

doi:10.11918/j.issn.0367-6234.2016.12.007

简支薄壁箱梁自由振动的摄动法解析解

潘旦光¹, 丁民涛¹, 陈 钊^{1,2}

(1. 北京科技大学 土木工程系, 北京 100083; 2. 中电建路桥集团有限公司, 北京 100048)

摘要: 为研究简支薄壁箱梁中剪力滞效应对结构动力特性的影响, 基于模态摄动法提出了一种求解薄壁箱梁自由振动的新方法。该方法以相同跨度等截面欧拉梁的频率和模态为 Ritz 基函数, 将箱梁自由振动的微分方程组转化为一组非线性代数方程进行求解。对于简支箱梁, 可进一步将代数方程组简化为一元二次方程, 从而得到精确的特征值和特征向量。在此基础上, 利用所得箱梁振动模态的解析表达式, 提出了模态剪力滞系数的概念, 从而建立了箱梁固有频率和剪力滞效应之间的关系。随后研究了模态剪力滞系数随跨宽比、翼板抗弯刚度和截面抗弯刚度之比的变化规律。计算结果表明: 简支梁腹板处剪力滞系数最大且大于 1, 为正剪力滞效应; 随着模态阶数的增加, 跨宽比的减小和翼板抗弯刚度和截面抗弯刚度之比的增大, 剪力滞效应呈现增大的趋势。

关键词: 箱梁; 剪力滞; 模态摄动法; 动力特性; 解析解

中图分类号: TU311.3, U448.21

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2016)12-0056-06

Analytic solution of free vibration of simply-supported thin-walled box girder by perturbation method

PAN Danguang¹, DING Mintao¹, CHEN Fan^{1,2}

(1. Department of Civil Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. Power China Road Bridge Group Co., Ltd., Beijing 100048, China)

Abstract: To investigate the shear lag effect of thin-walled box girder on the dynamic characteristics, a new approach was developed to analyze the free vibration of box girders based on the modal perturbation method. The natural modes of vibration of the corresponding prismatic Euler beam with the same length and boundary conditions were used as Ritz base functions. Then, the new method can transform the set of partial differential equations governing the transverse vibration of the box girder into a set of nonlinear algebraic equations. For the simply-supported beams, the algebraic equations were further simplified as quadratic equation with one unknown, so that the exact eigenvalues and eigenvectors could be obtained. The analytical vibration modes of the box girder were used to propose the shear lag coefficients of modes, which illustrates the relationship between the natural frequency and shear lag effect. Numerical examples were used to analyze the shear lag coefficients of modes varying with the ratio between span and width, the second moment of area ratio between flange slab and the full section. The numerical results show that the maximum shear lag coefficients of modes located at the web of the box girder are greater than 1, which are positive shear lag effect. As the increase of modes order, the reduction of the ratio between span and width and the increase of the second moment of area ratio between flange slab and the full section, the shear lag coefficients and shear lag effect would be more remarkable.

Keywords: box girder; shear lag; modal perturbation; dynamic characteristics; analytic solution

薄壁箱梁具有良好的抗弯和抗扭性能在现代桥梁中得到广泛应用。当箱梁发生竖向位移时, 由于翼板中剪力滞后的影响引起翼板纵向应力沿横向分布不均匀, 而存在剪力滞效应^[1-5]。

对于箱梁自由振动而言, 剪力滞效应引起箱梁的动力特性发生显著变化。对于不同的跨高比, 可忽

略箱梁部分影响因素而建立相应的自由振动方程。当跨高比较大时, 甘亚南等^[6]、吴有俊等^[7]以欧拉梁为基础, 忽略了剪力滞引起纵向位移的惯性影响, 分别研究了剪力滞引起的弹性势能对梁动力特性的影响。对于跨高比小的箱梁, 此时截面的剪切变形和转动惯量影响不可忽略。张永健等^[8]分析了剪切变形和剪力滞效应对简支箱梁自振频率的影响。甘亚南等^[9-10]基于 Timoshenko 梁理论讨论了剪力滞效应对等截面箱梁自振频率的影响。周旺保等^[11]研究了剪力滞、剪切变形、转动惯量、滑移效应对钢-混

收稿日期: 2015-09-12

基金项目: 北京市自然科学基金(8143037)

作者简介: 潘旦光(1974—), 男, 研究员, 博士生导师

通信作者: 潘旦光, pdg@ustb.edu.cn

凝土组合箱型梁动力特性的影响。

在上述箱梁自由振动的求解过程中, 大部分是基于分离变量法得到箱梁自由振动的解析解。由于箱梁的自由振动控制方程是一个微分方程组, 因此自振频率超越方程及模态函数很复杂。从梁的振动方程角度看, 剪力滞效应对梁振动的影响可看作是欧拉梁振动方程修正后形成的系统, 则可以利用摄动法求解箱梁自由振动。楼梦麟^[12]首先利用模态摄动法, 将变系数微分方程的求解问题转化为代数方程组进行求解, 从而简化了特征方程的求解。随后, 楼梦麟等^[13]、潘旦光等^[14]将模态摄动法应用于变截面梁的振动。潘旦光等^[15-16]进一步将模态摄动法推广到变截面 Timoshenko 梁振动方程的求解。本文将利用模态摄动法的基本思想, 研究箱梁的自振频率和振型的简化分析方法。在此基础上, 根据箱梁位移和弯矩的关系, 推导了箱梁自由振动的模态剪力滞系数, 并分析跨宽比和翼缘板的刚度占梁总刚度百分比等对梁模态剪力滞系数的影响。

1 箱梁的自由振动方程

图 1 所示的矩形薄壁箱型梁, 若梁的竖向位移为 $w(x, t)$, 上下翼缘板的纵向位移函数为 $v_i(x, y, t)$, 且假定 $v_i(x, y, t)$ 可表示为

$$v_i(x, y, t) = h_i \left[\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{y^3}{b^3} \right) u(x, t) \right]. \quad (1)$$

式中: $u(x, t)$ 为翼缘板剪切转角的最大差值, x, y 和 z 分别表示顺梁方向、垂直于梁方向和竖向, b 为箱室净宽的一半, h_i 截面形心到顶、底板的距离, i 分别取顶、底板。

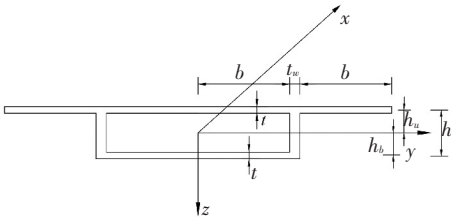


图 1 箱形梁截面

Fig.1 Cross section of box girder

基于欧拉梁理论, 梁的动能 T 为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2)$$

梁的势能 V 为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{9}{5} \frac{G}{b^2} I_s u'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI_s \left(\frac{3}{2} w'' u' + \frac{9}{14} u'^2 \right) dx. \quad (3)$$

式中: ρ, E, G, A 分别为箱梁的密度、弹性模量、剪切模量和截面面积, I 为截面的转动惯量, I_s 为顶板和底板的转动惯量。根据 Hamilton 原理可得梁的自由振动方程为:

$$\rho A \ddot{w} + EI w^{(4)} + \frac{3}{4} EI_s u^{(3)} = 0, \quad (4a)$$

$$\rho I_s \ddot{u} - \frac{3}{4} EI_s w^{(3)} - \frac{9}{14} EI_s u'' + \frac{9}{5} \frac{GI_s}{b^2} u = 0. \quad (4b)$$

2 简支箱梁动力特性的模态摄动解

若式(4)所对应的第 j 阶模态的特征值为 $\bar{\lambda}_j = \bar{\omega}_j^2$, 特征向量为 $\bar{W}_j(x)$ 和 $\bar{U}_j(x)$, 则第 j 阶模态的特征方程为:

$$-\bar{\lambda}_j \rho A \bar{W}_j + EI \bar{W}_j^{(4)} + \frac{3}{4} EI_s \bar{U}_j^{(3)} = 0, \quad (5a)$$

$$\bar{\lambda}_j \rho I_s \bar{U}_j' + \frac{3}{4} EI_s \bar{W}_j^{(4)} + \frac{9}{14} EI_s \bar{U}_j^{(3)} - \frac{9GI_s}{5b^2} \bar{U}_j' = 0. \quad (5b)$$

忽略剪力滞效应后, 具有相同跨度欧拉梁第 j 阶模态的控制方程为

$$-\lambda_j \rho A W_j + EI W_j^{(4)} = 0. \quad (6)$$

当梁为简支梁时, 与式(6)特征方程相对应的特征值和模态为

$$\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{\rho A}, \quad W_j = \sin \left(\frac{j\pi}{l} x \right). \quad (7)$$

直接模态摄动法的基本思想是把式(5)考虑剪力滞效应薄壁箱梁的特征方程看成式(6)所表示的等截面欧拉梁经过参数修改所得到的新系统, 这个新系统的主模态函数以及特征值可以用等截面欧拉梁的模态特征经过简单的摄动分析求解。则可以假设:

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j + \Delta \lambda_j, \quad (8a)$$

$$\bar{W}_j = W_j + \sum_{k=1, k \neq j}^n W_k p_{kj}, \quad (8b)$$

$$\bar{U}_j = \sum_{k=1}^n W_k' q_{kj}. \quad (8c)$$

从理论上来说, 式(6)中梁有无穷多个主模态函数, 即式(8)中 n 应该趋向于无穷。但是在实际计算时, 通常只需要考虑有限个低阶模态进行近似的计算就可以满足要求。当解出 $\Delta \lambda_j, p_{kj}, q_{kj}$ 这 $2n$ 个未知数, 即可计算箱梁的第 j 阶特征值及其对应的主模态函数。将(8)式代入(5)式可得:

$$-(\lambda_j + \Delta \lambda_j) \rho A \left(W_j + \sum_{k=1, k \neq j}^n W_k p_{kj} \right) + EI \left(W_j^{(4)} + \sum_{k=1, k \neq j}^n W_k^{(4)} p_{kj} \right) + \frac{3}{4} EI_s \sum_{k=1}^n W_k^{(3)} q_{kj} = 0, \quad (9a)$$

$$(\lambda_j + \Delta\lambda_j) \rho I_s \sum_{k=1}^n W_k'' q_{kj} + \frac{3}{4} EI_s (W_j^{(4)} + \sum_{k=1, k \neq j}^n W_k^{(4)} p_{kj}) + \frac{9}{14} EI_s \sum_{k=1}^n W_k^{(4)} q_{kj} - \frac{9GI_s}{5b^2} \sum_{k=1}^n W_k'' q_{kj} = 0 \quad (9b)$$

在方程(9)两边同时乘以 $W_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$), 然后沿全长积分, 根据欧拉梁的模式正交性, 化简后可得:

$$-(\lambda_j + \Delta\lambda_j) \rho A \sum_{k=1, k \neq j}^n R_{ik} p_{kj} + EI \sum_{k=1, k \neq j}^n T_{ik} p_{kj} - \Delta\lambda_j \rho A R_{ij} + \frac{3}{4} EI_s \sum_{k=1}^n T_{ik} q_{kj} = \lambda_j \rho A R_{ij} - EIT_{ij}, \quad (10a)$$

$$\frac{3}{4} EI_s \sum_{k=1, k \neq j}^n T_{ik} p_{kj} + \rho I_s (\lambda_j + \Delta\lambda_j) \sum_{k=1}^n S_{ik} q_{kj} + \frac{9}{14} EI_s \sum_{k=1}^n T_{ik} q_{kj} - \frac{9GI_s}{5b^2} \sum_{k=1}^n S_{ik} q_{kj} = -\frac{3}{4} EI_s T_{ij}. \quad (10b)$$

式(10)中:

$$R_{ij} = \int_0^l W_i W_j dx = \frac{l}{2} \delta_{ij},$$

$$S_{ij} = \int_0^l W_i W_j'' dx = -\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} \delta_{ij},$$

$$T_{ij} = \int_0^l W_i W_j^{(4)} dx = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} \delta_{ij}.$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

依次取 i 为 $1, 2, \dots, n$, 重复利用式(10)可得 $2n$ 个代数方程. 将 $2n$ 个代数方程写成矩阵形式:

$$\left(\begin{bmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{bmatrix} + \Delta\lambda_j \begin{bmatrix} D^{11} & 0 \\ 0 & D^{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

式中: C^{11} 、 C^{12} 、 C^{21} 、 C^{22} 、 D^{11} 、 D^{22} 都为 n 阶方阵, p 、 q 、 M 、 N 为 n 阶向量. 各个方阵和向量的元素分别为:

$$C_{ik}^{11} = \begin{cases} -\lambda_j \rho A R_{ik} + EIT_{ik}, & k \neq j; \\ -\lambda_j \rho A R_{ij}, & k = j. \end{cases}$$

$$C_{ik}^{12} = \frac{3}{4} EI_s T_{ik}.$$

$$C_{ik}^{21} = \begin{cases} \frac{3}{4} EI_s T_{ik}, & k \neq j; \\ 0, & k = j. \end{cases}$$

$$C_{ik}^{22} = \lambda_j \rho I_s S_{ik} + \frac{9}{14} EI_s T_{ik} - \frac{9GI_s}{5b^2} S_{ik},$$

$$D_{ik}^{11} = \begin{cases} -\rho A R_{ik}, & k \neq j; \\ 0, & k = j. \end{cases}$$

$$D_{ik}^{22} = \rho I_s S_{ik}.$$

$$p = \{p_{1j} \cdots p_{(j-1)j} \quad \Delta\lambda_j/\lambda_j \quad p_{(j+1)j} \cdots p_{nj}\}^T,$$

$$q = \{q_{1j} \quad q_{2j} \quad \cdots \quad q_{nj}\}^T,$$

$$M_i = -EIT_{ij} + \lambda_j \rho A R_{ij}, \quad N_i = -\frac{3}{4} EI_s T_{ij}.$$

显然 C^{11} 、 C^{12} 、 C^{21} 、 C^{22} 、 D^{11} 、 D^{22} 都为对角矩阵, $M_i=0, N_i=0 (i \neq j)$, 因此, p 、 q 只有第 j 个元素不为零, 则式(11)只剩下两个方程. 由此可得:

$$\bar{\lambda}_j - \frac{3}{4} \frac{I_s}{l} q_{jj} \lambda_j = \lambda_j, \quad (12a)$$

$$q_{jj} = \frac{-\frac{3}{4} EI_s \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2}{\frac{9}{14} EI_s \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 + \frac{9GI_s}{5b^2} - \rho I_s \bar{\lambda}_j}. \quad (12b)$$

将式(12b)代入式(12a)可得

$$\frac{\bar{\lambda}_j}{\lambda_j} = 1 - \frac{j^2 \pi^2 (\alpha - 1)}{\alpha \frac{j^2 \pi^2}{l^2} + \beta^2 - \frac{14}{9} \frac{\alpha \rho \bar{\lambda}_j}{E}}. \quad (13)$$

式中 $\alpha = \frac{1}{1-7I_s/8I}$, $\beta = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{14G\alpha}{5E}}$ 为瑞纳斯常数. 当

$I_s=0, \alpha=1$, 即梁不存在翼板而没有剪力滞效应, 此时, 梁的动力特性等于欧拉梁的动力特性. 因此, 式(13)中等式右边第二项为剪力滞效应所引起梁动力特性变化. 当 $I_s>0$ 时, $\alpha>1$, 由此使 $\bar{\lambda}_j < \lambda_j$, 这表明剪力滞使梁的频率降低. 对于等式右边第二项分母

中的 $\frac{14\alpha\rho\bar{\lambda}_j}{9E}$ 项是剪力滞所引起的惯性效应. 若忽略剪力滞的惯性效应, 即为吴有俊等^[7]所得箱形简支梁动力特性的计算公式.

由式(13)可得 $\bar{\lambda}_j$ 的两个根, 其数值小的根为

$$\bar{\lambda}_j = 0.5\xi - \sqrt{0.25\xi^2 - \eta}, \quad (14)$$

$$\text{式中 } \xi = \frac{9E}{14\rho} \left[\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\alpha} \right] + \lambda_j, \eta = \frac{9E\lambda_j}{14\rho\alpha} \left[\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 + \beta^2 \right].$$

将式(14)代入式(12b)可得 q_{jj} 的解为

$$q_{jj} = \frac{4I}{3I_s} \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_j}. \quad (15)$$

由式(14)可知, 采用直接模式摄动法计算等截面箱梁振动特性式的计算结果与式(8)中 n 的选取无关. 当 n 趋近于无穷时, 式(8)中代表了全模式的展开, 是精确的坐标变换. 所以式(14)和式(15)所得的特征值和特征向量是简支箱梁动力特性的精确解.

3 模态的剪力滞系数

由式(8)和(15)可知, 箱形简支梁的模式为

$$\bar{W}_j = W_j, \bar{U}_j = q_{jj} W_j', \quad (16)$$

则第 j 阶模态翼板中的正应力为

$$\sigma_{ij}(x) = Eh_i \left[\bar{W}''_j + \left(1 - \frac{y^3}{b^3} \right) \bar{U}'_j \right], \quad (17)$$

式 (16) 模态位移下, 箱梁任意截面的弯矩为

$$M_j(x) = - \left[EI \bar{W}''_j(x) + \frac{3}{4} EI_s \bar{U}'_j(x) \right]. \quad (18)$$

在式 (18) 弯矩作用下, 按欧拉梁理论所得翼板的正应力为

$$\bar{\sigma}_{ij}(x) = - \frac{M(x) h_i}{I} = Eh_i \left[\bar{W}''_j(x) + \frac{3}{4} \frac{I_s}{I} \bar{U}'_j(x) \right]. \quad (19)$$

根据剪力滞系数的定义: $\gamma_j = \frac{\sigma_j}{\bar{\sigma}}$, 由式 (15) ~

(19), 可得到模态的剪力滞系数为

$$\gamma_j(x) = \frac{\lambda_j + \left(1 - \frac{y^3}{b^3} \right) \frac{4I}{3I_s} (\bar{\lambda}_j - \lambda_j)}{\bar{\lambda}_j}. \quad (20)$$

由式 (20) 可知, 对简支梁而言, 剪力滞系数和 x 无关, 即纵向各截面的剪力系数相同. 箱梁翼板和腹板交角处的剪力滞系数为

$$\gamma_j^e = \frac{\lambda_j}{\bar{\lambda}_j}. \quad (21)$$

箱梁翼板和腹板交角处的剪力滞系数为最大剪力滞系数. 最大剪力滞系数用于度量箱梁剪力滞影响的大小. 式 (21) 表明单箱单室截面翼板和腹板交角处的剪力滞系数等于欧拉梁特征值和剪力滞影响下箱梁特征值的比. 这表明对于箱梁自由振动而言, 最大剪力滞系数既反映了箱梁剪力滞的大小, 又反映了由于剪力滞引起梁自振频率的变化. 最大剪力滞系数越大, 梁的自振频率降低越多.

4 计算精度分析

式 (14) 所得的特征值和特征向量是在忽略剪切变形和转动惯量影响后所得的精确解. 为验证本文方法计算结果的精度, 下面对箱型截面梁分别进行欧拉梁理论, 本文方法和有限元方法的自由振动计算. 其中有限元方法是采用壳单元的分析结果. 箱梁截面的材料参数为: $E = 35 \text{ GPa}$, $G = 15 \text{ GPa}$. 箱梁截面形式和坐标如图 (1) 所示, 各部位的尺寸为: $t = 0.25 \text{ m}$, $b = 3.55 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$. 当 $I_s/I = 0.88$ 时, 腹板宽度为 $t_w = 0.4 \text{ m}$; 当 $I_s/I = 0.94$ 时, 腹板宽度为 $t_w = 0.2 \text{ m}$, 同时选取梁的跨度为 40、30 和 20 m. 不同方法所得箱梁的前三阶的自振频率见表 1.

由计算结果可知本文的方法由于忽略了转动惯量、剪切变形以及翼缘板振动的影响而与有限元结

果有一定差别, 但是误差并不大, 可满足工程需要. 同时, 本文方法所得各阶模态的频率都小于欧拉梁的频率, 且模态阶数越高, 两者的频率相差越大, 这表明剪力滞对梁的自由振动有显著影响.

表 1 简支薄壁箱梁的固有频率

Tab.1 Natural frequencies of simply-supported thin-walled box girder

I_s/I	$l/2b$	计算方法	各阶固有频率/Hz		
			一阶	二阶	三阶
0.88	5.63	欧拉梁	3.01	12.03	27.06
		本文方法	2.93	11.02	22.81
		有限元	3.12	11.04	22.06
	4.23	欧拉梁	5.34	21.38	48.10
		本文方法	5.13	18.55	37.05
		有限元	5.34	17.79	33.93
0.94	2.82	欧拉梁	12.03	48.10	108.23
		本文方法	11.02	37.05	70.02
		有限元	10.97	33.02	59.36
	5.63	欧拉梁	3.10	12.41	27.93
		本文方法	3.02	11.31	23.24
		有限元	3.15	10.72	20.47
	4.23	欧拉梁	5.52	22.07	49.65
		本文方法	5.28	18.96	37.43
		有限元	5.33	16.84	30.53
	2.82	欧拉梁	12.41	49.65	111.72
		本文方法	11.31	37.43	69.24
		有限元	10.65	29.95	51.25

5 参数分析

以跨宽比 ($l/2b$) 和翼板相对转动惯量 (I_s/I) 为参数讨论箱梁自由振动时, 模态剪力滞系数和梁自振频率的变化规律. 参数分析时箱梁截面的跨度和腹板厚度为变量, 其余参数同前.

5.1 模态剪力滞系数的横向分布

箱梁顶板的剪力滞分布沿箱梁中轴线左右对称, 因此只画出一半的剪力滞系数. 取梁的跨度为 40 m, 前 4 阶模态箱梁上翼板的剪力滞系数见图 2.

由计算结果可知: 1) 腹板附近剪力滞系数最大, 且 $\gamma_j^e \geq 1$, 这表明简支梁自由振动时, 梁的剪力滞效应为正剪力滞效应. 事实上, 由式 (13) 可知, 剪力滞使梁的特征值降低, 因此, $\gamma_j^e \geq 1$ 是剪力滞使梁振动频率降低的必然结果; 2) 前四阶模态的最大剪力滞系数分别为 1.045、1.176、1.389 和 1.706. 这表明随着振动阶数的增加, 剪力滞后效应越来越明显. 剪力滞使箱梁前四阶模态的频率分别降低了 2.2%、

7.8%、15.1%和23.4%。因此,对于有高阶模态参与振动的箱梁,必须考虑剪力滞效应的影响。

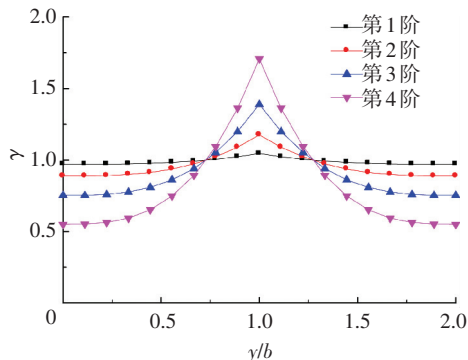


图2 上翼板剪力滞系数

Fig.2 Shear lag coefficient of top flange plate

5.2 不同参数对最大剪力滞系数的影响

简支梁的最大剪力滞系数随 $l/2b$ 和 I_s/I 的变化曲线见图3、4。

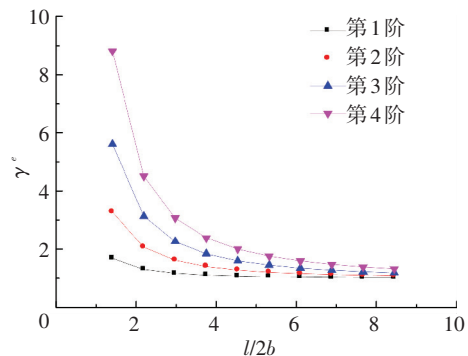


图3 最大剪力滞系数 γ^e 与跨宽比 $(l/2b)$ 的关系

Fig.3 Relationship between γ^e and $l/2b$

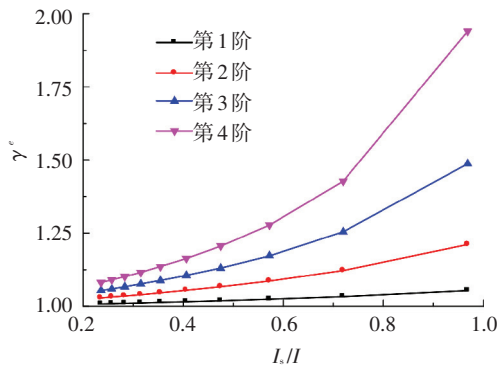


图4 最大剪力滞系数 γ^e 与 (I_s/I) 的关系 ($l=40$ m)

Fig.4 Relationship between γ^e and I_s/I ($l=40$ m)

由图可知:1) $l/2b$ 越大, γ^e 越小。因此相同截面情况下,梁跨度越大,剪力滞影响越小。对于第一阶模态,当 $l/2b > 4$ 时, $\gamma^e < 1.05$ 。因此,对于仅需考虑第一阶模态振动的箱梁可忽略剪力滞效应的影响;2) I_s/I 反映翼缘板刚度占总刚度的百分比。 I_s/I 显著地影响箱梁的剪力滞后效应,由此也显著影响箱梁自振频率。 I_s/I 越大, γ^e 越大。这说明 I_s/I 比值越大,频率降低越多。但是,对于第一阶模态而言, $I_s/I < 0.9$ 时, $\gamma^e < 1.05$,此时剪力滞影响很小,可以忽略不计。

但是对于2阶以上模态,当 $I_s/I > 0.4$ 时,则 $\gamma^e > 1.05$,此时,剪力滞影响不可忽略。

6 结论

本文基于欧拉梁的特征值和模态,利用模态摄动法将箱梁的自由振动方程组转化为非线性代数方程组来求解,从而简化计算。应用于等截面简支梁时,可得到箱梁主频率和模态的精确解。基于箱型梁的模态,进一步推导了模态剪力滞系数。由理论分析和数值计算可得如下结论:

1) 对于简支梁而言,模态剪力滞系数沿梁轴线方向不变。且单箱单室截面翼板和腹板交角处的剪力滞系数等于欧拉梁特征值和剪力滞影响下箱梁特征值的比。

2) 腹板附近剪力滞系数最大,且 $\gamma^e \geq 1$,这表明简支箱梁自由振动时,梁的剪力滞效应为正剪力滞效应。

3) 随着模态阶数的增加,剪力滞效应越来越大,由此导致箱梁高阶模态的自振频率显著降低。

4) $l/2b$ 越小, I_s/I 越大, γ^e 越大。当 $l/2b > 4$ 或 $I_s/I < 0.9$ 时, $\gamma^e < 1.05$ 。此时,对于仅需考虑第一阶模态振动的箱梁可忽略剪力滞效应的影响。除此以外,剪力滞效应对结构动力反应的影响不可忽略,因此,一旦激振荷载能激起箱梁高阶模态的振动,剪力滞效应将显著地影响结构的动力反应。

参考文献

- [1] CHEN Jun, SHEN Shuilong, YIN Zhenyu, et al. Closed-form solution for shear lag with derived flange deformation function [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2014, 102(11):104-110.
- [2] GARA F, LEONI G, DEZI L. A beam finite element including shear lag effect for the time-dependent analysis of steel-concrete composite decks [J]. Engineering Structures, 2009, 31(8):1888-1902.
- [3] 郭健,孙炳楠. 型钢-混凝土箱形桥塔的剪力滞后效应分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003, 35(增刊):269-271,275. GUO Jian, SUN Bingnan. Analysis of shear lag effect of steel-concrete composite box tower in cable-stayed bridge [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2003, 35(s):269-271,275.
- [4] 王浩,李爱群,赵大亮,等. 润扬悬索桥钢箱梁受力分析及实验研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2006, 38(7):1062-1064. WANG Hao, LI Aiqun, ZHAO Daliang, et al. FE analysis and experimental study on local stress of steel box girder of runyang suspension bridge [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2006, 38(7):1062-1064.
- [5] ZHANG Yuanhai, LIN Lixia. Shear lag analysis of thin-walled box girders based on a new generalized displacement [J]. Engineering Structures, 2014, 61(1):73-83.
- [6] 甘亚南,吴亚平,王根会,等. 剪力滞效应对简支箱梁自振特性的影响研究[J]. 兰州铁道学院学报,2002,21(3):23-25. GAN Y N, WU Y P, WANG G H, et al. Influence of shear lag on the characteristic of free vibration to box girder under simply supported [J]. Journal of Lanzhou Railway Institute, 2002,21(3):23-25.

[7] 吴有俊, 罗旗帜, 陈玉骥. 考虑剪力滞效应简支箱梁自振方程的求解[J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版), 2010, 28(2):12-17.
WU Youjun, LUO Qizhi, CHEN Yuji. The Solution of free vibration equation to simply-supported box girder considering shear lag effect [J]. Journal of Foshan University (Natural Science Edition), 2010, 28(2): 12-17.

[8] 张永健, 黄平明. 一种计入剪力滞及剪切变形效应的箱梁自振频率计算方法[J]. 郑州大学学报(工学版), 2007, 28(1): 51-55.
ZHANG Yongjian, HUANG Pingming. A new method to calculate the natural frequencies of simply supported box girder including the effect of shear lag and shear deformation[J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2007, 28(1): 51-55.

[9] 甘亚南, 周广春, 赫中营. 大悬臂板矩形截面箱梁动力反应的分析[J]. 振动与冲击, 2010, 29(11): 61-65.
GAN Y N, ZHOU G C, HE Zhongying. Dynamic response analysis for a large cantilever rectangular box girder in consideration of shear lag effect[J]. Journal of Vibration & Shock, 2010, 29(11):61-65.

[10] 甘亚南, 周广春. 基于能量变分原理的薄壁箱梁自振特性分析[J]. 中国公路学报, 2007, 20(1):73-78.
GAN Yanan, ZHOU Guangchun. Analysis of free vibration characteristics of thin-walled box girder based on energy variation principle[J]. China Journal of Highway & Transport, 2007, 20(1):73-78.

[11] ZHOU Wangbao, JIANG Lizhong, YU Zhiwu. Analysis of free vibration characteristic of steel-concrete composite box-girder considering shear lag and slip [J]. Journal of Central South University, 2013, 20: 2570-2577.

[12] 楼梦麟. 变参数土层的动力特性和地震反应分析[J]. 同济大学学报, 1997, 25(2):155-160.
LOU Menglin. Dynamic analysis for modal characteristics and seismic response of soil layer with variable properties[J]. Journal of Tongji University, 1997, 25(2):155-160.

[13] 楼梦麟, 吴京宁. 复杂梁动力问题的近似分析方法[J]. 上海力学, 1997, 18(3):234-240.
LOU Menglin, WU Jingning. An approach to approximate analysis of dynamic problems of complicated beams [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1997, 18(3): 234-240.

[14] 张怀静, 潘旦光. 变截面连续梁动力特性的半解析解法[J]. 北京科技大学学报, 2008,30(6):590-593.
ZHANG Huaijing, PAN Danguang. Semi-analytic solution to dynamic characteristics of non-uniform continuous beams [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2008, 30(6): 590-593.

[15] 潘旦光, 楼梦麟. 变截面 Timoshenko 简支梁动力特性的半解析解[J]. 工程力学, 2009, 26(8): 6-9.
PAN D G, LOU M L. Semi-analytic solution of dynamic characteristics of non-prismatic timoshenko simply supported beams [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(8):6-9.

[16] PAN Danguang, CHEN Genda, LOU Menglin. A modified modal perturbation method for vibration characteristics of non-prismatic Timoshenko beams [J]. Structural Engineering and Mechanics An international Journal, 2011, 40(5): 689-703.

(编辑 赵丽莹)

近期结构工程类会议简讯

1.“第十八届全国结构风工程学术会议”暨“第四届全国风工程研究生论坛”将于 2017 年 8 月 16—22 日在湖南省长沙市召开.会议由中国土木工程学会桥梁及结构工程分会风工程专业委员会、中国空气动力学会风工程和工业空气动力学专业委员会主办,中南大学土木工程学院、研究生院、同济大学土木工程防灾国家重点实验室承办.会议主题包括:边界层特性与风环境,钝体空气动力学,高层与高耸结构抗风,大跨空间与悬吊结构抗风,低矮房屋结构抗风,大跨度桥梁抗风,特种结构抗风,计算风工程方法与应用,风洞及其试验技术,结构抗风设计标准,结构风灾风险分析与评估,其他风工程和空气动力学问题.

2.“2017 年全国砌体结构领域基础理论与工程应用学术会议”将于 2017 年 10 月在山东省青岛市召开.会议由中国工程建设标准化协会砌体结构专业委员会主办,青岛理工大学承办.会议旨在深入交流新形势下砌体结构领域工程建设标准编制思路;砌体结构领域基本理论新成果;预制装配式砌体结构新技术;砌体结构自承重墙抗震、抗风及防裂新措施;墙体材料工程应用新经验和适应砌体结构发展新常态的最新对策.

3.“第十二届中日建筑结构技术交流会”将于 2017 年 9 月 16—17 日在日本神户举行.该系列会议是 1993 年由中日建筑结构领域的专家学者提议以促进双方技术交流增进友谊为宗旨而创建的,曾分别在北京、上海、深圳、大连、西安、杭州、重庆、成都、广州、东京、南京、武汉等召开了十八次交流大会与专题研讨会.本次会议重点研讨的方向有:近年完成的复杂结构、超高层结构、大跨度结构设计案例;减隔震技术的最新研究进展与工程应用;既有建筑改造加固技术的最新研究进展及工程应用;工业化建筑结构的设计、制造与施工(装配式混凝土结构、装配式钢结构等);复杂、大跨度、超高层结构的施工建造技术(含 BIM 技术应用).