \cdot D^{-1})$		$M_x/(qa^2)$	
		本文	有限元	本文	有限元
3	10	-0.003 62	-0.003 61	-0.042 3	-0.043 5
3	15	-0.003 61	-0.003 61	-0.043 0	-0.043 5
3	20	-0.003 61	-0.003 61	-0.043 5	-0.043 5
5	10	-0.002 12	-0.002 11	-0.040 1	-0.045 8
5	15	-0.002 11	-0.002 11	-0.043 2	-0.045 8
5	20	-0.002 11	-0.002 11	-0.045 9	-0.045 8
10	10	-0.001 48	-0.001 48	-0.043 2	-0.051 0
10	15	-0.001 48	-0.001 48	-0.047 4	-0.051 0
10	20	-0.001 48	-0.001 48	-0.051 0	-0.051 0

注: 表中 w 的值,在 $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ 处取得; M_x 的值,在 $x = 0$,

$y = \frac{b}{2}$ 处取得.

4 结 论

1)采用解耦法和改进的重三角级数法,求解了四边固支条件下矩形中厚板弯曲问题的解析解,在本文最后的算例中,将所得结果与有限元软件计算结果进行了对比,通过比对结果,证明了本文方法及推导的正确性.

2)在求解的过程中,由于解耦法的使用避免了复杂的推导运算,大大简化了推导及计算过程;此外,该解耦方法还可以推广到其他板问题,用于简化相关解析解的求解过程.

参考文献

[1] NASH W. Several approximate analysis of the bending of a rectangular cantilever plate by uniform normal pressure [J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 1952, 19 (1): 33-36.

[2] 监凯维奇. 有限元方法基础理论[M].2 版. 北京:世界图书出版社,2008.

[3] WANG M G, HUANG Y. Rectangular plates on elastic half a space [J]. Journal of Applied Mechanics, 1994, 11(4): 120-127.

[4] ZHONG Yang, LI Rui. Exact bending analysis of fully clamped rectangular thin plates subjected to arbitrary loads [J]. Mechanics Research Communications, 2009, 36(6): 707-714.

[5] ZHONG Yang, TIAN Bin. The analysis of free rectangular thick plates with finite integral transform method on elastic foundation[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(11): 2019-2021.

(编辑 魏希柱)