DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.2017.01.010

敷设约束阻尼薄壁圆柱壳的振动特性

王目凯[1], 陈照波[1], 焦映厚[1], 吕文香[2]

(1.哈尔滨工业大学 机电工程学院, 哈尔滨 150001; 2.山东交通学院 海运学院, 济南 264200)

摘 要: 为分析约束阻尼对薄壁圆柱壳振动特性的影响,应用哈密顿原理结合瑞利-李兹法求解敷设约束阻尼圆柱壳的动力学方程. 得出自由振动时的固有频率、损耗因子的计算公式;应用模态叠加法计算圆柱壳上任意一点的频率响应. 提出能量耗散系数,将其作为阻尼效果的评价标准,用来分析约束阻尼结构各参数对阻尼效果的影响,并与损耗因子进行比较. 结果表明:约束阻尼可以有效地抑制薄壁圆柱壳振动的传递;在指定频带范围内能量耗散系数能够作为阻尼效果的评价标准;阻尼材料阻尼系数、约束层弹性模量、约束层厚度、阻尼层厚度均会对阻尼效果产生影响.

关键词: 约束阻尼;薄壁圆柱壳;能量耗散系数;阻尼效果; 模态叠加法;哈密顿原理; 瑞利-李兹法

中图分类号: TB535 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2017)01-0072-08

Vibration characteristics of thin cylindrical shell with constrained layer damping

WANG Mukai[1], CHEN Zhaobo[1], JIAO Yinghou[1], LÜ Wenxiang[2]

(1.School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2.School of Maritime, Shandong Jiaotong University, Jinan 264200, China)

Abstract: To know the vibration characteristics of thin cylindrical shell with constrained layer damping, Hamilton principle with Rayleigh-Ritz method is used to solve the dynamic equation. Based on this, natural frequencies and loss factors of free vibration are analyzed. Modal Superposition method is used to calculate the formulas of frequency response on any points in the shell. In addition, based on frequency response, power dissipation coefficient is proposed. The power dissipation coefficient and loss factors are used respectively as constrained layer damping effect evaluation criteria and to analyze the influence of constrained layer damping structure parameters on the damping effect. Numerical results show that the constrained layer damping can effectively inhibit vibration transmission of thin cylindrical shell. The power dissipation coefficient can be used as damping effect evaluation criteria in the specified frequency band. The coefficient of viscoelastic damping material, elastic modulus of constrained layer, thickness of constrained layer and thickness of damping layer can affect the damping effect.

Keywords: constrained layer damping; thin cylindrical shell; power dissipation coefficient; damping effect; modal superposition method; Hamilton principle; Rayleigh-Ritz method

阻尼材料可以将结构的机械能转化为热能耗散. 约束阻尼是指将黏弹性阻尼材料固结在基体和刚度较大的材料之间,基体为基层,刚度较大的材料为约束层. 当基体振动时,基层与约束层产生相对运动,黏弹性阻尼材料发生剪切变形使一部分机械能发生损耗. 约束阻尼结构形式较为简单,阻尼效果好,振动能量耗散剧烈,易于实现,广泛地应用在汽车、建筑、机械、航天、船舶、仪表仪器中. 目前,对约束阻尼的研究主要集中在板[1]、壳[2-4]、梁[5]、杆[6]等单元上. 对敷设约束阻尼圆柱壳的研究方法可分为有限元法和解析法两种. Ruzzene 等[7]和 Wang 等[8]通过有限元法计算了敷设约束阻尼圆柱壳的固有频率和损耗因子,并且分析了各参数对于圆柱壳固有频率的影响. 王淼等[9]和章艺等[10]也通过有限元法对约束阻尼圆柱壳的频率特性进行分析. 有限元方法虽然对圆柱壳结构要求低,适用范围广,但是在参数分析时比较困难,并且由于引入离散变量使自由度过多而造成计算困难,在高频时计算精度较低.

对敷设约束阻尼圆柱壳进行参数分析时一般采用解析法,现在较为成熟的解析法有传递矩阵法、瑞利法、带有分布参数的传递函数法等. 文献[11-13]运用瑞利法分析了约束阻尼圆柱壳和部分敷设约束阻尼圆柱壳的频率特性,给出了圆柱壳振动响应的计算方法,并且分析了约束阻尼各参数对圆柱壳阻

收稿日期: 2015-10-07
基金项目: 国家自然科学基金(11372083)
作者简介: 王目凯(1990—),男,博士研究生;
陈照波(1967—),男,教授,博士生导师;
焦映厚(1962—),男,教授,博士生导师
通信作者: 王目凯,Walker_HIT@163.com

尼效果的影响. 向宇等[14-15]针对敷设约束阻尼圆柱壳的振动特性,利用改良的传递矩阵法进行分析,可以求出各种边界条件下圆柱壳的振动. 这种方法在求解敷设约束阻尼圆柱壳的自由振动时较为精确. 但是由于引入各层内力,传递矩阵是一个 12 维的矩阵,计算量增加,在分析圆柱壳的受迫振动时比较困难. 李恩奇等[16]利用分布参数法提出了一种分析约束阻尼圆柱壳动力学问题的传递函数法,分布参数的引入有利于拓展传递函数法的应用范围;但是该方法对于边界条件的描述是通过位移间接进行的,在求解不同边界条件下的圆柱壳振动特性时比较困难,而且该方法也无法计算圆柱壳的频率响应.

综上所述,虽然人们对敷设约束阻尼圆柱壳的振动特性进行了深入的研究,并且提出了不同的方法. 但是这些方法有以下问题: 1) 对于圆柱壳的振动特性集中在自由振动特性的研究上,没有分析敷设约束阻尼前后圆柱壳的响应问题; 2) 对约束阻尼结构做参数分析时,仅把固有频率下的损耗因子作为评价阻尼效果的唯一标准,无法分析在一定频带范围内的阻尼效果.

本文从圆柱壳基本方程出发,首先,推导出敷设约束阻尼圆柱壳系统的应变能和动能表达式;然后,应用哈密顿原理结合瑞利-李兹求取圆柱壳的动力学方程,并对其进行求解,得出敷设约束阻尼圆柱壳的固有频率和损耗因子,采用模态叠加法求得系统在受迫振动下的频率响应;最后,引入能量耗散系数表示敷设约束阻尼圆柱壳在一定频带范围内的阻尼效果,分析约束阻尼结构各参数的变化对于圆柱壳阻尼效果的影响.

1　动能及应变能

约束阻尼圆柱壳结构如图 1 所示,3 层结构分别为基层、阻尼层和约束层. 为了简化,做如下假设:1)基层和约束层满足圆柱薄壳假设;2)各层接触面之间无相对滑动,完全黏结,各层之间位移连续,3 层材料沿径向位移相同;3)由于阻尼材料密度较低,其面内惯量忽略不计,只考虑阻尼层的径向惯量;4)黏弹性阻尼层只考虑剪切变形,忽略其抗拉、抗弯刚度. 曲线坐标系的原点在圆柱壳端面的圆心处,其中圆柱壳母线方向为 x 轴,圆周方向为 θ 轴,圆柱壳中面外法线的方向为 z 轴. 本文中符号 h 和 R 分别代表壳体的厚度和半径,各式下标或者上标中的 s、v 和 c 分别代表基层、阻尼层和约束层. 壳体中曲面上一点的轴向、切向、法向位移分别为 u、v、w.

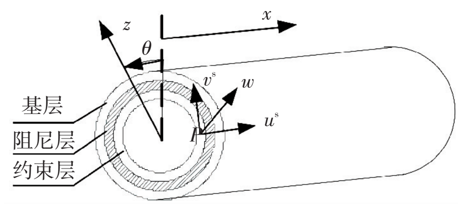


图 1　约束阻尼圆柱壳几何示意图

Fig.1　Cylindrical shell with CLD

根据圆柱薄壳假设,基层和约束层的应变-位移关系可以表示为

$$\begin{cases}\varepsilon_{xi}=\varepsilon_{xi}^{0}+zk_{xi}^{0},\\ \varepsilon_{\theta i}=\varepsilon_{\theta i}^{0}+zk_{\theta i}^{0},\\ \varepsilon_{x\theta i}=\varepsilon_{x\theta i}^{0}+zk_{x\theta i}^{0}.\end{cases}\tag{1}$$

式中: $i=\mathrm{s,c}$; ε_{ji}^{0} 为膜应变分量,各分量表达式为

$$\varepsilon_{xi}^{0}=\frac{\partial u_i}{\partial x},\quad \varepsilon_{\theta i}^{0}=\frac{\partial v_i}{R_i\partial\theta}+\frac{w}{R_i},\quad \varepsilon_{x\theta i}^{0}=\frac{\partial v_i}{\partial x}+\frac{\partial u_i}{R_i\partial\theta};$$

k_{ji}^{0} 为弯曲应变分量,各分量表达式为

$$k_{xi}^{0}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad k_{\theta i}^{0}=\frac{\partial v_i}{R_i^2\partial\theta}-\frac{\partial^2 w}{R_i^2\partial\theta^2},\quad k_{x\theta i}^{0}=\frac{\partial v_i}{R_i\partial x}-\frac{2\partial^2 w}{R_i\partial x\partial\theta}.$$

基层和约束层的应变势能为

$$U_i=\frac{h_i}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\Big[\frac{E_i}{1-\mu_i^2}(\varepsilon_{xi}^2+\varepsilon_{\theta i}^2+2\mu_i\varepsilon_{xi}\varepsilon_{\theta i})+ G_i/2\varepsilon_{x\theta i}^2\Big]R_i\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta.\tag{2}$$

式中: E_i、μ_i 和 G_i 分别表示第 i 层的弹性模量、泊松比和剪切模量.

基层和约束层的动能为

$$T_i=\frac{\rho_i h_i}{2}\int_0^{l}\int_0^{2\pi}(\dot{u}_i^2+\dot{v}_i^2+\dot{w}^2)R_i\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta.\tag{3}$$

阻尼层应变-位移关系为

$$\begin{cases}\varepsilon_{xz}^{\mathrm{v}}=\beta_x^{\mathrm{v}}+\dfrac{\partial w}{\partial x},\\[2mm] \varepsilon_{\theta z}^{\mathrm{v}}=\beta_\theta^{\mathrm{v}}-\dfrac{v_{\mathrm{v}}}{R_{\mathrm{v}}}+\dfrac{1}{R_i}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}.\end{cases}$$

式中: $\varepsilon_{xz}^{\mathrm{v}}$、$\varepsilon_{\theta z}^{\mathrm{v}}$ 分别为阻尼层沿 x、θ 方向剪切应变, β_θ^{i} 为第 i 层横截面沿 θ 方向的转角 ($i=\mathrm{s,c,v}$). 各转角和约束阻尼层间沿 x 方向位移关系如图 2 所示.

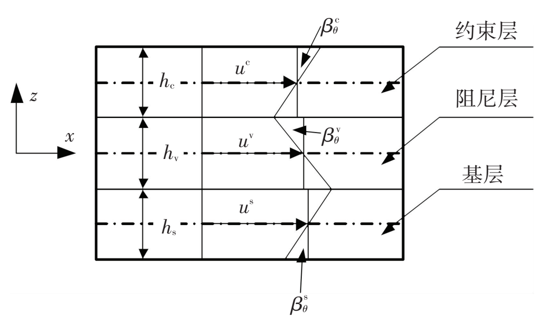


图 2　约束阻尼沿 x 方向层间位移关系

Fig.2　Displacement relationship of CLD among layers along the x direction

根据图 2，由几何关系可得各层沿 x 方向位移关系：

$$\begin{cases} u_{c}(x,\theta) - \dfrac{h_{c}}{2}\beta_{x}^{c}(x,\theta) = u_{v}(x,\theta) + \dfrac{h_{v}}{2}\beta_{x}^{v}(x,\theta), \\ u_{s}(x,\theta) + \dfrac{h_{s}}{2}\beta_{x}^{c}(x,\theta) = u_{v}(x,\theta) - \dfrac{h_{v}}{2}\beta_{x}^{v}(x,\theta). \end{cases} \tag{4}$$

同理，可得各层沿 θ 方向的位移关系：

$$\begin{cases} v_{c}(x,\theta) - \dfrac{h_{c}}{2}\beta_{\theta}^{c}(x,\theta) = v_{v}(x,\theta) + \dfrac{h_{v}}{2}\beta_{\theta}^{v}(x,\theta), \\ v_{s}(x,\theta) + \dfrac{h_{s}}{2}\beta_{\theta}^{s}(x,\theta) = v_{v}(x,\theta) - \dfrac{h_{v}}{2}\beta_{x}^{v}(x,\theta). \end{cases} \tag{5}$$

将式(4)和(5)整理可得阻尼层沿 θ、x 轴的中面位移和横向法线绕 θ、x 轴的转角为

$$\begin{cases} u_{v}(x,\theta) = \dfrac{1}{2}\left[\left(u_{c} - \dfrac{h_{c}}{2}\beta_{x}^{c}\right) + \left(u_{s} + \dfrac{h_{s}}{2}\beta_{x}^{s}\right)\right], \\ v_{v}(x,\theta) = \dfrac{1}{2}\left[\left(v_{c} - \dfrac{h_{c}}{2}\beta_{\theta}^{c}\right) + \left(v_{s} + \dfrac{h_{s}}{2}\beta_{\theta}^{s}\right)\right], \\ \beta_{x}^{v}(x,\theta) = \dfrac{1}{h_{v}}\left[\left(u_{c} - \dfrac{h_{c}}{2}\beta_{x}^{c}\right) - \left(u_{s} + \dfrac{h_{s}}{2}\beta_{x}^{s}\right)\right], \\ \beta_{\theta}^{v}(x,\theta) = \dfrac{1}{h_{v}}\left[\left(v_{c} - \dfrac{h_{c}}{2}\beta_{\theta}^{c}\right) - \left(v_{s} + \dfrac{h_{s}}{2}\beta_{\theta}^{s}\right)\right]. \end{cases} \tag{6}$$

对于黏弹性阻尼层，其本构方程为

$$\begin{cases} \tau_{xz}^{v} = G^{v}\varepsilon_{xz}^{v}, \\ \tau_{\theta z}^{v} = G^{v}\varepsilon_{\theta z}^{v}. \end{cases}$$

式中：τ_{xz}^{v}、$\tau_{\theta z}^{v}$ 分别表示沿 x、θ 轴的剪切应力；G^{v} 表示阻尼材料的复剪切模量，且

$$G^{v} = G_{1}^{v} + \mathrm{i}G_{2}^{v} = G(\omega)(1 + g\mathrm{i});$$

G_{1}^{v} 为复剪切模量的实部，也称为储能剪切模量；G_{2}^{v} 为复剪切模量的虚部，它决定了黏弹性阻尼材料受到剪切变形时转换成热能的能量损耗，所以称为损耗剪切模量；g 为黏弹性阻尼材料的阻尼系数.

阻尼层剪切应力做功为

$$W_{v} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h_{v}}{2}}^{\frac{h_{v}}{2}}\int_{0}^{l}\int_{0}^{2\pi}(\tau_{xz}^{v}\varepsilon_{xz}^{v} + \tau_{\theta z}^{v}\varepsilon_{\theta z}^{v})R_{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = U_{v} + W_{1}. \tag{7}$$

式中：W_{v} 是一个复数，其实部 U_{v} 表示能量的存储，为阻尼层的应变势能 U_{v}；虚部 W_{1} 表示能量的耗散，阻尼力所做的功为 $W_{v1} = - W_{1}$.

根据假设(3)可得阻尼层的动能

$$T_{v} = \frac{1}{2}\rho_{v}h_{v}R_{v}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{l}\dot{w}^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

由此可得系统的势能为

$$U = U_{c} + U_{v} + U_{s}. \tag{9}$$

系统的变形能与耗散能之和为

$$W = U_{c} + W_{v} + U_{s}. \tag{10}$$

系统的动能为

$$T = T_{c} + T_{s} + T_{v}. \tag{11}$$

2 动力学方程

2.1 边界条件和模态函数

圆柱壳单边可能出现的约束条件有自由(F)、固支(C)、简支(SS). 因此圆柱壳的边界条件可以分为：自由-自由(F-F)、自由-固支(F-C)、自由-简支(F-SS)、固支-固支(C-C)、固支-简支(C-SS)、简支-简支(SS-SS)6 种. 根据式(6)可知，阻尼层的位移可由基层和约束层的位移表示. 当敷设约束阻尼圆柱壳以某一频率 ω 振动时，将位移函数沿壳体圆周方向展开成富氏级数，而沿轴向则用某一系列正交函数系进行展开[17]. 敷设约束阻尼圆柱壳的基层和约束层中面模态振型函数可以表示为

$$u_{ij}^{s}(x,\theta,t) = X_{i}^{u^{s}}(x)\cos j\theta p_{ij}^{s}(t) = U_{ij}^{s}(x,\theta)p_{ij}^{s}(t),$$

$$v_{ij}^{s}(x,\theta,t) = X_{i}^{v^{s}}(x)\sin j\theta r_{ij}^{s}(t) = V_{ij}^{s}(x,\theta)r_{ij}^{s}(t),$$

$$u_{ij}^{c}(x,\theta,t) = X_{i}^{u^{c}}(x)\cos j\theta p_{ij}^{c}(t) = U_{ij}^{c}(x,\theta)p_{ij}^{c}(t),$$

$$v_{ij}^{c}(x,\theta,t) = X_{i}^{v^{c}}(x)\sin j\theta r_{ij}^{c}(t) = V_{ij}^{c}(x,\theta)r_{ij}^{c}(t),$$

$$w_{ij}(x,\theta,t) = X_{i}^{w}(x)\cos j\theta s_{ij}(t) = W_{ij}(x,\theta)s_{ij}(t).$$

式中：每一组(i,j)对应一个固有频率；i 表示周向波数；j 表示轴向半波数；$p_{ij}^{s}(t)$、$r_{ij}^{s}(t)$、$p_{ij}^{c}(t)$、$r_{ij}^{c}(t)$、$s_{ij}(t)$ 是模态坐标，为时间的待求函数；U_{ij}^{s}、V_{ij}^{s}、U_{ij}^{c}、V_{ij}^{c}、W_{ij} 为满足边界条件的位移形状函数，也就是在该频率下的主振型；$X_{i}^{u^{s}}(x)$、$X_{i}^{v^{s}}(x)$、$X_{i}^{u^{c}}(x)$、$X_{i}^{v^{c}}(x)$、$X_{i}^{w}(x)$ 为基层和约束层沿中面位移振型. 将中面位移沿轴向采用梁函数进行构造时，沿 u、v、w 3 个方向轴向位移形状函数满足以下关系式[18]：

$$X_{i}^{u}(x) = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}, X_{i}^{v}(x) = \phi(x), X_{i}^{w}(x) = \phi(x).$$

式中 $\phi(x)$ 为轴向函数，采用梁函数进行构造[19]，

$$\phi(x) = a_{1}\cosh(rx/L) + a_{2}\cos(rx/L) - \lambda(a_{3}\sinh(rx/L) + a_{4}\sin(rx/L));$$

各参数 a_{1}、a_{2}、a_{3}、a_{4} 是由边界条件确定，其值是常数 0 或者±1；r 是由具体函数确定的常数；λ 是由 r 确定的. 各参数在具体边界条件下的表达式见文献[19].

2.2 动力学方程

应用哈密顿原理结合瑞利-李兹法求解敷设约束阻尼圆柱壳的动力学方程. 根据 2.1 节模态振型函数，可以表示出各层的位移为

$$
\begin{cases}
u^{s} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} U_{ij}^{s}(x,\theta)p_{ij}^{s}(t) = \boldsymbol{U}_{s}^{T}(x,\theta)\boldsymbol{p}^{s}(t), \\
u^{s} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} V_{ij}^{s}(x,\theta)r_{ij}^{s}(t) = \boldsymbol{V}_{s}^{T}(x,\theta)\boldsymbol{r}^{s}(t), \\
v^{c} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} U_{ij}^{c}(x,\theta)p_{ij}^{c}(t) = \boldsymbol{U}_{c}^{T}(x,\theta)\boldsymbol{p}^{c}(t), \\
v^{c} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} V_{ij}^{c}(x,\theta)r_{ij}^{c}(t) = \boldsymbol{V}_{c}^{T}(x,\theta)\boldsymbol{r}^{c}(t), \\
w = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} W_{ij}(x,\nu)s_{ij}(t) = \boldsymbol{W}^{T}(x,\theta)\boldsymbol{s}(t).
\end{cases}
\tag{12}
$$

将式(1)、(3)、(8)和(12)带入式(11)可得由模态函数表示的系统动能为

$$
\begin{aligned}
T = {} & \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\boldsymbol{p}^{s})^{T}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_{1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{s}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\boldsymbol{r}^{s})^{T}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{s}}{\mathrm{d}t} + {} \\
& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}^{T}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_{3}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\boldsymbol{p}^{c})^{T}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_{4}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{c}}{\mathrm{d}t} + {} \\
& \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\boldsymbol{r}^{c})^{T}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}_{5}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{c}}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

式中：$\boldsymbol{M}_i$ 为质量阵中主对角线各元素，质量阵 $\boldsymbol{M}$ 是对角矩阵.

同理,将式(1)、(2)、(7)和(12)带入式(10)可得由模态函数表示的系统变形能和耗散能之和为

$$
\begin{aligned}
W = {} & \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{p}^{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{r}^{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{s} + {} \\
& \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{14}\boldsymbol{p}^{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{15}\boldsymbol{r}^{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{p}^{s} + {} \\
& \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{r}^{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{23}\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{24}\boldsymbol{p}^{c} + {} \\
& \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{s})^{T}\boldsymbol{K}_{25}r^{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{K}_{31}\boldsymbol{p}^{s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{K}_{32}\boldsymbol{r}^{s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{K}_{33}\boldsymbol{s} + {} \\
& \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{K}_{34}\boldsymbol{p}^{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{K}_{35}\boldsymbol{r}^{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{41}\boldsymbol{p}^{s} + {} \\
& \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{42}\boldsymbol{r}^{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{43}\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{44}\boldsymbol{p}^{c} + {} \\
& \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{45}\boldsymbol{r}^{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{51}\boldsymbol{p}^{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{52}\boldsymbol{r}^{s} + {} \\
& \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{53}\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{54}\boldsymbol{p}^{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{c})^{T}\boldsymbol{K}_{55}\boldsymbol{r}^{c}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

式中 $\boldsymbol{K}_{ij}$ 为刚度阵中各元素，刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵.

假设圆柱壳一端受集中力 q,将 q 沿坐标 x、θ、z 方向可以分解为 q_1、q_2、q_3,则根据虚功原理外力 q 所做的虚功为

$$
\delta W_2 = q_1\delta u^{s} + q_2\delta v^{s} + q_3\delta w. \tag{15}
$$

将式(12)带入式(15)得由模态函数表示的外力虚功为

$$
\delta W_2 = \boldsymbol{Q}_{p1}\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}^{s} + \boldsymbol{Q}_{p2}\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}^{s} + \boldsymbol{Q}_{p3}\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{16}
$$

哈密顿原理可以表示为

$$
\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-U)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\delta W_{v1} + \delta W_2\,\mathrm{d}t = 0. \tag{17}
$$

将式(7)、(9)、(10)带入式(17)得

$$
\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-W)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\delta W_2\,\mathrm{d}t = 0. \tag{18}
$$

将式(13)、(14)和(16)带入式(18)整理得

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{M}_1\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}^{s}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{p}^{s} + \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{r}^{s} + \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{K}_{14}\boldsymbol{p}^{c} + \\
\quad \boldsymbol{K}_{15}\boldsymbol{r}^{c} = \boldsymbol{Q}_{p1}, \\
\boldsymbol{M}_2\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}^{s}}{\mathrm{d}t^2} + \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{p}^{s} + \boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{r}^{s} + \boldsymbol{K}_{23}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{K}_{24}\boldsymbol{p}^{c} + \\
\quad \boldsymbol{K}_{25}\boldsymbol{r}^{c} = \boldsymbol{Q}_{p2}, \\
\boldsymbol{M}_3\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t^2} + \boldsymbol{K}_{31}\boldsymbol{p}^{s} + \boldsymbol{K}_{32}\boldsymbol{r}^{s} + \boldsymbol{K}_{33}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{K}_{34}\boldsymbol{p}^{c} + \\
\quad \boldsymbol{K}_{35}\boldsymbol{r}^{c} = \boldsymbol{Q}_{p3}, \\
\boldsymbol{M}_4\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}^{c}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{K}_{41}\boldsymbol{p}^{s} + \boldsymbol{K}_{42}\boldsymbol{r}^{s} + \boldsymbol{K}_{43}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{K}_{44}\boldsymbol{p}^{c} + \\
\quad \boldsymbol{K}_{45}\boldsymbol{r}^{c} = \boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{M}_5\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}^{c}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{K}_{51}\boldsymbol{p}^{s} + \boldsymbol{K}_{52}\boldsymbol{r}^{s} + \boldsymbol{K}_{53}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{K}_{54}\boldsymbol{p}^{c} + \\
\quad \boldsymbol{K}_{55}\boldsymbol{r}^{c} = \boldsymbol{0}.
\end{cases}
\tag{19}
$$

令 $\boldsymbol{Y} = [p^{s},\boldsymbol{r}^{s},\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}^{c},\boldsymbol{r}^{c}]^{T}$，式(19)可以表示为

$$
\boldsymbol{M}(\mathrm{d}^2\boldsymbol{Y}/\mathrm{d}t^2) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}_{p}. \tag{20}
$$

式中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{Q}_p$ 分别表示质量阵、刚度阵和外力矢.

3　振动特性分析

3.1　固有频率和损耗因子

敷设约束阻尼圆柱壳的自由振动的动力学方程是式(20)的齐次形式

$$
\boldsymbol{M}(\mathrm{d}^2\boldsymbol{Y}/\mathrm{d}t^2) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}. \tag{21}
$$

令 $\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{Y}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,其中 $\boldsymbol{Y}_0 = [\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{D}\quad \boldsymbol{E}]^{T}$ 为振动的振幅，ω 为频率,带入式(21)得

$$
(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{0}. \tag{22}
$$

根据式(22)把求解频率 ω 的问题转化为求解矩阵特征值,因为黏弹性阻尼具有复常剪切模量,根据式(22)求解的频率表达式为 $\omega^2 = \omega_0^2(1+\mathrm{i}\eta)$. 特征值的实部表示振动的传播,虚部表示振动的衰减,所以 ω 的实部表示固有频率，η 为该频率下对应的损耗因子.

3.2　频率响应特性

圆柱壳上一点受集中载荷 q 作用，其大小为 $q(t) = \bar{q}\cdot\delta(x-x^{*})\cdot\delta(\theta-\theta^{*})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,其中 x^{*}、θ^{*} 表示作用点的位置. 当敷设约束阻尼圆柱壳以某一阶频率 ω 振动时，对应的轴向半波数和周向波数为 (i,j)，此时振幅

$\boldsymbol{Y}_{0ij} = [A_{ij} \quad B_{ij} \quad C_{ij} \quad D_{ij} \quad E_{ij}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}]^{-1} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{p}}$.

应用模态叠加法即可以求出圆柱壳中面位移沿 u、v、w 方向的位移响应为

$$\begin{cases} U^{\mathrm{s}} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} A_{ij} U_{ij}^{\mathrm{s}}(x - x^*, \theta - \theta^*), \\ V^{\mathrm{s}} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_{ij} V_{ij}^{\mathrm{s}}(x - x^*, \theta - \theta^*), \\ W = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} C_{ij} W_{ij}(x - x^*, \theta - \theta^*). \end{cases}$$

式中 m、n 为模态叠加法截取的轴向半波数和周向波数.

4 阻尼评价标准

当约束阻尼结构各参数改变时,阻尼效果是不同的. 其中对于阻尼效果影响较大的参数有阻尼材料的阻尼系数 g、约束层弹性模量 E_{c}、阻尼层厚度 h_{v}、约束层厚度 h_{c}. 为了表示方便,将各个参数进行量纲一化. 为此引入约束层弹性模量系数 E_{c}^*、阻尼层厚度系数 h_{v}^*、约束层厚度系数 h_{c}^*. 各系数分别为:$E_{\mathrm{c}}^* = E_{\mathrm{c}}/E_{\mathrm{s}}, h_{\mathrm{v}}^* = h_{\mathrm{v}}/h_{\mathrm{s}}, h_{\mathrm{c}}^* = h_{\mathrm{c}}/h_{\mathrm{s}}$.

目前,对约束阻尼结构阻尼效果的评价标准大多是在固有频率基础上得到的模态损耗因子. 但是损耗因子只能评价固有频率处的阻尼效果,无法分析在一定频率范围内阻尼的作用. 本节引出一种新的阻尼效果评价标准——能量耗散系数 P^*, 其表达式为

$$P^* = 20 \log(P_{\mathrm{CLD}}/P).$$

式中: P_{s} 是指圆柱壳位移在指定频带内的平均值, P_{CLD} 是指敷设约束阻尼圆柱壳位移在指定频带内的平均值. 当有阻尼作用时 P^* 是一个负数,无阻尼作用时大小为 0. 与特定固有频率下损耗因子不同,能量耗散系数 P^* 用一定频带内能量的损耗来表示约束阻尼的阻尼效果,能够直观的表示出在指定频带内参数的改变对阻尼效果的影响.

本文中 P_{s} 的求法与 P_{CLD} 的求法类似,不同之处在于进行动力学方程计算时,求取 P_{s} 仅需带入基层动能和变形能.

5 算例分析

5.1 实例验证

为了验证本文方法的正确性,将本文计算结果与文献[14]中的结果进行对比. 文献[14]中的敷设约束阻尼圆柱壳各参数:基层半径 $R_{\mathrm{s}} = 0.1$ m,长度 $L = 0.1$ m,泊松比 $\mu_{\mathrm{s}} = \mu_{\mathrm{c}} = 0.3$,基层、阻尼层和约束层厚度 $h_{\mathrm{s}} = h_{\mathrm{v}} = h_{\mathrm{c}} = 1/3$ mm, 基层和约束层弹性模量 $E_{\mathrm{s}} = E_{\mathrm{c}} = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, 密度 $\rho_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{c}} = 7\ 850\ \mathrm{kg/m^3}$, 阻尼层密度 $\rho_{\mathrm{v}} = 1\ 340\ \mathrm{kg/m^3}$, 阻尼层复常剪切模量 $G_{\mathrm{v}} = (8.528 + 2.985\mathrm{i})$ MPa, 圆柱壳两端的约束方式为简支. 计算结果如表 1 所示. 由表 1 可知,本文计算结果与文献[14]计算结果吻合较好,实部和虚部的最大误差不超过 1%. 由此可以看出本文结果的有效性.

表 1 ω^2 计算结果的对比

Tab.1 Comparison of computation results for ω^2

模态 (i,j)	文献[14]	本文
(1,0)	2.443 8E9+i2.057 0E5	2.427 7E9+i2.069 4E5
(2,0)	2.470 3E9+i1.968 3E6	2.453 9E9+i1.969 3E6
(3,0)	2.498 9E9+i5.330 5E6	2.482 6E9+i5.330 4E6
(4,0)	2.556 6E9+i1.013 4E7	2.540 2E9+i1.013 3E7
(5,0)	2.665 1E9+i1.633 8E7	2.648 7E9+i1.633 8E7
(6,0)	2.851 1E9+i2.393 5E7	2.834 7E9+i2.393 5E7
(7,0)	3.147 0E9+i3.291 9E7	3.130 6E9+i3.291 9E7
(8,0)	3.591 0E9+i4.328 9E7	3.574 6E9+i4.328 8E7
(9,0)	4.227 0E9+i5.505 4E7	4.210 6E9+i5.504 2E7
(10,0)	5.105 0E9+i6.830 0E7	5.088 5E9+i6.817 9E7

5.2 位移幅频响应数值计算及分析

算例中圆柱壳两端约束方式为简支,敷设约束阻尼圆柱壳各参数:基层半径 $R_{\mathrm{s}} = 0.02$ m,长度 $L = 0.7$ m,泊松比 $\mu_{\mathrm{s}} = \mu_{\mathrm{c}} = 0.3$, 基层、阻尼层和约束层厚度 $h_{\mathrm{s}} = h_{\mathrm{v}} = h_{\mathrm{c}} = 0.001$ m, 基层和约束层弹性模量 $E_{\mathrm{s}} = E_{\mathrm{c}} = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, 密度 $\rho_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{c}} = 7\ 850\ \mathrm{kg/m^3}$, 阻尼层密度 $\rho_{\mathrm{v}} = 1\ 340\ \mathrm{kg/m^3}$, 根据文献[11],得阻尼层复变剪切模量经验公式 $G^{\mathrm{v}} = 0.142(\omega/2\pi)^{0.492} \cdot (1 + 1.46\mathrm{i})$ MPa. 在作用点 $(x^*, \theta^*) = (0, \pi)$ 处沿圆柱壳的轴向作用一幅值大小为 1 N 的力, 响应点的坐标 $(x, \theta) = (0.35, 0)$. 应用模态叠加法截取轴向半波数和周向波数分别为 $m = 0 \sim 5, n = 0 \sim 5$. 分析响应点在 0~3 000 Hz 的频带内的幅频响应.

图 3 对比在不同阻尼层厚度下圆柱壳响应点的幅频特性,图 3 中 4 条曲线分别表示无约束阻尼作用(shell),阻尼层厚度为 0.001 m (h_{v}), 阻尼层厚度为0.000 5 m ($h_{\mathrm{v}}/2$) 和仅有约束层($h_{\mathrm{v}} = 0$)作用时圆柱壳的响应情况. 由图 3 可以看出,在约束阻尼作用下,圆柱壳响应点的幅值明显减少. 减少阻尼层厚度,阻尼效果明显降低. 另外,无约束阻尼作用下圆柱壳频率响应的求法与约束阻尼作用下类似,在求解动能和变形能时只需带入基层的动能和变形能即可.

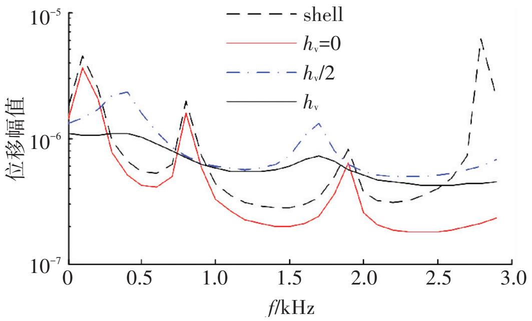


图 3　不同阻尼层厚度圆柱壳响应点的位移幅频特性

Fig.3　Frequency response with CLD treatment of different damping layer thickness

图 4 对比在不同约束层厚度下圆柱壳响应点的幅频特性，图 4 中 4 条曲线分别表示无约束阻尼作用（shell），约束层厚度为 0.001 m（h_c），约束层厚度为 0.000 5 m（$h_c/2$）和仅有阻尼层（$h_c=0$）作用时圆柱壳的响应情况．由图 4 可以看出，随着约束层厚度的增加，阻尼效果增强，自由阻尼（$h_c=0$）的阻尼效果比约束阻尼的阻尼效果差．

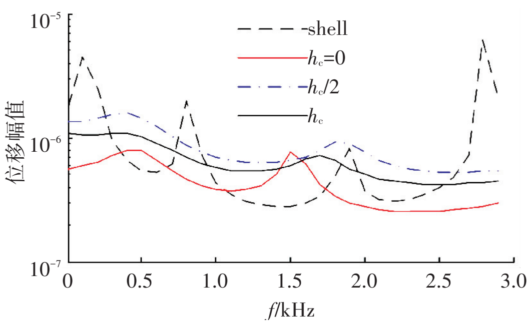


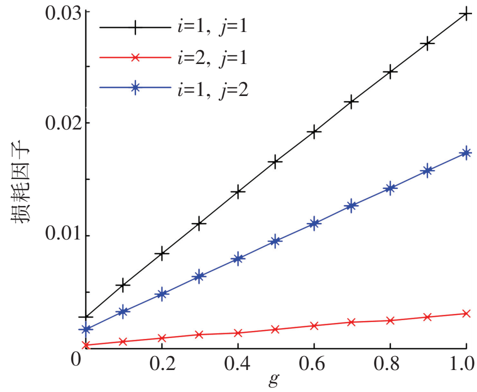
图 4　不同约束层厚度圆柱壳响应点的位移幅频特性

Fig. 4　Frequency response with CLD treatment of different constrained layer thickness

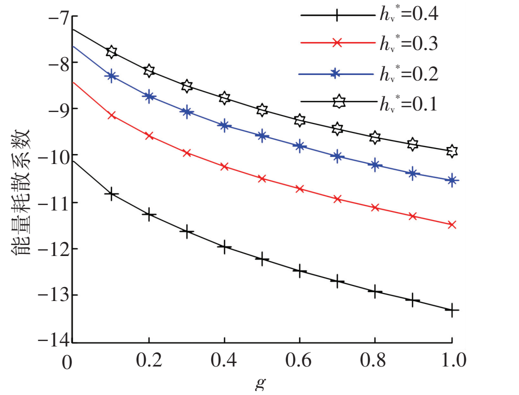
5.3　阻尼效果分析

本节对敷设圆柱壳的评价标准是损耗因子和能量耗散系数．分别用这两种评价标准来表示参数的改变对阻尼效果的影响．对能量耗散系数分析选取的频率范围是 1~2 000 Hz，该频带包含系统的前 3 阶固有频率．对应的模态分别为第 1 阶（$i=1, j=1$），第 2 阶（$i=2, j=1$），第 3 阶（$i=1, j=2$）．

图 5 表示阻尼材料的阻尼系数 g 对阻尼效果的影响，由图 5(a) 可以看出，随着系数 g 的增加，前 3 阶模态损耗因子增加．由图 5(b) 可以看出在 1~2 000 Hz的频带内随着系数 g 的增加能量耗散系数增加，这说明随着阻尼材料的阻尼系数增加，不仅在前 3 阶固有频率处阻尼效果增强，在指定的频带内阻尼效果也在增强．图 6 表示约束层弹性模量变化对阻尼效果的影响．



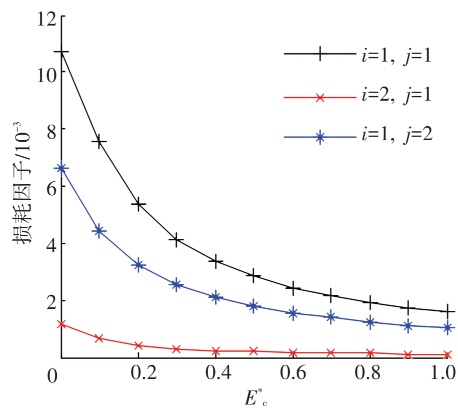
(a) 对前 3 阶损耗因子的影响



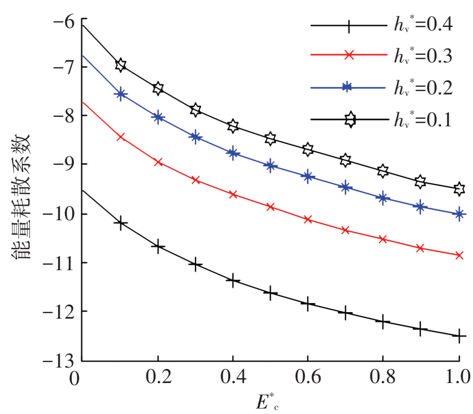
(b) 对能量耗散系数的影响

图 5　阻尼材料的阻尼系数 g 对阻尼效果的影响

Fig.5　Influence of damping coefficient g on damping effect



(a) 对前 3 阶损耗因子的影响



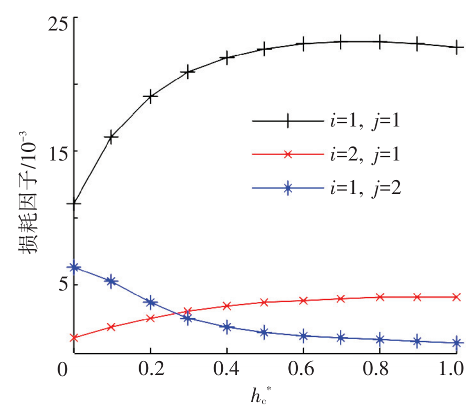
(b) 对能量耗散系数的影响

图 6　约束层弹性模量系数 E_c^* 对阻尼效果的影响

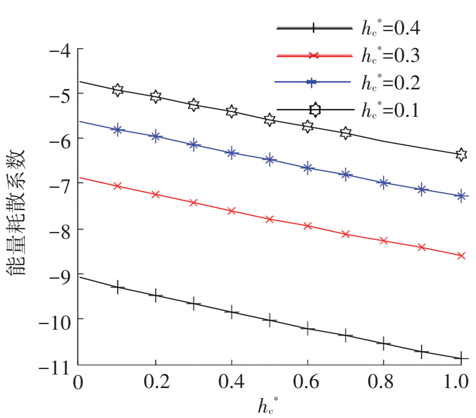
Fig.6　Influence of constrained layer elastic modulus coefficient E_c^* on damping effect

当约束层弹性模量 E_c 在$0.01E_s \sim 0.5E_s$之间逐渐增加时，前 3 阶模态损耗因子急剧下降；但是当约束层弹性模量 E_c 在 $0.5E_s \sim E_s$ 变化时，前 3 阶模态损耗因子趋于稳定值. 在1~2 000 Hz的频带范围内，随着约束层弹性模量的增加，能量损耗系数增加. 这说明随着约束层弹性模量的变化，固有频率处的模态损耗因子和系统在指定频带处的阻尼效果的变化是不同的.

图 7 表示约束层厚度对于阻尼效果的影响. 图 7(a)表明，当阻尼层厚度系数 h_c^* 在 0.01 ~ 0.50 之间逐渐增加时，第 1、第 2 阶损耗因子增加；但是，第 3 阶损耗因子减少. 当 h_c^* 在 0.50 ~ 1.00 之间逐渐增加时，前 3 阶损耗因子趋于稳定值. 图 7(b)表明在 1~2 000 Hz的频带内随着约束层厚度的增加，阻尼效果增强. 图 8 表示阻尼层厚度变化对阻尼效果的影响. 图 8(a)表明当阻尼层厚度系数 h_v^* 增加时，第 1、2 阶模态损耗因子增加. 随着阻尼层厚度的增加第 3 阶模态损耗因子先增加后减少. 图 8(b)表明在 1~2 000 Hz的频带范围内，随着阻尼层厚度的增加，能量耗散系数先增加最后趋于稳定值，说明在该频带内，随着阻尼层厚度的增加，阻尼效果增强并且存在极限值.



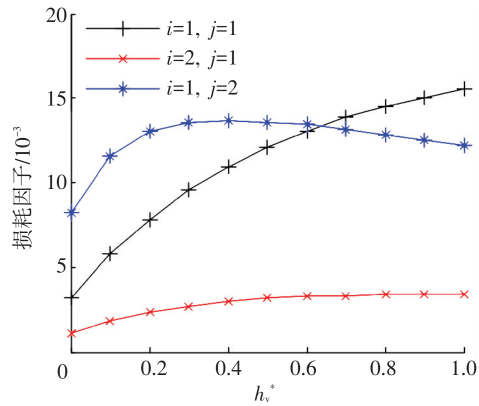
(a)对前 3 阶损耗因子的影响



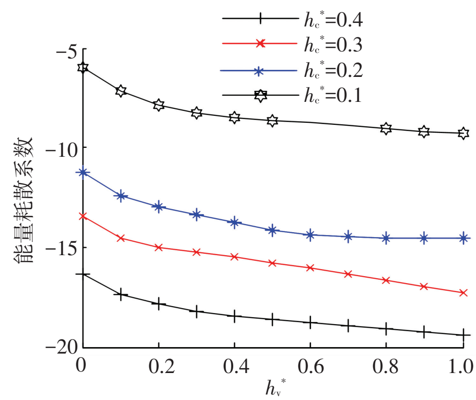
(b)对能量耗散系数的影响

图 7　约束层厚度系数 h_c^* 对阻尼效果的影响

Fig.7　Influence of constrained layer thickness coefficient h_c^* on damping effect



(a) 对前 3 阶损耗因子的影响



(b)对能量耗散系数的影响

图 8　阻尼层厚度系数 h_v^* 对阻尼效果的影响

Fig.8　Influence of damping layer thickness coefficient h_v^* on damping effect

6　结　论

1)本文基于薄壳理论，应用哈密顿原理并结合瑞利-李兹法推导出了各种边界条件下敷设约束阻尼圆柱壳的固有频率和损耗因子的计算公式，应用模态叠加法推导了敷设约束阻尼圆柱壳频率响应计算公式.

2)在频率响应的基础上提出能量耗散系数. 将能量耗散系数和损耗因子分别作为阻尼效果的评价标准对约束阻尼结构进行参数分析.

3)参数分析结果表明，随着阻尼材料阻尼系数、约束层厚度、约束层弹性模量和阻尼层厚度的改变，前 3 阶模态损耗因子的变化是不相同的. 但是随着阻尼材料阻尼系数、约束层厚度、约束层弹性模量和阻尼层厚度增加，能量耗散系数增加，在 1 ~ 2 000 Hz的频带内阻尼效果增强.

4)能量耗散系数能够作为在指定频带范围内的阻尼效果的评价标准，而损耗因子只能作为在固有频率处阻尼效果的评价标准.

参考文献

[1] LEPOITTEVIN G, KRESS G. Optimization of segmented constrained layer damping with mathematical programming using strain energy analysis and modal data[J]. Materials and Design, 2010, 31(1): 14-24. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.07.026.

[2] YUAN L, XIANG Y, HUANG Y. A semi-analytical method and the circumferential dominant modal control of circular cylindrical shells with active constrained layer damping treatment[J]. Smart Materials and Structures, 2010, 19(2):1-14. DOI: 10.1088/0964-1726/19/2/025010.

[3] JIN G, YANG C, LIU Z. A unified method for the vibration and damping analysis of constrained layer damping cylindrical shells with arbitrary boundary conditions [J]. Composite Structures, 2015 (130):124-142. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.04.017.

[4] MODAMMADI F, SEDAGHATI R. Linear and nonlinear vibration analysis of sandwich cylindrical shell with constrained viscoelastic core layer[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 54(1):156-171. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2011.10.006.

[5] HONGPAN N, YAHONG Z, XINONG Z. Active vibration control of beam using electro-magnetic constrained layer damping[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(2):115-124. DOI: 10.1016/S1000-9361(08)60015-1.

[6] 夏峰. 约束阻尼型减振镗杆的研制与开发[D]. 济南:山东大学, 2014:15-20.
XIA Feng. Development of constrained damping boring bar[D]. Jinan: Shandong University, 2014:15-20.

[7] RUZZENE M, BAZ A. Finite element modeling of vibration and sound radiation from fluid-loaded damped shells[J]. Thin-Walled Structures, 2000,36(1):21-46. DOI: : 10.1016/S0263-8231(99)00035-X.

[8] WANG H, CHEN L. Finite element dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells with a constrained damping layer[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40(7):737-755. DOI: 10.1016/S0168-874X(03)00112-4.

[9] 王淼,方之楚. 主动约束层阻尼部分覆盖圆柱壳耦合振动控制[J]. 应用力学学报,2005(4):545-549.
WANG Miao, FANG Zhichu. Coupled vibration control of cylindrical shells partially treated with active constrained layer damping[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2005(4):545-549.

[10] 章艺,童宗鹏,张志谊. 充液压电阻尼圆柱壳的有限元建模[J]. 振动工程学报, 2006,19(1):24-30.
ZHANG Yi, TONG Zongpeng, ZHANG Zhiyi. Finite element modeling of a fluid-filled cylindrical shell with piezoelectric damping[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006,19(1):24-30.

[11] CHEN L, HUANG S. Vibrations of a cylindrical shell with partially constrained layer damping (CLD) treatment[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999,41(12):1485-1498. DOI: 10.1016/S0020-7403(98)00102-7.

[12] HU Y, HUANG S. The frequency response and damping effect of three-layer thin shell with viscoelastic core [J]. Computers and Structures, 2000,76(5):577-591. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00182-0.

[13] HU Y, HUANG S. A linear theory of three-layer damped sandwich shell vibrations [J]. American Society of Mechanical Engineers, 1996,93:229-234.

[14] XIANG Y, HUANG Y, LU J. New matrix method for analyzing vibration and damping effect of sandwich circular cylindrical shell with viscoelastic core[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008,29(12):1587-1600. DOI: 10.1007/s10483-008-1207-x.

[15] 向宇,黄玉盈,陆静. 部分覆盖 PCLD 圆柱壳振动分析的新矩阵方法[J]. 振动工程学报, 2009(2):175-182.
XIANG Yu, HUANG Yuying, LU Jing. A matrix method for analyzing vibration of a circular cylindrical shell with partially constrained layer damping treatment[J]. Journal of Vibration Engineering, 2009(2):175-182.

[16] 李恩奇,李道奎,唐国金,等. 约束层阻尼圆柱壳动力学分析[J].工程力学,2008,25(5):6-11.
LI Enqi, LI Daokui, TANG Guojin. Dynamic analysis of constrained layed damping cylinderical shell[J]. Engineering Mechanics, 2008,25(5):6-11.

[17] 翁智远. 圆柱薄壳容器的振动与屈曲[M]. 上海:上海科学技术出版社,2007:23-26.
WENG Zhiyuan. Vibration and buckling of cylindrical thin shell vessel[M]. Shang Hai: Shanghai Science and Technology Press, 2007:23-26.

[18] LOY C T, LAM K Y, SHU C. Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995,188(3):363-384. doi:10.1006/jsvi.1995.0599.

[19] 刘延柱. 振动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1998:130-133.
LIU Yanzhu. Vibration mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1998:130-133.

（编辑　杨　波）