

doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2016.07.012

热障涂层活塞热应力分析的格点型有限体积法

龚京风¹, 宣领宽¹, 周少伟¹, 明平剑²

(1. 中国舰船研究设计中心, 武汉 430064; 2. 哈尔滨工程大学 动力与能源工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要:为研究热障涂层(thermal barrier coating, TBC)活塞热应力问题,将二维格点型有限体积法(cell vertex FVM, CV-FVM)推广用于三维复合材料热力性能研究.利用交错网格技术,通过将物性参数和待解变量分别定义在单元中心和节点上,将物性参数的空间变化引入离散过程,从而避免数值不连续问题.采用 CV-FVM 数值模拟普通活塞热应力场,计算结果与 ANSYS 计算结果吻合良好.数值模拟 TBC 活塞热应力场,分析活塞 TBC 区域的热力性能,结果表明:活塞的最大温度位于燃烧室与活塞顶面的交界区域;应力最大值位于粘结界与陶瓷层的分界面附近;周向应力对活塞的整体应力水平起主要影响.数值结果表明 CV-FVM 能够作为 TBC 活塞热力性能研究的数值预测工具.

关键词: 交错网格技术; 格点型有限体积法; 热障涂层; 活塞; 热应力

中图分类号: TK422 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2016)07-0076-06

Cell vertex FVM for thermoelastic analysis of the piston with thermal barrier coating

GONG Jingfeng¹, XUAN Lingkuan¹, ZHOU Shaowei¹, MING Pingjian²

(1. China Ship Development and Design Center, Wuhan 430064, China;

2. College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: To analyze the performance of the piston with thermal barrier coating (TBC), two dimensional cell vertex FVM (CV-FVM) has been extended to the research of the thermoelastic performance of three-dimensional composite structures. The staggered grid technique was adopted to incorporate property variation into the course of solution so as to avoid numerical discontinuity. The unknown variable was defined at the cell vertex, while the material property was defined at the cell center. The developed CV-FVM was used to simulate the thermoelastic fields of the ordinary piston and the predicted results agreed with the ANSYS results. Then, the CV-FVM was used to simulate the thermoelastic fields of the TBC piston and the performance were analyzed. The maximum temperature is in the area between the combustion chamber and the top surface, and the maximum stress is around the interface between the ceramic layer and the cohesive layer. The circumferential stress contributes the main part of the thermoelastic stress in the TBC area. The successful application demonstrates that the CV-FVM can be used as a predictive tool for the thermoelastic analysis of the TBC piston.

Keywords: staggered grid technique; cell vertex FVM; thermal barrier coating; piston; thermoelastic

热障涂层(thermal barrier coating, TBC)活塞有助于改善内燃机的燃烧性能、排放性能、抗爆震性能等,TBC 最重要的作用是为活塞基体提供热防护,减少传入活塞基体的热量.而 TBC 应当采用何种形式,以及 TBC 对于活塞热力性能的改变是设计阶段需要研究的重要问题.

建立适用于热障涂层活塞热力性能研究的数值

方法,作为 TBC 活塞设计阶段的预测工具,分析 TBC 活塞温度场、热应力场、热变形具有重要意义.

目前,关于 TBC 活塞热力性能的数值仿真相对较少,一般采用的是基于 FEM 的商用软件.王素等^[1-3]采用 ADINA 数值分析复合材料活塞的整体性能,指出使用陶瓷纤维梯度层可以明显改变活塞温度分布,缓和由于热膨胀系数不匹配,在陶瓷纤维增强层与活塞本体交界处产生的应力,但没有详细讨论活塞表面热应力性能.Buyukkaya 等^[4-5]在活塞上表面全部涂覆 TBC,采用 ANSYS 数值模拟其温度场,指出普通活塞的最大温度出现在燃烧室中心,而

收稿日期: 2015-05-03

基金项目: 国家自然科学基金(51206031)

作者简介: 龚京风(1986—),女,博士,工程师

通信作者: 宣领宽, xuanlingkuan@163.com

TBC 活塞的最大温度在燃烧室与活塞顶面交界处. Cerit 等^[6-7]在活塞顶面局部涂覆 TBC, 采用 ANSYS 数值模拟其温度场及热应力场, 给出了温度、应力在各材料交界面处的分布曲线. 由于 TBC 活塞在基体表面有涂层材料, 相对于传统活塞数值分析, TBC 活塞数值分析需要额外考虑如何划分 TBC 区域网格和如何处理非均匀材料. Aboudi 等^[8]指出, 为了获得正确的复合材料热应力场, 在控制方程的离散过程中需要引入物性参数的空间变化. 传统的 FEM 赋予每一个网格单元均匀的物性参数, 未考虑材料属性的空间变化, 这一处理可能导致计算结果存在人工数值不连续问题^[9-11].

龚京风等^[12-15]发展了一种适用于二维复合材料热应力研究的格点型有限体积方法 (cell vertex FVM, CV-FVM), 数值结果表明, CV-FVM 能够有效避免物性参数引起的数值不连续问题. 本文进一步将 CV-FVM 推广应用于三维问题, 通过数值算例验证计算方法的正确性, 并基于 CV-FVM 分析 TBC 活塞热力性能.

1 基本方程

考虑稳态情况下各向同性线弹性复合材料的热应力问题, 材料的物性参数随空间变化. 基于控制体 Ω 建立热传导和热弹性方程, Ω 体积为 V , 边界面为 S .

1.1 热传导方程

热传导控制方程为

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \oint_S k \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS + \int_V q_{VT} dV. \quad (1)$$

式中: ρ 、 c 、 T 、 k 分别为密度、比热容、温度、热传导系数; n_α 为微元边界 S 的单位外法线矢量分量, $\alpha = x, y, z$; q_{VT} 为热源在单位时间单位体积内产生的热量, 本文不涉及热源, 后文中将省略相应内容. 考虑 3 种边界条件:

$$T = T_B, \text{ 边界 } S_D, \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} n_\alpha = q_B, \text{ 边界 } S_N, \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} n_\alpha = h_B (T - T_\infty), \text{ 边界 } S_R. \quad (4)$$

式中: T_B 为 Dirichlet 边界 S_D 上给定的温度; q_B 为 Neumann 边界 S_N 上给定的法向热流量; h_B 为 Robin 边界 S_R 上给定的对流换热系数, T_∞ 为环境温度. 下标 B 代表边界.

1.2 热弹性方程

热弹性控制方程为

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} dV = \oint_S \sigma_{\alpha\beta} n_\beta dS + \int_V f_\alpha dV.$$

式中: u_α 为位移矢量的分量, $\sigma_{\alpha\beta}$ 为应力张量的分量, f_α 为体积力矢量的分量. 本文不涉及体积力, 后文中将省略相应内容.

利用线弹性体的本构方程及几何方程, 热弹性方程可写为

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} dV = \oint_S \left[G \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) n_\beta + \lambda \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta} n_\beta \right] dS - \oint_S \Gamma a (T - T_r) \delta_{\alpha\beta} n_\beta dS. \quad (5)$$

式中: Γ 为热弹性系数; G 、 λ 为拉姆系数; a 为线膨胀系数; T_r 为参考温度, 当 $T = T_r$ 时结构的热应变为 0; $\delta_{\alpha\beta}$ 为克罗尼克尔符号, 当 $\alpha = \beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta} = 1$, 当 $\alpha \neq \beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta} = 0$.

考虑边界条件:

$$u_\alpha = u_{\alpha B}, \text{ 边界 } S_D, \quad (6)$$
$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = \sigma_{\alpha B}, \text{ 边界 } S_N.$$

式中: $u_{\alpha B}$ 为边界 S_D 上给定的位移; $\sigma_{\alpha B}$ 为边界 S_N 上给定的法向应力.

2 数值离散

对于本文考虑的活塞热应力问题, 数值方法应能够处理三维非结构化网格. 围绕网格节点依次连接相邻单元中心和面中心建立控制体, 见图 1. 空心圆点代表网格节点, 实心圆点代表体中心及面中心. 用粗实线及虚线围成网格, 细实线及点划线围成控制体. 关于二维问题的数值离散参考文献 [12-15].

本文采用交错网格技术模拟 TBC 活塞物性参数的空间变化. 在网格节点上定义待解变量 (温度和位移), 并假设在控制体内均匀分布; 将已知量 (如物性参数) 定义在单元中心, 并假设在网格单元内均匀分布. 考虑控制体与网格单元的关系, 可知控制体内物性参数是变化的, 从而在离散过程中考虑空间变化的物性参数.

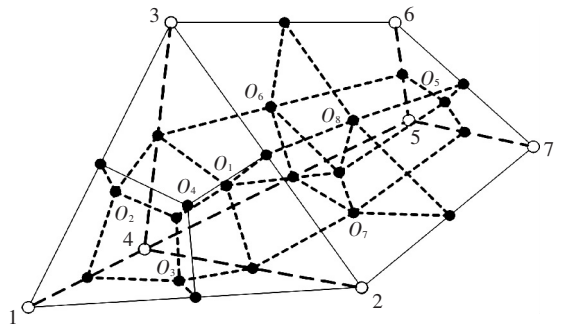


图 1 三维网格示意

2.1 热传导方程的离散

利用向后差分格式离散热传导方程 (1) 左端的一阶时间项, 得

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \left(\sum_{i=1}^{n_c} \frac{\rho_i c_i V_i}{n_{cni}} \right) \frac{(T^t - T^{t-\Delta t})}{\Delta t}.$$

式中: t 为当前时刻, Δt 为时间步长, V_i 为当前节点周围第 i 个单元的体积, n_c 为节点周围单元的总数, n_{cni} 为第 i 个单元的节点数. 下标 i 代表第 i 个单元中心的变量值.

参考 FEM 的思想, 利用型函数离散方程 (1) 右端第一项

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS = \sum_{i=1}^{n_c} k_i \sum_{j=1}^{n_{cni}} T_{ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS.$$

式中: N 为型函数, 下标 ij 代表第 i 个单元中第 j 个节点上的变量值.

考虑边界条件, 对于边界 S_D 上的节点, 其温度直接根据式 (2) 给定. 对于边界 S_N 和 S_R 上的节点, 将式 (3) 和 (4) 代入, 得到热传导方程的最终离散形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n_c} \frac{\rho_i c_i V_i}{n_{cni}} \right) \frac{(T^t - T^{t-\Delta t})}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n_c} k_i \sum_{j=1}^{n_{cni}} T_{ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS - \sum_{i=1}^{n_N} q_B |A_{Bi}| - \sum_{i=1}^{n_R} h_B (T^t - T_\infty) |A_{Bi}|.$$

式中: A_{Bi} 为与节点相邻的第 i 个边界单元面的面积矢量. n_N 为与当前节点相邻的位于 S_N 上的面单元数, n_R 为与当前节点相邻的位于 S_R 上的面单元数.

2.2 热弹性方程的离散

利用中心差分格式离散热弹性方程 (5) 左端的二阶时间项, 得

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} dV = \sum_{i=1}^{n_c} \left(\frac{\rho_i V_i}{n_{cni}} \right) \frac{u_\alpha^t - 2u_\alpha^{t-\Delta t} + u_\alpha^{t-2\Delta t}}{\Delta t^2}.$$

参考热传导方程空间项的离散方法, 离散热弹性方程 (5) 右端第一项和第二项

$$\begin{aligned} & \oint_S \left[G \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) n_\beta + \lambda \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \delta_{\alpha\beta} n_\beta \right] dS - \\ & \oint_S \Gamma a (T - T_r) \delta_{\alpha\beta} n_\beta dS = \\ & \sum_{i=1}^{n_c} G_i \sum_{j=1}^{n_{cni}} \left(u_{\alpha ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\beta} n_\beta dS + u_{\beta ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\alpha} n_\beta dS \right) + \\ & \sum_{i=1}^{n_c} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_{cni}} \left(u_{\gamma ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\gamma} n_\alpha dS \right) - \\ & \sum_{i=1}^{n_c} \left[\Gamma_i a_i \left(\sum_{j=1}^{n_{cni}} \frac{T_{ij}}{n_{cni}} - T_r \right) A_{\alpha i} \right]. \end{aligned}$$

考虑边界条件, 对于 S_D 上的节点, 位移给定为 $u_{\alpha B}$. 对于 S_N 上的点, 将式 (6) 代入得到热弹性方程的最终离散形式

$$M^u \frac{u_\alpha^t - 2u_\alpha^{t-\Delta t} + u_\alpha^{t-2\Delta t}}{\Delta t^2} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_c} G_i \sum_{j=1}^{n_{cni}} \left(u_{\alpha ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\beta} n_\beta dS + u_{\beta ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\alpha} n_\beta dS \right) + \\ & \sum_{i=1}^{n_c} \lambda_i \sum_{j=1}^{n_{cni}} \left(u_{\gamma ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\gamma} n_\alpha dS \right) - \\ & \sum_{i=1}^{n_c} \left[\Gamma_i a_i \left(\sum_{j=1}^{n_{cni}} \frac{T_{ij}}{n_{cni}} - T_r \right) A_{\alpha i} \right] + \sum_{i=1}^{n_N} \sigma_{\alpha B} A_{Bi}. \end{aligned}$$

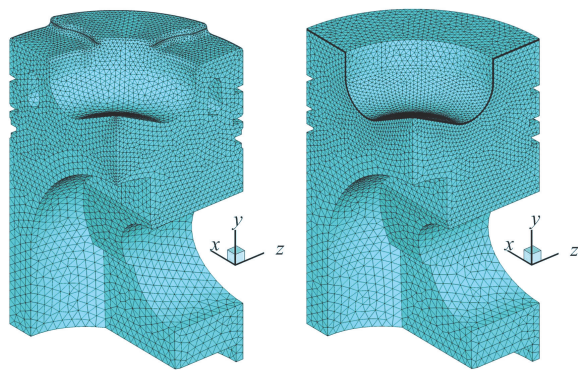
2.3 数值方法的实施

采用 Fortran 语言编程实现本文的数值方法. 文献 [16-18] 采用分离解法求解不同方向的位移方程, 即在求解某一方向的位移时, 相关的其它位移采用上一次的计算结果, 迭代求解各方向位移, 直到获得收敛解. 区别于上述文献, 本文采用耦合解法同时求解 3 个方向位移, 从而 1 次计算即可获得位移场. 不同网格单元的类型函数表达式见文献 [18].

3 活塞计算模型

3.1 活塞几何模型及网格模型

模拟活塞热应力问题, 考虑到活塞几何形状的对称性, 取如图 2 所示的 1/4 模型, 活塞直径为 170 mm. 活塞模型 1 与模型 2 的区别在于, 活塞模型 1 上表面具有避阀坑, 没有布置 TBC, 通过冷却油道冷却活塞头部; 而活塞模型 2 上表面被简化了, 没有避阀坑, 布置有 TBC, 没有冷却油道, 利用 TBC 的隔热作用保护活塞头部. 采用四面体单元和棱柱单元划分计算域, 见图 2.



(a) 活塞 1 网格模型

(b) 活塞 2 网格模型

图 2 活塞网格模型

3.2 边界条件及物性参数

以活塞 2 为例给出计算边界条件. 活塞 $x = 0$ 及 $z = 0$ (见图 3) 平面为对称面, 设为绝热边界, 给定筒支位移约束. 为了避免活塞的刚体平移, 活塞底面给定筒支约束边界条件. 参考文献 [19] 中的活塞表面对流换热系数和环境温度 (由技术参数和经验公式得到), 取平均值做稳态计算. 活塞热边界条件见图 3 和表 1. 活塞物性参数见表 2.

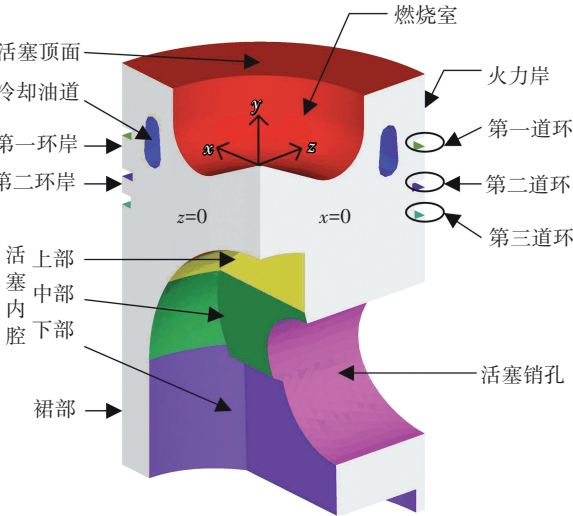


图 3 活塞边界

表 1 活塞热边界条件

边界		对流换热系数/ 环境温度/ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{℃}^{-1}$) ℃	
活塞上表面(顶面及燃烧室)		600	687
火力岸		50	427
第一道环	上壁	1 400	427
	内侧	80	307
第一环岸	下壁	450	227
		100	127
第二道环	上壁	1 985	127
	内侧	100	127
第二环岸	下壁	3 400	127
		200	127
第三道环	上壁	1 435	112
	内侧	200	112
	下壁	1 435	112
冷却油道		4 600	76.8
裙部		800	76.8
活塞销孔		500	76.8
活塞内腔	上部	600	76.8
	中部	500	76.8
	下部	400	76.8

表 2 活塞物性参数

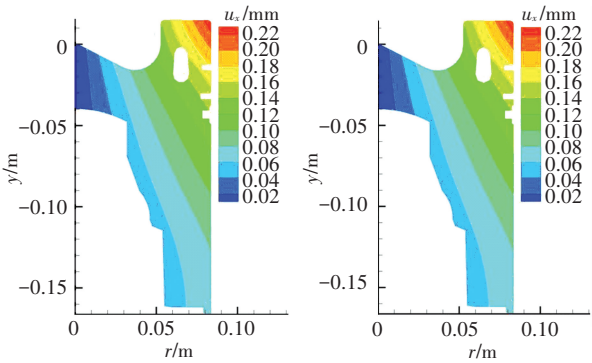
材料	$k/(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{℃}^{-1})$	E/GPa	μ	$\alpha \times 10^{-6}/\text{℃}^{-1}$
铝硅合金	155	69	0.33	21
NiCrAl	16.1	90	0.27	12
MgZrO ₃	0.8	46	0.20	8

4 活塞热应力分析

4.1 普通活塞热应力

为验证本文数值方法的正确性,数值模拟普通活塞 1 的热应力场,活塞材料为硅铝合金.图 4 为不同方法计算得到的 45°平面上位移 u_x 云图.图 5 为不同方法计算的 45°平面 $r = 0.072\text{ m}$ 处的应力 σ_{xx} 曲线,其中

$r = 0.072\text{ m}$ 位于冷却油腔和活塞环槽之间,热应力场较为复杂.通过对比可以看出,本文发展的三维 CV-FVM 计算结果与 ANSYS 计算结果一致,说明本文三维 CV-FVM 可用于活塞热应力数值模拟.



(a) ANSYS 计算结果 (b) CV-FVM 计算结果

图 4 活塞 1 的 x 方向位移云图对比 (45°平面)

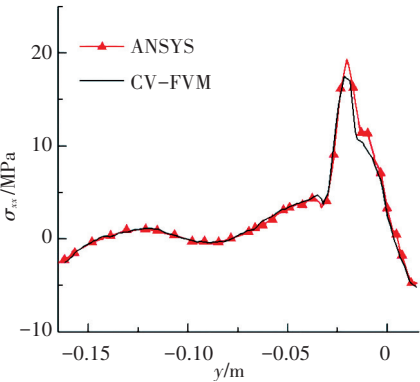


图 5 活塞 1 的应力 σ_{xx} 曲线对比(45°平面上 $r=0.072\text{ m}$ 处)

4.2 TBC 活塞热应力分析

在活塞顶面涂覆 1 mm 的 TBC.活塞基体为铝硅合金 ZL 109,粘结材料为 NiCrAl(厚度为 0.2 mm),陶瓷材料为 MgZrO₃(厚度为 0.8 mm),材料物性参数见表 2.图 6 给出了活塞的表面热流矢量及温度分布云图.活塞 2 表面的 TBC 承受了大部分的热载荷,热流量集中于 TBC 区域,活塞上表面温度明显高于活塞基体温度.

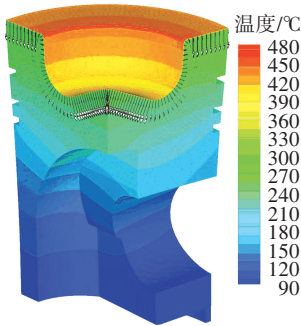


图 6 活塞 2 的表面热流矢量及温度云图

图 7 为活塞 2 内 $\theta = 45^\circ$ 平面上的热应力场云图.由图可见,活塞的最大温度 T 位于燃烧室与活塞

顶面的交界区域 (A 区域), 主要原因是 A 区为活塞上表面转折位置, 相较于其它位置热阻更大, 热量传递更少, 因而温度越高. 轴向应力 σ_{yy} 、径向应力 σ_r 和周向应力 σ_θ 幅值相当, 其最大值位于粘结层与陶瓷层的分界面附近, 主要原因是陶瓷层阻隔了大

部分的热量, 相对而言传递到粘结层、金属基体的热量较小, 故陶瓷层和粘结层之间的温度梯度比粘结层和金属基体间的温度梯度大得多, 陶瓷层和粘结层间存在更大的热应力. 由于 TBC 内物性参数的突变, TBC 区域存在明显的应力集中现象, 容易发生破坏.

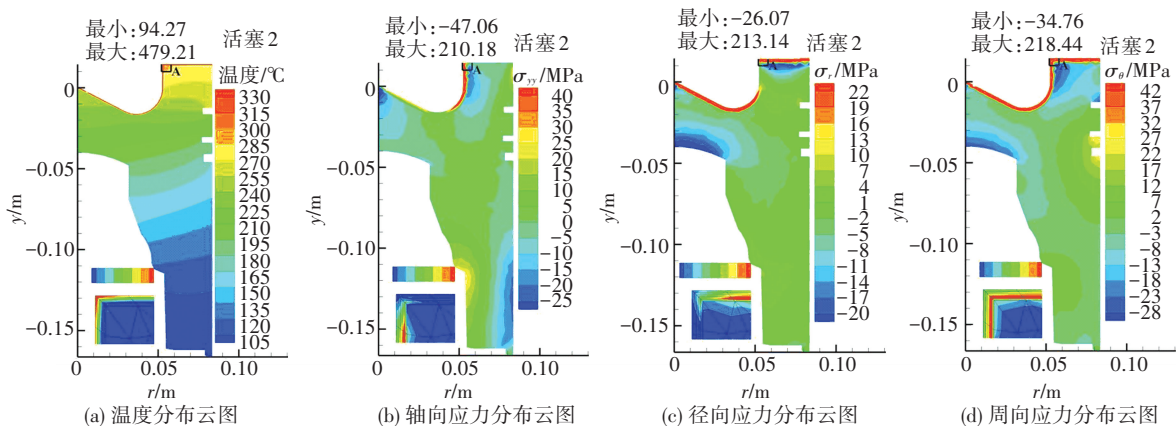


图 7 活塞 2 的 $\theta=45^\circ$ 平面上热应力场云图

分析 TBC 活塞 2 上表面 $\theta = 45^\circ$ 处的温度及应力曲线, 见图 8.

燃烧室顶面包含 3 个区域: 区域 1、区域 2 位于燃烧室, 区域 3 是活塞顶面. 燃烧室边缘区域用斜线标出. 温度最小值位于区域 2, 最大值位于 B 点. 参考温度曲线, 可以看到在燃烧室边缘区域温度梯度最大, 应力在该区域变化幅值相对其他区域大得多. 与应力 σ_r 和 σ_{yy} 相比, 应力 σ_θ 沿径向变化平缓且幅值最大. Von Mises 应力 σ_{vm} 可代表活塞的综合应力情况, 其变化趋势与应力 σ_θ 基本一致, 说明应力 σ_θ 对活塞的整体应力水平起主要影响.

5 结 论

1) 本文基于 CV-FVM 求解热传导方程和热弹性方程, 将适用于二维复合材料热应力问题的 CV-FVM 推广应用于三维热应力问题. 采用 CV-FVM 分析普通活塞的热应力问题, 计算结果与商用软件 ANSYS 计算结果吻合良好, 表明该方法的正确性.

2) 基于 CV-FVM 进一步分析 TBC 活塞热应力场. 通过分析活塞热应力场可知, 陶瓷层能够阻隔活塞顶面的大部分热量, 使得粘结层和陶瓷层间存在较大温度梯度, 引起应力集中, 应力最大值出现在粘结层和陶瓷层分界面区域.

3) 通过分析 TBC 活塞热应力曲线可知, 温度最大值出现在燃烧室与活塞顶面的交界区域, 活塞的应力水平主要受周向应力 σ_θ 影响.

4) TBC 活塞热应力场没有出现数值不连续现象, CV-FVM 能够作为 TBC 活塞热力性能研究的数值预测工具.

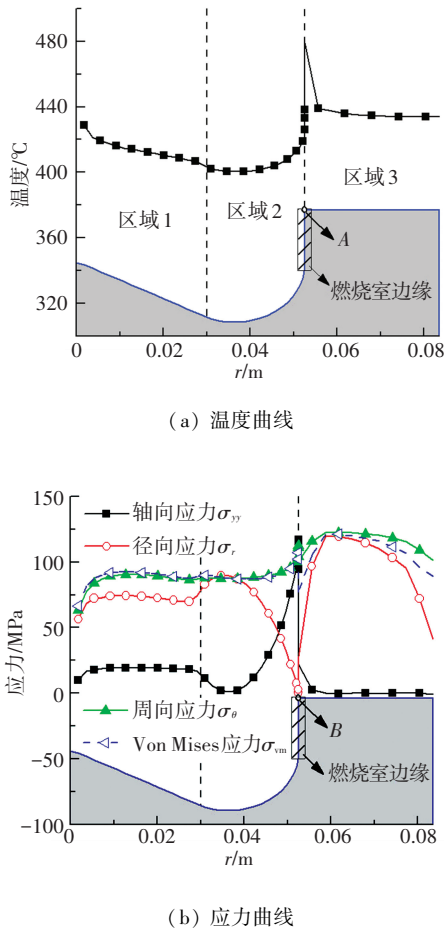


图 8 活塞 2 的上表面 $\theta=45^\circ$ 线上热力曲线

参考文献

[1] 王素, 倪春阳, 朱心雄. 功能梯度材料活塞三维温度场分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2005, 31(12): 1299-1302.

[2] 王素, 倪春阳, 朱心雄. 一种功能梯度材料活塞的材料梯度方程选择[J]. 机械科学与技术, 2006, 25(2): 133-138.

[3] 王素, 倪春阳, 朱玉明, 等. 陶瓷纤维梯度增强活塞的梯度方程研究[J]. 航空学报, 2007, 28(1): 234-239.

[4] BUYUKKAYA E, CERIT M. Thermal analysis of a ceramic coating diesel engine piston using 3-D finite element method[J]. Surface and Coatings Technology, 2007, 202(2): 398-402.

[5] BUYUKKAYA E. Thermal analysis of functionally graded coating AlSi alloy and steel pistons [J]. Surface and Coatings Technology, 2008, 202(16): 3856-3865.

[6] CERIT M. Thermo mechanical analysis of a partially ceramic coated piston used in an SI engine[J]. Surface and Coatings Technology, 2011, 205(11): 3499-3505.

[7] CERIT M, AYHAN V, PARLAK A, et al. Thermal analysis of a partially ceramic coated piston: Effect on cold start HC emission in a spark ignition engine[J]. Applied Thermal Engineering, 2011, 31(2/3): 336-341.

[8] ABOUDI J, PINDER M J, ARNOLD S M. Higher-order theory for functionally graded materials [J]. Composites, Part B, 1999, 33: 777-832.

[9] SANTARE M H, LAMBROS J. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(4): 819-822.

[10] KIM J H, PAULINO G H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(4): 502-514.

[11] CAVALCANTE M A A, MARQUES S P C, PINDER M J. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials-Part II: numerical results [J]. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74(5): 946-957.

[12] GONG J F, XUAN L K, MING P J, et al. Thermoelastic analysis of functionally graded solids using a staggered finite volume method [J]. Composite Structures, 2013, 104: 134-143.

[13] GONG J F, XUAN L K, MING P J, et al. An unstructured finite-volume method for transient heat conduction analysis of multilayer functionally graded materials with mixed grids [J]. Numerical Heat Transfer: Part B, 2013, 63(3): 222-247.

[14] GONG J F, XUAN L K, MING P J, et al. Application of the staggered cell-vertex finite volume method to thermoelastic analysis in heterogeneous materials [J]. Journal of Thermal Stresses, 2014, 37(4): 506-531.

[15] 龚京风, 明平剑, 宣领宽, 等. 基于有限体积法求解 FGM 动态响应及固有特性[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2013, 41(5): 28-33.

[16] TAYLOR G A, BAILEY C, CROSS M. Solution of the elastic/visco-plastic constitutive equations: a finite volume approach[J]. Applied Mathematical Modelling, 1995, 19(12): 746-760.

[17] BAILEY C, CROSS M. A finite volume procedure to solve elastic solid mechanics problems in three dimensions on an unstructured mesh [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(10): 1757-1776.

[18] TAYLOR G A, BAILEY C, CROSS M. A vertex-based finite volume method applied to non-linear material problems in computational solid mechanics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 56(4): 507-529.

[19] 刘友. 船用柴油机活塞瞬态温度场测试与分析研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2013.

(编辑 杨 波)