第49卷 第4期 哈尔滨工业大学学报 Vol. 49 No. 4
2017年4月 JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY Apr. 2017

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201509109

惯性/天文/卫星组合导航误差在线标定方法

踪 华[1],齐建宇[1],熊 攀[3],汪 渤[2],刘 准[1],周志强[2]

(1.宇航智能控制技术国家级重点实验室(北京航天自动控制研究所),北京 100854;2.北京理工大学自动化学院,北京 100081;3.哈尔滨工业大学 航天学院,哈尔滨 150001)

摘 要:为提高惯性/天文/卫星(INS/CNS/GNSS)组合导航系统长期工作时的精度,推导了基于四元数误差描述的组合导航系统误差状态方程和量测方程,利用分段定常系统(PWCS)定理,分析了不同输入条件下系统状态变量的可观测性和可观测度.结合可观测性和可观测度分析结果,提出了利用星敏感器及卫星导航系统提供的姿态、位置矢量在线标定陀螺仪、加速度计和星敏感器误差参数的方法.可观测性分析和仿真试验结果表明,该方法可以精确在线估计出陀螺仪、加速度计、星敏感器的标度因数、零偏和安装误差,提高惯性/天文/卫星组合导航系统长期在轨工作的精度.

关键词:组合导航;四元数误差;Kalman滤波;在线标定;可观测度;星敏感器;标度因数;安装误差

中图分类号:V249.3 **文献标志码**:A **文章编号**:0367-6234(2017)04-0088-07

On-line errors calibration method for INS/CNS/GNSS integrated navigation

ZONG Hua[1], QI Jianyu[1], XIONG Pan[3], WANG Bo[2], LIU Zhun[1], ZHOU Zhiqiang[2]

(1.State Key Laboratory of Science and Technology on Aerospace Intelligent Control (Beijing Aerospace Automatic Control Institute), Beijing 100854, China; 2. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 3.School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To improve the accuracy of the integrated navigation system INS (Inertial Navigation System)/CNS (Celestial Navigation System)/GNSS (Global Navigation Satellite Systems) integrated navigation system for long-time working, this paper establishes the integrated navigation system state equation and the observation equation based on quaternion errors, and analyzes the observability and observable degree of the system states by applying Piece-Wise Constant System (PWCS) theory for different input conditions. Based on the analysis of the observability and observable degree, using the measurement information of attitude and position vectors from star sensor and GNSS, this paper proposes a method of on-line calibration for the error parameters of gyros, accelerometers and star sensor. The observability analysis and simulation results show that this method can precisely estimate the scale factor, zero, and installation error of gyros, accelerators and star sensor. This method can improve the long-term working accuracy of INS/CNS/GNSS integrated navigation system and has an important engineering application value.

Keywords: integrated navigation; quaternion errors; Kalman filter; on-line calibration; observable degree; star sensor; scale factor; installation error

长期自主导航技术在运载火箭上面级、轨道转移飞行器、地球卫星等轨道飞行器上具有广阔的应用前景.未来先进的火箭上面级、轨道转移飞行器等需要拓展功能,适应在多星部署、在轨服务等领域的任务需求,需要在飞行时间长、空间跨度大等条件下具备长期在轨精确自主导航的能力[1-2].另外,随着进入轨道的卫星数量的增多、地面测控站的工作量逐渐增大,为降低地面压力,节省成本,也需要进一步发展地球卫星自主导航技术[3-5].因此,为满足轨道飞行器长时间自主导航任务,惯性/天文/卫星组合导航已成为国内外轨道飞行器研制机构首选方案.精度和可靠性是惯性/天文/卫星组合导航系统两项重要的技术指标.发射时的冲击、空间环境的变换、导航器件重复性性能等因素,都会造成组合导航系统器件误差天地不一致的问题,误差在线分离技术已经成为惯性/天文/卫星组合导航系统实现高精度、高可靠性长期导航的关键技术.该技术具有重要的工程应用价值:1) 受火箭发射时刻冲击、空间环境影响,星敏感器等天文姿态器件安装误差变化较大,安装误差分离与补偿技术可提高星敏感器在线使用精度;2) 惯性器件参数误差和一些缓变故障表现类似,通过器件误差的在线估计与补偿,可降低参数误差的影响,有利于故障诊断方法的设计,从而提高系统的可靠性[6];3) 天文导航和卫星导航更新周期低,误差在线标定技术可提高当天文导航和卫星

收稿日期:2015-09-23
基金项目:国家高技术研究发展计划(2015AA7026083)
作者简介:踪 华(1978—),女,博士,高工;
汪 渤(1963—),男,教授,博士生导师
通信作者:踪 华,zonghua3@sina.cn

导航无法修正期间的惯性导航的精度.因此,导航器件误差分离技术受到各国科研人员的重视,得到了持续研究.文献[7]整理分析了用四元数描述飞行器姿态动力学方程的方法及其优点.文献[8]建立了飞行器姿态四元数误差、陀螺仪和星敏感器误差模型,利用 EKF 和 UF 滤波方法进行误差在线估计,分析了这两种滤波方法对误差估计性能的影响.文献[9]研究了卫星上陀螺误差在轨标定方法.文献[10]利用四元数建立了姿态误差模型,采用 Kalman 滤波器对惯性/天文组合导航系统陀螺在线标定技术进行了研究.文献[11]研究了利用 MPF-KF 估计陀螺误差的方法.文献[7]采用欧拉角建立系统误差模型,利用 EKF 在线估计加速度计和陀螺零偏、星敏感器安装误差和刻度因数误差.

综上所述,文献[7-11]主要围绕基于四元数据描述的飞行器姿态误差建模和滤波方法展开研究,并没有对误差变量的可观测性和精确在线分离的条件进行分析.文献[12]建立了基于欧拉角描述的飞行器姿态误差、速度和位置误差模型,通过滤波方法在线估计导航器件的误差,但是,基于欧拉角的姿态误差模型为非线性模型,且对于一些旋转的角度,无法用欧拉角描述[12],在使用 Kalman 滤波器的时候会出现问题. 鉴于四元数具有非奇异性,基于四元数建立的姿态误差模型为线性模型的优点,本文将在文献[7]及上述其他相关研究成果的基础上,沿用由四元数矢量部分描述姿态误差方程的方法,并进一步进行拓展,用四元数矢量部分建立了完整的姿态、速度误差方程和量测方程,采用 Kalman 滤波方法实现导航器件误差的在线估计.另外,本文对系统误差模型进行可观测性和可观测度分析,给出了输入条件对可观测度的影响,为导航器件误差的精确在线分离提供了设计依据.结合可观测性分析结果,设计了有效的惯性/天文/卫星组合导航系统误差在线标定策略,获得了理想的试验效果.

1　在线标定算法

1.1　导航器件误差模型

完成惯组标定后,若不对陀螺、加速度计进行重新拆装,陀螺和加速度计的安装误差角逐次重复精度高,但陀螺和加速度计零偏、刻度因数误差项逐次通电重复性精度较低,因此,忽略安装误差角,只考虑零偏和刻度因数误差,建立陀螺仪和加速度计的误差模型.

1.1.1　陀螺仪输出误差模型

陀螺仪输出记为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Lambda}_g \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g, \qquad (1)$$

式中:$\hat{\boldsymbol{\omega}}=[\hat{\omega}_x \quad \hat{\omega}_y \quad \hat{\omega}_z]^{\mathrm{T}}$ 为陀螺测量值;$\boldsymbol{\omega}=[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$ 为惯组本体坐标系相对于惯性空间的理想角速率;$\boldsymbol{\Lambda}_g=[\Lambda_{gx} \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad \Lambda_{gy} \quad 0;0 \quad 0 \quad \Lambda_{gz};]$ 为陀螺一次项系数误差;$\boldsymbol{b}_g=[b_{gx} \quad b_{gy} \quad b_{gz}]^{\mathrm{T}}$ 为陀螺零偏误差;$\boldsymbol{\eta}_g=[\eta_{gx} \quad \eta_{gy} \quad \eta_{gz}]^{\mathrm{T}}$ 为陀螺高斯白噪声.

由式(1)可得到陀螺的输出误差为

$$\delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}} = -(\boldsymbol{\Lambda}_g\hat{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g). \qquad (2)$$

1.1.2　加速度计误差模型

加速度计的输出记为

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\Lambda}_a\hat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a. \qquad (3)$$

式中:$\hat{\boldsymbol{f}}=[\hat{f}_x \quad \hat{f}_y \quad \hat{f}_z]^{\mathrm{T}}$ 为加速度计测量值;$\boldsymbol{f}=[f_x \quad f_y \quad f_z]^{\mathrm{T}}$ 为理想的加速度计测量值;$\boldsymbol{\Lambda}_a=[\Lambda_{ax} \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad \Lambda_{ay} \quad 0;\quad 0 \quad 0 \quad \Lambda_{az};]$ 为加速度计一次项系数误差;$\boldsymbol{b}_a=[b_{ax} \quad b_{ay} \quad b_{az}]^{\mathrm{T}}$ 为加速度计零偏误差;$\boldsymbol{\eta}_a=[\eta_{ax} \quad \eta_{ay} \quad \eta_{az}]^{\mathrm{T}}$ 为加速度计高斯白噪声.

由式(3)可得到加速度计的输出误差为

$$\delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{f}} = -(\boldsymbol{\Lambda}_a\hat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a).$$

1.1.3　星敏感器误差模型

星敏感器测量星光确定的姿态四元数表示为

$$\hat{\boldsymbol{q}}_s = \boldsymbol{q}_s \otimes \boldsymbol{q}_\psi.$$

式中:$\hat{\boldsymbol{q}}_s$ 为星光确定的姿态四元数;$\boldsymbol{q}_s$ 为理想的姿态四元数;$\boldsymbol{q}_\psi$ 为星敏感器安装误差.

1.2　组合导航系统误差模型

1.2.1　姿态误差方程

根据理想四元数$\boldsymbol{q}_g$ 和捷联惯性导航计算确定的四元数$\hat{\boldsymbol{q}}_g$,得到数学平台的误差四元数为

$$\delta\boldsymbol{q}_\varphi = \boldsymbol{q}_g \otimes \hat{\boldsymbol{q}}_g^{-1}. \qquad (4)$$

由于四元数运动满足如下关系:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_g}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\omega \otimes \boldsymbol{q}_g, \qquad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{q}}_g}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \hat{\boldsymbol{q}}_g. \qquad (6)$$

对式(4)求导数,并将式 (5),(6)代入式(4)可得

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{q}_\varphi)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_g}{\mathrm{d}t} \otimes \hat{\boldsymbol{q}}_g^{-1} + \boldsymbol{q}_g \otimes \frac{d}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{q}}_g^{-1}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \otimes \delta\boldsymbol{q}_\varphi - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{q}_\varphi \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}},$$

式中,$\hat{\boldsymbol{q}}_g^*$ 为$\hat{\boldsymbol{q}}_g$ 的共轭四元数.由于 $\boldsymbol{\omega}=\delta\boldsymbol{\omega}+\hat{\boldsymbol{\omega}}$,$\delta\boldsymbol{q}_\varphi$ 的导数为:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{q}_\varphi)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \delta\boldsymbol{q}_\varphi - \delta\boldsymbol{q}_\varphi \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}}] + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{q}_\varphi \otimes \delta\boldsymbol{\omega},$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \delta \boldsymbol{q}_{\varphi} - \delta \boldsymbol{q}_{\varphi} \otimes \hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} \end{bmatrix}.$$

其中,$\delta \boldsymbol{q}_{\varphi} \otimes \delta\boldsymbol{\omega}$ 可展开为

$$\delta \boldsymbol{q}_{\varphi} \otimes \delta\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\omega_x & -\delta\omega_y & -\delta\omega_z \\ \delta\omega_x & 0 & \delta\omega_z & -\delta\omega_y \\ \delta\omega_y & -\delta\omega_z & 0 & \delta\omega_x \\ \delta\omega_z & \delta\omega_y & -\delta\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta q_{\varphi 0} \\ \delta q_{\varphi 1} \\ \delta q_{\varphi 2} \\ \delta q_{\varphi 3} \end{bmatrix},$$

又因为 $\delta \boldsymbol{q}_{\varphi 0} \approx 1$,忽略二阶项可得

$$\delta \boldsymbol{q}_{\varphi} \otimes \delta\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\omega \end{bmatrix}.$$

因此,$\delta\boldsymbol{q}_{\varphi}$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}(\delta \boldsymbol{q}_{\varphi})}{\mathrm{d}t} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \delta\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix},$$

将矢量和标量部分分开写,可得:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi})}{\mathrm{d}t} = -\hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\delta \boldsymbol{q}_{\varphi 0})}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{8}$$

将陀螺的输出误差模型式(2)代入式(7),得到四元数误差模型:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi})}{\mathrm{d}t} = -\hat{\boldsymbol{\omega}} \otimes \delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda}_g \hat{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g).$$

1.2.2 速度误差方程

对于捷联安装的加速度计来说,速度测量方程可以描述为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{C}_g^{i'} \boldsymbol{C}_{i'}^{i} \hat{\boldsymbol{f}}_b - \hat{\boldsymbol{g}}_i. \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{C}_g^{i'}$ 为惯组本体坐标系到发射惯性系的姿态矩阵;$\boldsymbol{C}_{i'}^{i}$ 为捷联导航数学平台失准角;$\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 为发射惯性系下的万有引力.

理想的速度方程为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{C}_g^{i'} \boldsymbol{C}_{i'}^{i} \boldsymbol{f}_b - \boldsymbol{g}_i. \tag{10}$$

忽略引力误差,式(10)减式(9),可得:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{C}_g^{i'} \boldsymbol{C}_{i'}^{i} \boldsymbol{f}_b - \boldsymbol{g}_i - (\boldsymbol{C}_g^{i'} \hat{\boldsymbol{f}}_b - \hat{\boldsymbol{g}}_i) = \\ & \boldsymbol{C}_g^{i'}(\boldsymbol{I} + \varphi \times) \boldsymbol{f}_b - \boldsymbol{C}_g^{i'} \hat{\boldsymbol{f}}_b = \\ & \boldsymbol{C}_g^{i'} \cdot \varphi \times \boldsymbol{f}_b + \boldsymbol{C}_g^{i'}(\boldsymbol{f}_b - \hat{\boldsymbol{f}}_b) = \\ & \boldsymbol{C}_g^{i'} \cdot (\boldsymbol{I} + \varphi \times - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{f}_b + \boldsymbol{C}_g^{i'}(\boldsymbol{f}_b - \hat{\boldsymbol{f}}_b), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{I} + \varphi \times - \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2\delta q_{\varphi 3} & -2\delta q_{\varphi 2} \\ -2\delta q_{\varphi 3} & 0 & 2\delta q_{\varphi 1} \\ 2\delta q_{\varphi 2} & -2\delta q_{\varphi 1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\varphi \times \boldsymbol{f}_b = 2 \cdot [\boldsymbol{f}_b \times] \cdot \delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi}. \tag{13}$$

忽略二阶小量得到速度误差方程:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta v)}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{C}_g^{i'} \cdot \hat{\boldsymbol{f}}_b \times \delta\vec{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}_g^{i'} \delta \boldsymbol{f}_b. \tag{14}$$

将加速度计的输出误差式(3)代入式(14)得到:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta v)}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{C}_g^{i'} \cdot [\hat{\boldsymbol{f}}_b \times] \cdot \delta\vec{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{C}_g^{i'}(\boldsymbol{\Lambda}_a \hat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a).$$

1.2.3 位置误差方程

位置误差方程为

$$\frac{\mathrm{d}(\delta \boldsymbol{p})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\delta v)}{\mathrm{d}t}.$$

1.3 组合导航系统误差模型

1.3.1 状态方程

导航坐标系为发射惯性系,组合导航系统的状态方程为捷联惯导的误差方程,状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{X}(t))}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{G}(t) \cdot \boldsymbol{W}(t).$$

式中:$\boldsymbol{A}(t)$ 为系统的状态转移矩阵;$\boldsymbol{G}(t)$ 为系统的噪声系数矩阵;$\boldsymbol{W}(t)$ 为系统噪声向量;$\boldsymbol{X}(t)$ 为 t 时刻的系统状态矢量.结合导航器件、组合导航系统的误差模型,系统状态误差变量取

$$\boldsymbol{X} = [\delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} \quad \delta\boldsymbol{p} \quad \delta\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{b}_g \quad \boldsymbol{b}_a \quad \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} \quad \boldsymbol{\Lambda}_g \quad \boldsymbol{\Lambda}_a]^{\mathrm{T}}_{1\times 24}. \tag{15}$$

式中:状态变量为 24 个,分别为数学平台失准角误差、位置误差、速度误差、陀螺零偏误差、加速度计零偏误差、星敏感器安装误差(用四元数的矢量部分表示)、陀螺刻度因数误差、加速度计刻度因数.

1.3.2 观测方程

星敏感器体坐标系到发射惯性系的姿态矩阵记为$\boldsymbol{C}_s^i$,得到惯性姿态矩阵和星光姿态矩阵间的误差为

$$\boldsymbol{C}_g^{i'} \boldsymbol{C}_i^s = \begin{bmatrix} 1 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 1 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\psi} \times. \tag{16}$$

考虑到星敏感器安装误差和惯组数学平台误差角,得到:

$$\boldsymbol{C}_g^{i'} \boldsymbol{C}_i^s = \boldsymbol{C}_g^{i'} \boldsymbol{C}_g^s \boldsymbol{C}_{i'}^g \boldsymbol{C}_i^{i'} = \boldsymbol{C}_g^{i'}(\boldsymbol{I} + \varphi \times) \boldsymbol{C}_{i'}^g(\boldsymbol{I} - \varphi \times). \tag{17}$$

式中:$\boldsymbol{C}_g^s$ 为惯组和星敏感器间的安装误差矩阵;φ 为星敏感器安装误差角。对比式(16),(17),忽略二阶误差,可以得到:

$$\psi \times = \varphi \times - \boldsymbol{C}_g^{i'} \varphi \times. \tag{18}$$

由式(13)可知失准角和四元数误差存在如下关系:

$$\varphi \times = 2[\delta \vec{\boldsymbol{q}}_{\varphi} \times]^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

将式(19)代入式(18),可以得到:

$$\delta\vec{q}_{\psi}\times=\delta\vec{q}_{\varphi}\times-C_{g}^{i'}\delta\vec{q}_{\varphi}\times,$$

所以

$$\delta\vec{q}_{\psi}=\delta\vec{q}_{\varphi}-C_{g}^{i'}\delta\vec{q}_{\varphi}. \tag{20}$$

以姿态四元数误差和位置误差作为观测量,惯性/天文/卫星组合导航系统测量方程为

$$Z(t)=\begin{bmatrix}\delta\vec{q}_{\psi}\\ \delta p\end{bmatrix}_{6\times1}=H(t)X(t)+V(t).$$

式中:$\delta\vec{q}_{\psi}=[\delta q_{\psi x}\quad\delta q_{\psi y}\quad\delta q_{\psi z}]^{\mathrm{T}}$ 为四元数误差.根据文献[13],与$C_{g}^{i'}C_{i}^{s}$ 对应的为$\vec{q}_{g}\otimes(\vec{q}_{s})^{*}$,所以 $\delta\vec{q}_{\psi}=\vec{q}_{g}\otimes(\vec{q}_{s})^{*}$;$\delta p=[\delta p_{x}\quad\delta p_{y}\quad\delta p_{z}]^{\mathrm{T}}$ 为惯性导航位置与卫星导航位置差值;$V(t)$为6维测量白噪声向量.

根据式(20),得到:

$$H(t)=\begin{bmatrix}I_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&-C_{g}^{i'}&0_{3\times3}&0_{3\times3}\\0_{3\times3}&I_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}\end{bmatrix}_{6\times24}.$$

1.3.3 Kalman 滤波方程

上述各物理量在应用过程中实际上都不是连续的模拟量,而是离散量,需要把上述 Kalman 滤波方程离散化.离散化公式为:

$$F_{k,k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}[A(t_{k})\cdot\Delta]^{n}/n!,$$

$$\Gamma_{k-1}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}(A(t_{k})\cdot\Delta)^{n-1}\right]\right\}G(t_{k})\cdot\Delta.$$

式中:Δ 为 Kalman 滤波周期,n 为离散化阶数.离散化的系统状态方程和量测方程可表示为

$$\begin{cases}X_{k}=F_{k,k-1}X_{k-1}+\Gamma_{k-1}W_{k-1},\\Z_{k}=H_{k}X_{k}+V.\end{cases}$$

这样就可以按照下列离散 Kalman 滤波方程进行滤波解算,开环 Kalman 滤波方程参见文献[14].

2 惯性/天文/卫星组合导航误差可观测性分析

在线标定算法建立了惯性/天文/卫星组合导航系统的状态方程和量测方程,该系统为线性时变系统,系统的可观测性和状态变量的可观测度与误差变量可分离的数量和精度直接相关.

2.1 PWCS 可观测性分析定理

不考虑系统噪声,第 j 个时间段离散系统模型为

$$\begin{cases}X(k+1)=F_{j}X(k),\\Z_{j}(k)=H_{j}X(k).\end{cases} \tag{21}$$

式中:$F_{j}=\sum_{n=0}^{\infty}[A_{j}\cdot\Delta_{j}]^{n}/n!$;$\Delta_{j}$ 为采样时间间隔;n 为离散化阶数.

系统的总可观测矩阵 TOM 为

$$Q(r)=[Q_{1}\quad Q_{2}F_{1}^{n-1}\quad\cdots\quad Q_{r}F_{r-1}^{n-1}\cdots F_{1}^{n-1}]^{\mathrm{T}},$$

其中

$$Q_{j}^{\mathrm{T}}=[(H_{j})^{\mathrm{T}},\quad(H_{j}F_{j})^{\mathrm{T}},\quad\cdots,\quad(H_{j}F_{j}^{n-1})^{\mathrm{T}}].$$

如果矩阵 $Q(r)$ 的秩为 n,则系统是完全可观测的.利用 $Q(r)$ 进行系统的可观测性分析计算量大,且无法确定每个状态变量的可观测程度.文献[15]提出了基于奇异值分解理论的系统可观测性分析方法,利用提取可观测性矩阵 SOM 代替 TOM 分析系统的可观测性,SOM 为$Q_{s}(r)=[Q_{1}\quad Q_{2}\quad\cdots\quad Q_{r}]^{\mathrm{T}}$,结合奇异值分解方法,可以同时得到可观测性和可观测度的分析结果.为了利用 SOM 分析可观测性,有如下定理[15].

定理1 如果$F_{j}x=x$, $\forall x\in\mathrm{null}\{Q_{j}(r)\}$, $1\leqslant j\leqslant r$,则 $\mathrm{null}\{Q(r)\}=\mathrm{null}\{Q_{s}(r)\}$, $\mathrm{rank}\{Q(r)\}=\mathrm{rank}\{Q_{s}(r)\}$.

定理2 如果 $\mathrm{null}\{\widetilde{Q}_{j}\}\subset\mathrm{null}\{A_{j}\}$, $1\leqslant j\leqslant r$($\widetilde{Q}_{j}$, A_{j} 的定义见式(22)、(23)),则 $\mathrm{null}\{\widetilde{Q}(r)\}=\mathrm{null}\{\widetilde{Q}_{s}(r)\}$, $\mathrm{rank}\{\widetilde{Q}(r)\}=\mathrm{rank}\{\widetilde{Q}_{s}(r)\}$.

定理3 如果F_{j} 是对应 A_{j} 和 Δ_{j} 的离散化的转移矩阵,其中 Δ_{j} 为采样时间间隔,则 $\mathrm{null}\{\widetilde{Q}_{s}(r)\}=\mathrm{null}\{Q_{s}(r)\}$.即离散型 PWCS 与连续型 PWCS 可观测性分析等价.

基于奇异值分解理论的系统可观测性分析方法参见文献[15].

2.2 基于奇异值分解理论的系统可观测性分析方法在本系统上的适用性证明

将第 j 个时间段组合导航系统连续的状态方程和量测方程记为

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=A_{j}X(t),\\Z_{j}(t)=H_{j}X(t).\end{cases} \tag{22}$$

$$A_{j}=\begin{bmatrix}(A_{11})_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&(A_{12})_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&(A_{13})_{3\times3}&0_{3\times3}\\0_{3\times3}&0_{3\times3}&I_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}\\(A_{21})_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&(A_{22})_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&(A_{23})_{3\times3}\\ \multicolumn{8}{c}{0_{15\times24}}\end{bmatrix}_{24\times24},$$

$$H_{j}=\begin{bmatrix}I_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&h_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}\\0_{3\times3}&I_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}&0_{3\times3}\end{bmatrix}_{6\times24}.$$

提取可观测矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j = [\boldsymbol{H}_j, \boldsymbol{H}_j \boldsymbol{A}_j, \cdots, \boldsymbol{H}_j \boldsymbol{A}_j^{k-1}]^{\mathrm{T}}. \tag{23}$$

令 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{null}\{\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j\}$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j \boldsymbol{X} = 0$，可以得到：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{x}_6 = 0, \\ \boldsymbol{x}_2 = 0, \\ \boldsymbol{A}_{11} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12} \cdot \boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{A}_{13} \cdot \boldsymbol{x}_7 = 0, \\ \boldsymbol{x}_3 = 0, \\ n\, \boldsymbol{A}_{11} n^2\, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{11} \cdot \boldsymbol{A}_{12} \cdot \boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{A}_{11} \cdot \boldsymbol{A}_{13} \cdot \boldsymbol{x}_7 = 0, \\ \boldsymbol{A}_{21} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22} \cdot \boldsymbol{x}_5 + \boldsymbol{A}_{23} \cdot \boldsymbol{x}_8 = 0, \\ \vdots \end{cases} \tag{24}$$

式中：$\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_6$ 与式(15)中的误差变量相对应，分别表示数学平台失准角误差、位置误差等. 由式(24)可知，$\boldsymbol{A}_j \cdot \boldsymbol{X} = 0$，即 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{null}\{\boldsymbol{A}_j\}$，所以 $\mathrm{null}\{\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j\} \subset \mathrm{null}\{\boldsymbol{A}_j\}$，因此满足定理 2. 即可以用连续系统的 SOM 代替 TOM 做系统的可观测分析. 另外，式(21)中 $\boldsymbol{F}_j$ 为与 $\boldsymbol{A}_j$，Δ_j 对的状态转移矩阵，因此，本系统满足定理 3，因此可以用离散的 SOM 对该组合导航系统进行可观测分析.

2.3 可观测性分析结果

飞行器在轨运动可以分为 3 种基本类型：1) 无动力飞行状态；2) 进行姿态机动；3) 线加减速运动. 针对这 3 种基本类型，设计的可观测性分析的输入条件为：状态Ⅰ为无动力飞行状态，陀螺测量飞行器相对惯性空间的转动角速率，通常该角速率较小，这里取三轴向陀螺敏感的角速率均为 2.4×10^{-4}(°)/s ；状态Ⅱ为角运动状态下，x，y，z 轴向角速率分别为 0，0，10(°)/s；状态Ⅲ为加减速运动条件下，x，y，z 轴向加速度分别为，0, 20, 0 m/s^2. 利用基于奇异值分解理论的系统可观测性分析方法对系统的可观测性进行了分析，可观测性分析结果见表 1，表 1 中为在 3 种运动条件下，状态变量对应的奇异值，奇异值越大，可观测度越大，变量的可观测性越强，奇异值小于 5×10^{-8} 时，对应的状态不可观测[16]. 在状态Ⅰ条件下，有 15 个状态变量的奇异值较大，其他的状态变量的奇异值基本为 0. 可观测的变量为数学平台失准角误差、位置误差、速度误差、陀螺零偏误差、加速度计零偏误差. 在状态Ⅱ条件下，与状态Ⅰ相比，星敏感器安装误差和 y 轴加速度计刻度因数误差可观测，加表零偏变为了不可观测. 在状态Ⅲ条件下，与状态Ⅰ结果相比，星敏感器安装误差和 z 轴陀螺刻度因数误差可观测，z 轴陀螺零偏不可观测. 因此，加入线加速度机动或角速率机动，可提高星敏感器器安装误差的可观测性；加入线加速度机动，可提高对应轴向上的加表的刻度因数误差的可观测度；加入角速率机机动，可提高对应轴向上的陀螺刻度因数误差的可观测度. 也就是在一定的机动条件下，本文 24 个误差变量均可观测.

表 1　不同运动状态下的奇异值

Tab.1　Singular value of different moving states

误差编号	状态Ⅰ	状态Ⅱ	状态Ⅲ	误差编号	状态Ⅰ	状态Ⅱ	状态Ⅲ	误差编号	状态Ⅰ	状态Ⅱ	状态Ⅲ
1	2.2	8.7×10^{19}	4.3×10^{2}	9	4.4	4.0	2.5	17	6.3×10^{-16}	2.8	2.3
2	2.2	9.3×10^{19}	2.3	10	9.3	8.3×10^{2}	5.6×10^{3}	18	3.7×10^{-16}	3.2	3.3
3	2.2	4.0×10^{2}	4.3×10^{2}	11	9.3	5.4×10^{2}	10.6	19	1.6×10^{-21}	2.9×10^{-4}	4.2×10^{-19}
4	1.2	1.2	0.9	12	9.3	2.3×10^{-6}	5.6×10^{3}	20	3.1×10^{-21}	1.6×10^{-5}	3.6×10^{-21}
5	1.2	2.2	1.2	13	64.2	6.5×10^{-15}	2.6×10^{-14}	21	1.1×10^{-37}	3.3×10^{4}	4.0×10^{-21}
6	1.2	1.1	0.9	14	64.2	66.0	8.4×10^{-15}	22	7.3×10^{-17}	6.6×10^{-18}	2.5×10^{-17}
7	4.4	4.4	2.5	15	64.1	51.0	2.2×10^{-14}	23	0	3.1×10^{-7}	1.6×10^{3}
8	4.4	0.8	5.2	16	1.0×10^{-15}	2.9	3.3	24	1.5×10^{-16}	1.7×10^{-16}	7.4×10^{-17}

3 仿真试验

3.1 仿真条件

利用在线标定的算法，编写了组合导航系统误差在线估计仿真程序，其中状态变量为 24 维，初值为 0，观测变量 6 维，采用标准的开环 Kalman 滤波方法进行误差估计，滤波方程系数矩阵离散化处理取 3 阶.

仿真试验中假设三轴向的陀螺随机噪声均为 0.2(°)/h，三轴向的陀螺零偏误差为 $\omega_x = 1\times10^{-4}$ rad/s，$\omega_y = 2\times10^{-4}$ rad/s，$\omega_z = 3\times10^{-4}$ rad/s，陀螺刻度因数误差均为 3×10^{-5}；三轴向加速度计随机噪声均为 1×10^{-4} m/s^2，陀螺和加速度计的更新周期 2 ms；星敏感器的安装误差分别为 $\varphi_x = 1\times10^{-3}$ rad，$\varphi_y = 2\times10^{-3}$ rad，$\varphi_z = 3\times10^{-3}$ rad；星敏感器定姿精度为 10″(1σ)，卫星导航的定位精度为 10 m(1σ).

3.2 仿真试验结果

根据系统的可观测度分析结果，导航器件误差在线标定策略为：1) 依次在惯组 3 个轴向加入

100(°)/s的角速率机动,取加入角速率机动对应时间段的陀螺刻度因数误差滤波估计结果,得到陀螺刻度因数误差数据.在该条件下,也可以同时估计出其他 21 个误差变量,但是由表 1 中的数据可知,其他变量可观测度相对较差,故不作为最终的分离结果;2)依次在惯组 3 个轴向加入 50 m/s^{2}的加速度机动,分离出加表刻度因数误差,同时估计出星敏感器安装误差;3)在惯组三轴向角速率均为 2.4×10^{-4}(°)/s,加速度均为0 m/s^{2}时,估计出陀螺零偏误差、加速度计零偏误差.

导航器件参数误差估计结果如图 1~图 5 所示,图中结果表明,15 项参数误差均能收敛到稳定值.滤波稳定后,陀螺刻度因数误差的精度优于 1×10^{-6},加速度计的刻度因数误差优于 2×10^{-6},星敏感器安装误差的精度优于 5×10^{-6} rad,陀螺零偏误差的精度 1.5×10^{-6} rad/s,加速度计零偏误差优于 2.75×10^{-4}m/s^2,该试验结果表明,利用本文的在线估计方法,各参数误差的在线标定精度均能提高一个数量级,仿真试验结果与可观测性分析结果一致,因此本文的误差标定模型和标定正确,通过本方法可有效提高导航精度.

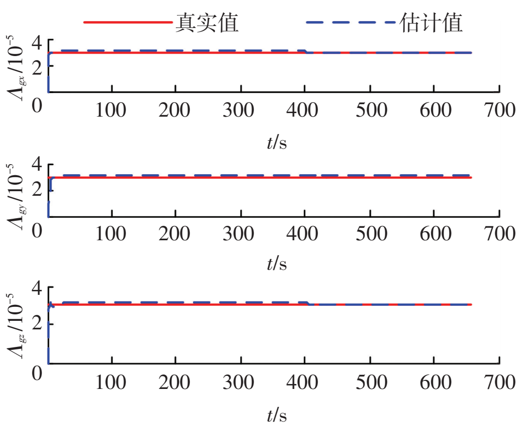

图 1　陀螺刻度因数误差

Fig.1　Gyro scale factor errors

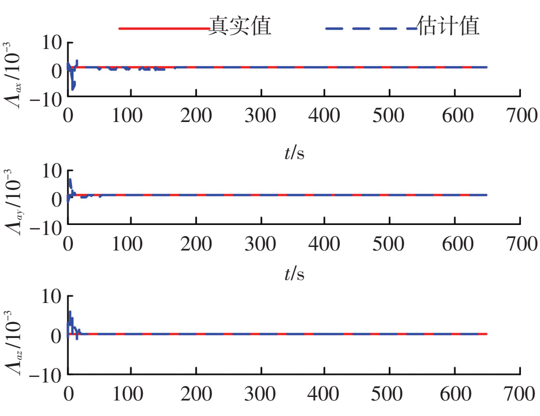

图 2　加速度计刻度因数误差

Fig.2　Accelerometer scale factor errors

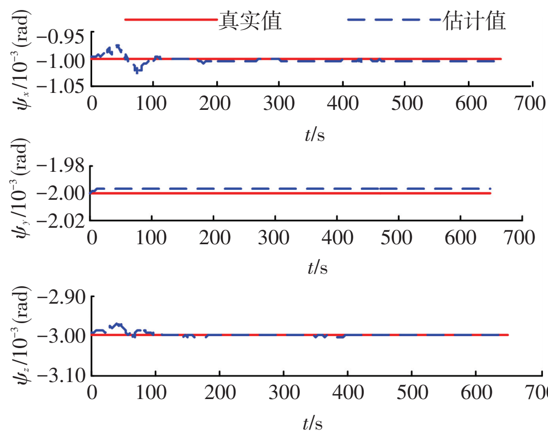

图 3　星敏感器安装误差

Fig.3　Star tracker misalignment errors

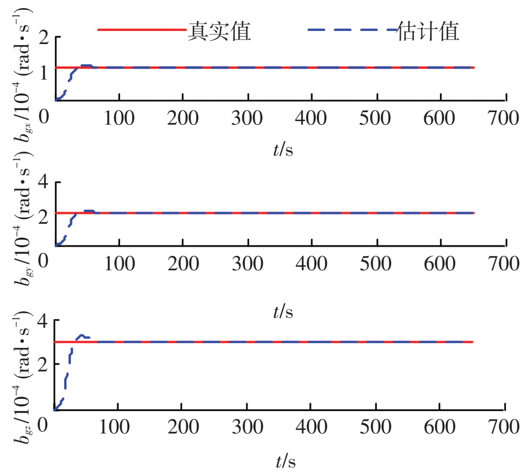

图 4　陀螺零偏误差

Fig.4　Gyro bias errors

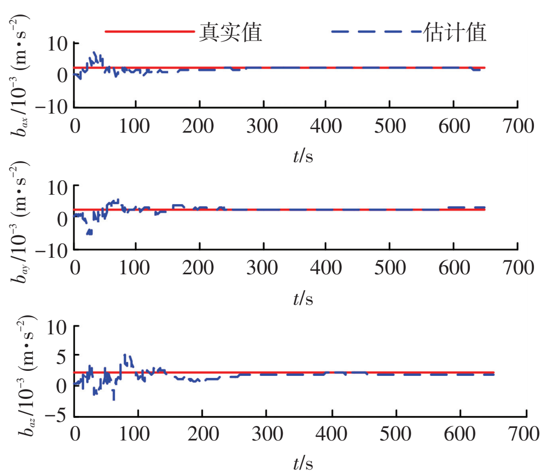

图 5　加速度计零偏误差

Fig.5　Accelerometer bias errors

4　结　论

1)为了提高惯性/天文/卫星组合导航系统长期在轨工作的精度,完善了基于四元数描述的惯性/天文/卫星组合导航误差和各惯性器件误差模型,利用分段定常系统(PWCS)定理,分析了不同输入条件下

系统状态变量的可观测性和可观测度.为各项误差的有效分离提供了理论依据。

2)结合惯性/天文/卫星组合导航系统可观测性和可观测度分析结果,提出了利用 Kalman 滤波技术在线估计惯性/天文/卫星组合导航误差和导航器件误差的标定策略,仿真试验验证了该策略的有效性和精度,该在线标定方法、可观测性分析结果和试验结果对在线标定技术在工程上的应用具有重要的参考价值.

参考文献

[1] DRESSLER G,MATUSZAK L,STEPHENSON D D. Study of a high-energy upper stage for future shuttle missions[C]//Proceedings of the 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. Huntsville, Alabama: AIAA, 2003:1-10. DOI: 10.2514/6.2003-5128 .

[2] LEESON J. Feasibility study of the multipurpose orbitally deployed upper stage (MODUS) platform[C]//Proceedings of the 65th International Astronautical Congress. Toronto, Canada:[s.n].2014.

[3] WHITE R L, GOUNLEY R B. Satellite autonomous navigation with SHAD[R]. CSDL-R-1982, Cambride: The Charles Stark Draper Laboratory, Inc, 1987.

[4] HICKS K D, IESEL W E. Autonomous orbit determination system for earth satellites[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1992, 15(3):562-566. DOI: 10.2514/3.20876.

[5] GOTTZEIN E, FICHTER W, JABLONSKI A, et al. Challenges in control and autonomous of communications Satellites[J]. Control Engineering Practice, 2000, 8(4): 409-427. DOI: 10.1016/S0967-0661(99)00171-9.

[6] ZONG Hua, WANG Bo, LIU Zhun, et al. Fault detection in SINS/CNS/GPS integrated system based on federated filter [C]//Proceedings of the 33nd Chinese Control Conference. Nan Jing: IEEE, 2014: 608-612. DOI: 10.1109/ChiCC.2014.6896694.

[7] LEFFERTS E J, MARKLEY F L, SHUSTER M D.Kalman filtering for spacecraft attitude estimation[J].Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982,5(5): 417-429. DOI: 10.2514/3.56190.

[8] KOKLAM LAI, JOHN L, CRASSIDIS, et al. In-space spacecraft alignment calibration using the unscented filter [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Austin, Texas: AIAA, 2003:1-11. DOI: 10.2514/6.2003-5563.

[9] 陈雪芹, 耿云海, 何蕊. 基于二阶非线性滤波的星上陀螺在轨标定[J].哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(11): 1690-1695.
CHEN Xueqin, GENG Yunhai, HE Rui. On-orbit calibration of satellite gyro based on second-order nonlinear filtering[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2008, 40(11): 1690-1695.

[10] 肇慧, 沈继红, 陈涛. SINS/CNS 组合导航系统陀螺在线标定技术[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(19): 1-4. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.1304-0227.
ZHAO Hui, SHEN Jihong, CHEN Tao. On-line calibration of gyro in SINS/CNS integrated navigation system[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(19): 1-4. DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.1304-0227.

[11] HAO Yanling, MU Hongwei, LIU Xintao. On-line calibration technology for SINS/CNS based on MPF-KF[C]// Proceedings of 2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Cheng Du: IEEE, 2012: 1132-1136. DOI: 10.1109/ICMA.2012.6283409.

[12] VETH M M, RAQUET J. Alignment and calibration of optical and inertial sensors using stellar observations[C]//Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. Long Beach, CA: IEEE, 2005:2494-2503.

[13] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社, 2006:358-359.

[14] ZONG Hua, WANG Bo, LIU Zhun, et al. SINS/CNS/GNSS integrated navigation scheme for advanced upper stage [C]//Proceedings of the 2014 International Conference on Mechatronics and Control. Jinzhou: IEEE, 2014:2109-2113. DOI: 10.1109/ICMC.2014.7231938.

[15] 万德钧, 房建成. 惯性导航初始对准[M]. 南京: 东南大学出版社, 1998: 100-106.

[16] 周卫东,蔡佳楠,孙龙, 等. GPS/SINS 超紧组合导航系统可观测性分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2013, 39(9): 1157-1162.
ZHOU Weidong, CAI Jianan, SUN Long, et al. Observability analysis of GPS/SINS ultra-tightly coupled system [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 39(9): 1157-1162.

(编辑 张 红)