

DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201702067

一种随机车流与桥梁耦合振动的分析方法

李岩¹, 吴志文², 蔡明³, 李朝¹

(1. 哈尔滨工业大学 交通科学与工程学院, 哈尔滨 150090; 2. 深圳高速工程顾问有限公司, 广东 深圳 518094;
3. 深圳市市政设计研究院有限公司, 广东 深圳 518029)

摘要: 为提高随机车流作用下桥梁结构动力行为仿真分析的计算效率, 提出一种时变维度的随机车流与桥梁耦合振动分析方法. 联合模态综合技术和整体分析法建立了车桥耦合振动方程. 通过对随机车流过桥过程的动态判别, 进行车桥运动方程维度的时变更新, 并提出了过程分析数据的动态存储与提取算法. 详细阐述了所提分析方法的总体框架和具体实现步骤. 工程实例分析结果表明, 在满足相对误差小于 3.5% 条件下, 所提出的分析方法计算用时仅为传统整体分析法的 14.8%, 与分离迭代方法基本相同. 所提出的分析方法具有较高的计算效率和分析精度, 可用于相关研究和工程实际中的随机车流与桥梁耦合振动仿真分析.

关键词: 桥梁; 维度时变; 随机车流; 车桥振动; 动力分析

中图分类号: U441.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2018)03-0046-07

An analysis method for coupled vibration random traffic flow and bridge

LI Yan¹, WU Zhiwen², CAI Ming³, LI Zhao¹

(1. School of Transportation Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China;
2. Shenzhen Highway Engineering Consulting Company, Shenzhen 518094, Guangdong, China;
3. Shenzhen Municipal Design & Research Institute Co., Ltd., Shenzhen 518029, Guangdong, China)

Abstract: To improve calculation efficiency of the coupled vibration between random traffic flow and bridge, an innovative time domain analysis method is proposed. The traffic-bridge coupled vibration equation is established by combing the modal synthesis technology and global analysis method. The dimension of motion equation for random vehicles and bridge system is updated constantly based on the progress evaluation for the running vehicles on the bridge, and the algorithm of dynamic storage and extraction for procedural computing data is proposed. The whole framework and detailed implementation steps also are introduced for the proposed traffic-bridge coupled vibration analysis method. Numerical results indicate that the computing cost of the proposed method is 14.5% of the traditional integral method, and it is similar with the separated iterative method when relative errors are less than 3.5%. The proposed method has a good computing efficiency and accuracy, and can be used to the random traffic load and bridge coupled vibration analysis.

Keywords: bridges; time variance dimension; random traffic flow; traffic-bridge coupled vibration; dynamic analysis

当前公路桥梁车桥耦合振动研究主要集中于确定车载下桥梁结构的动力行为分析方面, 这与日常运营状态随机车流作用下桥梁的动力响应存在较大的差异, 而国内外对随机车流作用下桥梁动力行为的研究还相对较少^[1-2]. 开展随机交通荷载下桥梁结构的动力行为分析研究, 可为既有桥梁的性能评定和预测、健康监测及基于车桥振动的结构损伤评定等提供必要的理论基础和方法支撑, 具有重要意义, 相关研究正吸引越来越多的关注^[3-8].

文献[4]采用分离法建立车桥振动分析模型, 依托单主梁和梁格法桥梁分析模型, 提出了随机车流与桥梁耦合振动分析的框架并编制了相关程序, 指出计算代价主要受子步迭代次数和收敛条件影响; 文献[5]基于该方法开展了随机车流下双曲拱桥的车桥振动响应分析. 文献[6-7]基于车桥耦合振动的整体分析模型, 针对大跨度索体系桥梁提出将随机车流的动力作用等效为移动荷载列的方法, 实现了随机车流与桥梁耦合振动分析的简化; 文献[8]利用多类车辆单独过桥形成随机车辆等效荷载库, 然后用等效荷载形式进行随机车流下桥梁动力行为分析, 达到降低计算代价的目的, 但其分析精度也受到了较大的影响.

综上所述, 当前随机车流与桥梁耦合振动分析

收稿日期: 2017-02-24

基金项目: 国家自然科学基金(51108132);

黑龙江省自然科学基金(E080509)

作者简介: 李岩(1978—), 男, 博士, 副教授

通信作者: 李岩, liyan2011@hit.edu.cn

的方法主要包含分离迭代法和整体分析法两种,其中分离迭代法在每个时间步均需迭代,迭代次数的不确定性和收敛条件的合理选择对计算成本影响明显;而采用车桥整体分析与随机交通流简化为等效移动荷载列结合的方法,其计算成本的降低常以分析精度为代价,对于大跨度桥梁该法尚可接受,而对于常规桥梁则会造成较大误差. 研究提出一种可实现更好的平衡计算成本和分析精度关系的随机车流与桥梁耦合振动分析方法十分必要.

为此,本文提出一种车桥系统运动方程维度时变的随机车流与桥梁耦合振动分析方法,保持了整体法直接求解、无需时间步内迭代的优点,通过对车桥系统运动方程的运动方程维度时变化的处理,有效降低了计算代价. 结果表明所提出的方法能够以较经济的计算代价实现满足工程精度要求的随机车流与桥梁动力相互作用分析. 所提出的数值方法适用于随机车流作用下各类桥梁的动力行为分析,能够应用于既有桥梁的疲劳损伤评估和预测、基于监测系统的桥梁损伤预后和基于车桥振动的结构损伤评定等相关研究,可为上述研究所需的随机交通流与桥梁动力相互作用的合理预测提供有效的分析方法.

1 随机车流模拟方法

既有的相关研究表明,公路上通行的实际交通流是一个随机过程,在道路观测断面上任一时刻出现的车辆类型、车重、车辆间距都服从一定的随机分布^[9]. 通过对实测过桥交通量和动态称重数据的统计分析,并结合相关随机车流参数研究的结果,可将随机车辆模拟的特征参数确定为车型、车重和车辆间距3类^[9]. 其中车型一般服从均匀分布,车重和轴重服从极值I型分布,一般运营状态的时间间隔和车间距服从对数正态分布,密集运营状态下的时间间隔和车间距服从伽马分布^[9-10].

针对具体桥例,首先对随机车流进行观测和调查统计,然后利用K-S检验法对车辆特征参数进行随机分布的优度拟合,用极大似然法进行车辆荷载各随机变量的参数估计,可确定随机车辆荷载各特征参数符合的随机分布类型及参数. 最后以年平均日交通量作为模拟样本容量,根据MATLAB程序自身包含的多种随机函数,编制随机车流的Monte-Carlo模拟程序,实现随机车流样本的模拟生成,具体模拟步骤和过程详见文献[11],不再赘述. 后继将结合算例进一步说明随机车流模型的参数选取、交通调查数据等问题.

2 车桥耦合振动分析原理

现有的车桥耦合系统运动方程建立方法可分为整体式和分离式两类. 整体式所建立的车桥系统总体运动方程优点是求解过程不需要迭代,但方程维度高,占用内存大;而分离式系统独立建模的方法,虽能降低单个方程规模,但需要进行分离迭代,计算代价仍较大^[3].

本文采用整体法,通过车辆与桥梁接触点的作用力和位移的协调关系,建立车辆、桥梁耦合系统的整体运动方程,可表达为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v & \mathbf{C}_{vB} \\ \mathbf{C}_{Bv} & \mathbf{C}_B + \mathbf{C}_B^v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v & \mathbf{K}_{vB} \\ \mathbf{K}_{Bv} & \mathbf{K}_B + \mathbf{K}_B^v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_v \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_v^r \\ \mathbf{F}_B^{rG} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

式中: \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为质量、阻尼和刚度矩阵;下标“B”和“v”分别代表桥梁和车辆; \mathbf{X}_v 和 \mathbf{q}_B 分别为车辆和桥梁位移响应向量;在刚度和阻尼中的上标“v”表示车辆的贡献项;下标“Bv”和“vB”表示车桥耦合项;上标“r”和“G”表示由于桥面不平度和车辆自重产生的作用力.

本文采用模态综合方法,在模态坐标下建立分析对象桥梁的运动方程. 首先利用通用有限元软件建立桥梁的空间分析模型,然后进行模态分析并提取结构的振型和频率等模态信息,用于计算车桥动力响应. 基于上述原理,本文采用MATLAB开发了专门的车桥耦合振动分析程序.

现以三轴整车为例,对车辆计算模型进行简要介绍,如图1所示. 该模型包含16个自由度, Z_{vr} 、 θ_{vr} 、 φ_{vr} 、 Y_{vr} 分别为车体竖向沉浮、绕Y轴的转动、绕X轴的侧滚和横向摆动自由度; Z_{sL}^i 、 Z_{sR}^i 分别为悬架X轴左侧、右侧刚体竖向沉浮自由度; Y_{sL}^i 、 Y_{sR}^i 分别为悬架X轴左侧、右侧刚体横向摆动自由度;下标vr表示车体;s表示悬架;L、R分别表示X轴左侧、右侧刚体. 上述车桥耦合振动方程中质量、刚度、阻尼和荷载向量,车辆运动方程及详细参数可详见文献[12],此不赘述.

常规的整体法车桥振动分析模型,车辆过桥计算过程中,运动方程的维度保持不变,仅在每个时间步对式(1)中的车桥耦联阻尼 \mathbf{C}_{vB} 、 \mathbf{C}_B^v 和刚度项 \mathbf{K}_{vB} 、 \mathbf{K}_B^v 进行更新. 如直接应用于随机车流-桥梁耦合振动计算,必然导致庞大的计算成本. 为此,本文下面提出一种考虑随机车流过桥过程中,车桥耦合运动方程维度实时更新变化的车桥耦合振动分析方法.

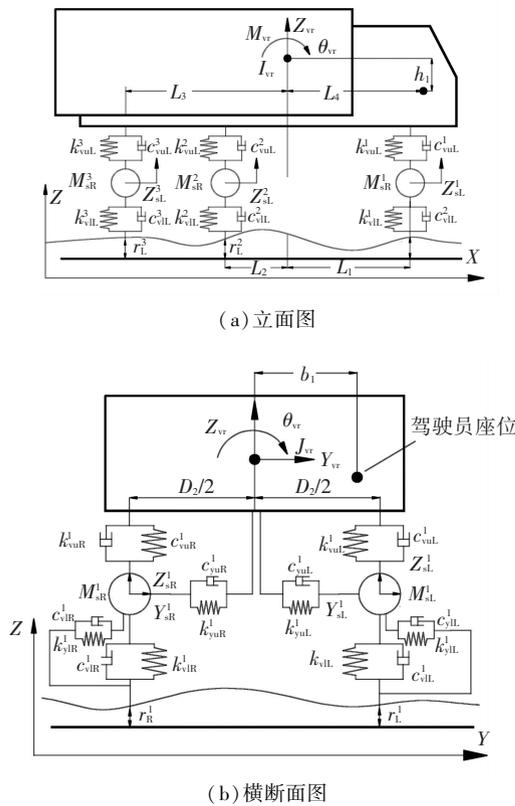


图 1 车辆模型

Fig.1 Vehicle model

3 随机车流与桥梁耦合振动整体分析算法

3.1 分析流程与关键步骤处理方法

随机车流过桥时,每一时刻桥上车辆及车轴数都在发生变化,通过对车桥系统运动方程维度的实时更新,实现方程维度时变的随机车流与桥梁振动分析.该方法的分析框架如图 2 所示.结合该框架,将该分析方法的具体流程总结如下:1) 基于交通调查开展随机交通流的数值模拟. 2) 基于模态分析或实测得到的桥梁模态参数,得到方程(1)中的 $[M_B]_{N_b \times N_b}$, $[K_B]_{N_b \times N_b}$, $[C_B]_{N_b \times N_b}$ (其中 N_b 为参与计算振型阶数). 3) 胞元数组表达车型矩阵. 重车车型分为整车和挂车两类,按轴数又分为 5 种,车辆计算模型见文献[13]; 分别建立 2×5 的胞元数组 $\{M_{vi}\}$, $\{K_{vi}\}$ 和 $\{C_{vi}\}$, 其中各元素对应各车型质量、刚度和阻尼矩阵. 4) 建立车桥响应存储矩阵 $[U_v]_{N_v \times n_t}$ 和 $[U_b]_{N_b \times n_t}$. n_t 为随机车流过桥需要的总时间步数, N_v 为全部车辆自由度总数. 5) 随机车队相对桥梁运行状态判定. a) 首先对车队序列进行车轴编号,起始时刻 t_0 各轴横、纵坐标的标量矩阵为 $\{x_z\}_{1 \times n}$ 和 $\{y_z\}_{1 \times 2n}$, n 为车道数, x 表示纵坐标, y 表示横坐标, z 表示车轴; b) 车队开始运行后计算各时刻车轴的新坐标,依次判断各轴是否处于桥面范围;将当前时刻处于桥面上的车轴编号存储为变量

$\{V_Z^B\}_{1 \times n}$ (每个元素为当前时刻某车道桥面上的车轴编号向量); c) 最后,据 $\{V_Z^B\}_{1 \times n}$ 可确定当前时刻桥面上的车型序列 $\{V_T^B\}_{1 \times n}$, 各元素为某车道上的车型序列向量(桥上车轴、车型向量维度为时变的,且只要某车型任意车轴在桥则认为该车在桥上). 6) 任意时刻车辆运动方程的构建. 质量、刚度和阻尼矩阵分别为 $[M_v]_{n_i^i \times n_i^i}$, $[K_v]_{n_i^i \times n_i^i}$, $[C_v]_{n_i^i \times n_i^i}$, n_i^i 为第 i 时间步开始时刻桥上车轴自由度总数. 7) 车桥耦合项和荷载项计算. 对当前时刻桥上各车型的每一车轴进行循环,由车轴坐标插值确定对应车轮位置的不平度和各阶振型分量,进而计算得到车桥耦合项矩阵 K_{Bv} 和 C_{Bv} , 及荷载项 F_v^r 和 F_{Bv}^{rc} . 8) 维度时变的的车桥耦合振动方程求解. 按步骤 1~7 组成的任意时刻车桥耦合运动方程,采用 Newmark- β 法求解,其上一时间步各车辆响应值由 $[U_v]$ 中对应车辆位置提取,当前步车辆响应获得后存储到 $[U_v]$; 重复以上步骤直到随机车队全部过桥.

3.2 方法实现过程算例

3.2.1 随机车流按车轴车型序列化

以两车道随机车流通过某跨径为 20 m 的简支梁桥为例,说明本文随机车流与桥梁耦合振动的算法的实现过程和关键步骤.为分解说明关键步骤,采用了一个简单的 2 列共 5 辆车的随机车队排列情况,如图 2 所示.根据此车队排列,则程序中车型数组和区分整车挂车的数组可设定为

$$\{V_Z^B\} = \begin{Bmatrix} [2 & 4 & 3] \\ [2 & 3] \end{Bmatrix}; \quad \{V_T\} = \begin{Bmatrix} [1 & 2 & 1] \\ [1 & 1] \end{Bmatrix}.$$

其中 $\{V_Z^B\}$ 数组元素表示车队中各车辆相对位置和车辆轴数; $\{V_T\}$ 数组中“1”表示整车,“2”表示挂车.

车辆间距实际由随机车流模拟结果确定,为说明问题,假设各车间距均为 1 m,定义上桥侧桥头为纵坐标原点,车辆行驶方向为正,各车道首车的前轴坐标为小于 0 的任意值,在此对车道 1、2 分别取 -1、-5 m. 根据各车型轴距参数可得到随机车队各轴的纵坐标数组表示为

$$x_z = \left\{ \begin{Bmatrix} -1, -4.75, -5.75, -9.5, -18.1, \\ -19.4, -20.4, -25.2, -26.55 \\ -5, -8.75, -9.75, -14.55, -15.9 \end{Bmatrix} \right\}.$$

3.2.2 随机车流序列过桥的程序实现方法

设随机车流过桥车速为 50 km/h,时程分析的步长为 0.01 s,总时间步数为 n_s ,则单位时间步内车队前进距离为 0.14 m,可计算得到任意时刻车队内各车各轴的坐标.现以随机车流过桥的以下几个典型时刻来对本文维度时变的随机车流与桥梁振动分析的算法进行说明.

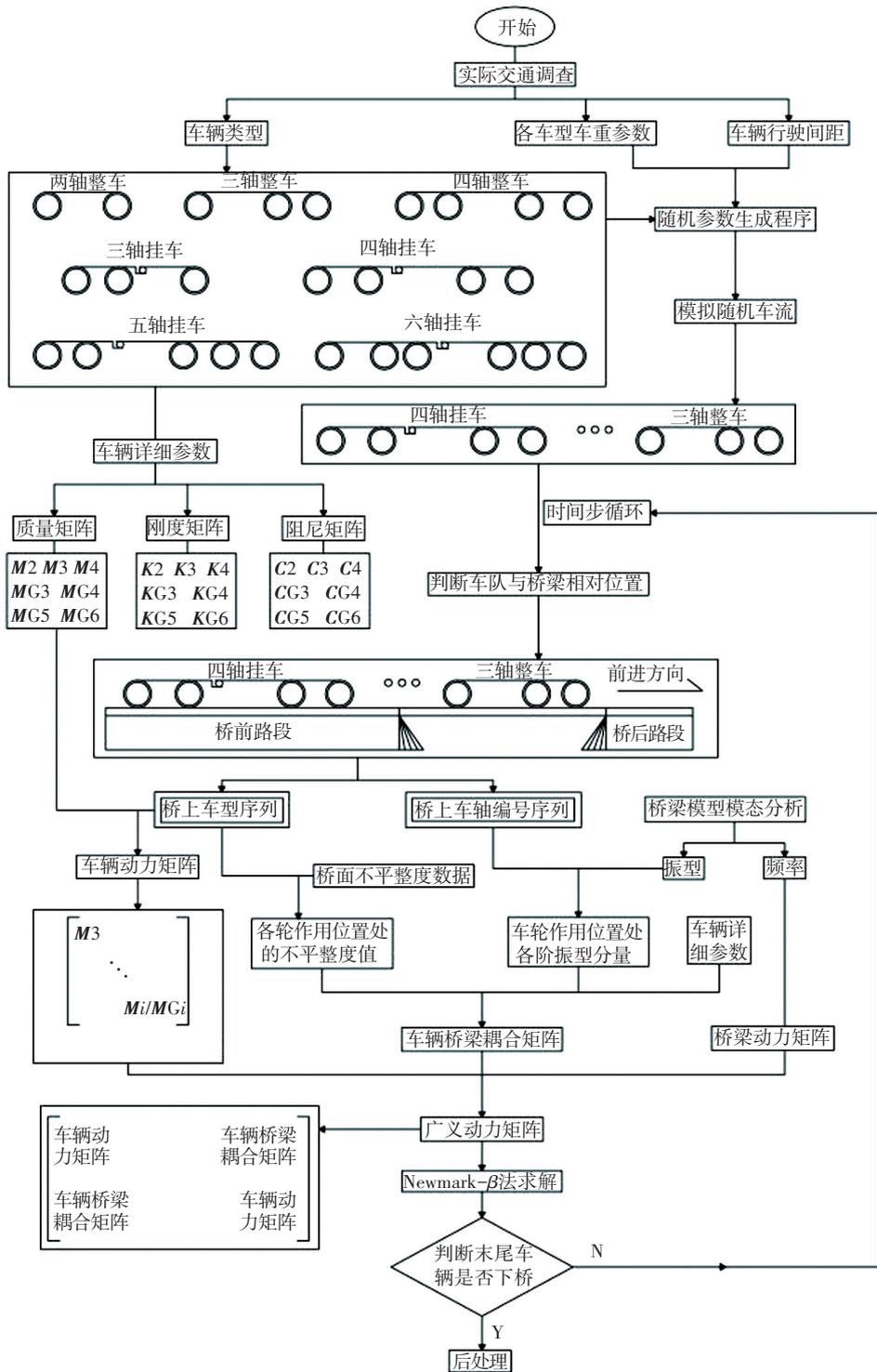


图 2 随机车流与桥梁耦合振动分析流程图

Fig.2 Analysis frame for coupled vibration of random traffic flow and bridges

1) 时刻 1. 首车上桥 (见图 3), 当 $n_s = 8$ 时, 车道 1 上的 1 号车轴坐标为 0.12 m, 表明该轴已上桥。此时桥上车轴编号数组 $\{V_Z^B\}$ 和桥上车型数组 $\{V_T^B\}$ 分别为

$$\{V_Z^B\} = \{[1]\}; \quad \{V_T^B\} = \{[2]\}.$$

2) 时刻 2. 车道 2 首车上桥 (车流与桥相对位置如图 4 所示): 当 $n_s = 36$ 时, 车道 2 首车上桥。此时

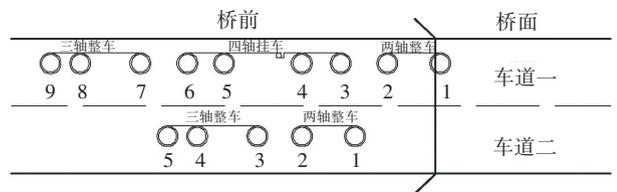


图 3 随机车流过桥状况 1

Fig.3 Case 1 for random traffic flow passing bridges

周的车辆调查,过站车辆总数为 175 712 辆,车型客货比为 3 : 7,过桥载重货车交通量为 122 998 辆. 各类货车车型占比信息汇总见表 1^[10]. 依据交通调查数据并结合全国公路车辆荷载分类研究结果,将该桥过桥车辆的重型车型分为 7 类,各类车型参数见文献[10]. 由于小客车自重较小,荷载效应与重车相比较低,参考同类研究在分析中对其进行了忽略处理,但考虑了其对于车辆间距的影响.



图7 桥梁计算模型

Fig.7 Analysis model of bridges

表1 车型占比情况

Tab.1 Ratio of different vehicles

| 车型代号 | 货车车型描述 | 各车型对货车交通的占比/% |
|------|--------|---------------|
| M1 | 2轴整车 | 14 |
| M2 | 3轴整车 | 1.59 |
| M3 | 4轴整车 | 3.71 |
| M4 | 3轴拖挂车 | 1.92 |
| M5 | 4轴拖挂车 | 4.12 |
| M6 | 5轴拖挂车 | 2.46 |
| M7 | 6轴拖挂车 | 72.19 |

基于实际交通观测数据,利用 K-S 检验法对车辆特征参数进行随机分布优度拟和,用极大似然法进行车辆荷载各随机变量的参数估计,确定随机车辆荷载各特征参数符合的随机分布类型及参数如表 2 所示.

表2 随机车流特征参数服从的概率分布

Tab.2 The probability distribution of characteristic parameters for random traffic flow

| 随机车流参数 | 分布类型 | 分布参数 |
|--------|--------|-------------------------------|
| 车型 | 均匀 | 按实测车型占比确定 |
| 车重 | 极值 I 型 | $\mu = 1.667, \sigma = 0.816$ |
| 间距 | 对数正态 | $\mu = 4.827, \sigma = 0.111$ |

采用 Monte-Carlo 方法进行随机车流荷载模拟. 下面基于自编的随机车流模拟程序,选取重车样本容量 300 为例,模拟得到各车型分布和密集运行状态下车辆间距分布如图 8 所示.

4.3 随机车桥振动的计算效率比较分析

为分析本文提出车桥振动算法的适用性和计算

效率,现针对算例分别采用以下 3 种方法进行计算: 本文算法(算法 1); 方程维度恒定的车桥振动整体分析方法(算法 2); 车桥分离迭代方法(算法 3). 车桥分析工况基本参数: 车速恒定为 50 km/h, 时间步长取为 0.01 s, 随机车流车辆数为 300, 随机车队总长度为 2 521 m. 算法 3 分离迭代法中, 以车轮与桥面相互作用力误差 10 N 作为收敛条件.

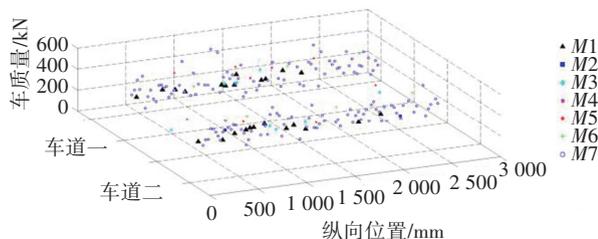
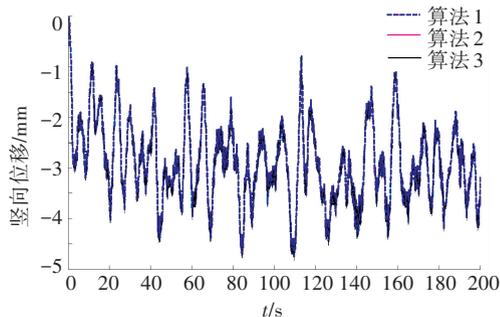


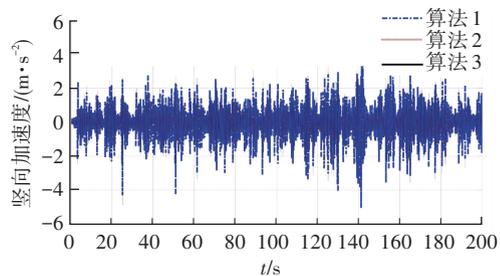
图8 随机车流模型

Fig.8 Model of random traffic flow

以桥梁中跨右侧边梁跨中竖向位移和加速度响应为例,将 3 种算法的计算结果进行比较(见图 9), 发现算法 1 和算法 2 得到的结果基本相同,与算法 3 的差别也十分微小,最大相对误差小于 3.5%. 表明所提出的算法与常用方法的结果吻合良好,具有较好的适用性.



(a) 桥梁位移响应



(b) 加速度响应

图9 随机车载下桥梁跨中动力响应比较

Fig.9 Comparison of dynamic response for the bridge in midspan under random traffic flow

通过对 3 种算法计算过程信息的汇总和对比, 可发现各算法的计算效率情况, 见表 3, 其中 n_a 为单个时间步内平均迭代次数. 3 种算法总计算时间步数均为 7 488. 算法 1 由于采用了方程维度时变处理方法, 使车桥振动方程的单步求解维度明显降低, 从

而较传统整体分析算法 2 有了大幅的提高,总用时仅为算法 3 的 14.8%;同算法 3 相比,两者计算效率差别不大,既有研究^[3]表明算法 3 的计算效率受到步内迭代次数、收敛误差取值的影响明显,且存在步内迭代不收敛的风险.分析表明,本文所提出的算法具有较高的计算效率,可用于随机车流下各类桥梁的车桥振动分析及考虑风荷载、地震荷载多场动力分析.

表 3 计算效率比较分析

Tab.3 Comparison of computational efficiency

| 分析方法 | n_s | n_a | 单步计算用时/s | | | 总计用时/s |
|------|-------|-------|----------|------|-------|---------|
| | | | 最长 | 最短 | 平均 | |
| 算法 1 | 7 488 | 1 | 3.50 | 0.42 | 2.24 | 16 802 |
| 算法 2 | 7 488 | 1 | 29.20 | 3.25 | 15.19 | 113 768 |
| 算法 3 | 7 488 | 6 | 10.24 | 0.28 | 2.19 | 16 284 |

5 结 论

1) 针对随机车流过桥动力行为数值分析问题,提出了一种基于车桥整体运动方程维度时变的随机车桥振动计算方法.该法保持了整体法计算稳定、无需子步迭代的优势,通过方程维度的动态时变化处理,有效提高计算效率,拓展了车桥振动整体分析方法的适用范围.

2) 详细阐述了所提方法的分析框架和关键步骤,并依托算例给出了具体的实现方法和处理策略,可为相关随机车流与桥梁振动分析算法和程序的编制提供参考.

3) 依托工程实例对所提算法与常用方法的计算效率进行比较分析,结果表明该算法较方程维度恒定的整体算法计算效率提高近 10 倍,与分离迭代方法相比差异不明显.该方法不存在分离迭代法经常遇到的迭代次数不确定和不易收敛导致的计算时间预估难度大和耗时增长问题,具有很好的应用价值.

参 考 文 献

- [1] FENG D M, SUN H, FENG M Q. Simultaneous identification of bridge structural parameters and vehicle loads [J]. Computers and Structures, 2015, 157: 76-88.
- [2] LOMBAERT G, JOEL P C. Random vibration analysis of dynamic vehicle-bridge interaction due to road unevenness [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, 138: 816-825.
- [3] 夏禾, 张楠, 郭薇薇, 等. 车桥耦合振动工程[M]. 北京: 科学出

版社, 2014.

- XIA He, ZHANG Nan, GUO Weiwei, et al. Coupling vibrations of train-bridge system [M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [4] 韩万水, 马麟, 汪炳, 等. 随机车流-桥梁系统耦合振动精细化分析与动态可视化[J]. 中国公路学报, 2013, 26(4): 78-87.
- HAN Wanshui, MA Lin, WANG Bing, et al. Refinement analysis and dynamic visualization of traffic-bridge coupling vibration system [J]. China Journal of Highway and Transport, 2013, 26(4): 78-87.
- [4] 王达, 刘杨, 黄平明. 随机车流作用下双曲拱桥车桥耦合振动研究[J]. 中国公路学报, 2009, 22(6): 67-72.
- WANG Da, LIU Yang, HUANG Pingmin. Research on vehicle-bridge coupled vibration for two-way curved arch bridge under random traffic flow [J]. China Journal of Highway and Transport, 2009, 22(6): 67-72.
- [5] 殷新锋, 邓露. 随机车流作用下桥梁冲击系数分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2015, 42(9): 68-75.
- YIN Xinfeng, DENG Lu. Impact factor analysis of bridges under random traffic loads [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2015, 42(9): 68-75.
- [6] CHEN S R, WU J. Modeling stochastic live load for long-span bridge based on microscopic traffic flow simulation [J]. Computers and Structures, 2011, 89: 813-824.
- [7] 李扬海, 鲍卫刚, 郭修武, 等. 公路桥梁结构可靠度与概率极限状态设计[M]. 北京: 人民交通出版社, 1997.
- LI Yanghai, BAO Weigang, GUO Xiuwu, et al. Structural reliability for highway bridges and probability based limit state design [M]. Beijing: China Communications Press, 1997.
- [8] CHEN S R, WU J. Dynamic performance simulation of long-span bridge under combined loads of stochastic traffic and wind [J]. Journal of Bridge Engineering, 2010, 15(3): 219-230.
- [9] 张喜刚. 公路桥梁汽车荷载标准研究[M]. 北京: 人民交通出版社, 2014: 220-241.
- ZHANG Xigang. Study on vehicle load standard of Highway Bridge [M]. Beijing: China Communications Press, 2014: 220-241.
- [10] 李岩, 吕大刚, 盛洪飞. 考虑随机车载-风载联合作用的斜拉桥拉索疲劳可靠性分析[J]. 中国公路学报, 2012, 25(2): 60-66.
- LI YAN, LU Dagang, SHENG Hongfei. Fatigue reliability analysis on cable of cable-stayed bridge under random vehicle load and wind load [J]. China Journal of Highway and Transport, 2012, 25(2): 60-66.
- [11] LI Y, CAI C S, LIU Y, Chen Y J, LIU J F. Dynamic analysis of a large span specially shaped hybrid girder bridge with concrete-filled steel tube arches [J]. Engineering Structures, 2016, 106: 243-260.
- [12] 刘佳锋. 车载下既有损伤公路混凝土简支梁桥动力响应分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014.
- LIU Jiafeng. Dynamic response analysis of highway concrete simply supported beam bridges with damage under moving vehicles [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2014.

(编辑 魏希柱)