DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201708114

自适应 Radau 伪谱法自由漂浮空间机器人轨迹规划

仲小清[1],邵翔宇[2],许林杨[2],孙光辉[2]

(1.中国空间技术研究院 通信卫星事业部,北京 100094;2.哈尔滨工业大学 智能控制与系统研究所,哈尔滨 150001)

摘 要: 为解决 Gauss 伪谱法(GPM)计算速度和求解精度之间的矛盾,在多段 Radau 伪谱法的基础上,提出了求解自由漂浮空间机器人(FFSM)最优路径规划问题的 hp 自适应 Radau 伪谱法(hp-RPM).与传统的 Gauss 伪谱法不同,该方法并不是单纯通过增加节点数量来提高精度,而是在每次迭代的过程中对整个路径分段个数和各个路径子区间的宽度进行合理的分配,并能配置每个子区间内节点的数量.通过增加分段个数可以减小子区间内所需节点个数,以此降低多项式阶数、提高计算速度.基于上述理论,首先建立了多臂 FFSM 系统动力学模型,并给出了运动过程中系统模型更新方法;然后将连续最优轨迹规划问题离散化,完成了 hp 自适应 Radau 伪谱法的设计;最后利用 hp-RPM 解决两连杆 FFSM 系统轨迹规划问题并进行了仿真实验.结果表明:在初始条件相同的情况下,两种方法得到的位置、速度规划曲线相似,但 hp-RPM 在各个节点处的误差明显低于 GPM 计算误差;在精度要求较高,初始节点较多的情况下,hp-RPM 可以在保证精度的同时有效的提高计算速度.

关键词: 自由漂浮空间机器人;Gauss 伪谱;Radau 伪谱;hp 自适应;轨迹规划

中图分类号: TP242.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 0367-6234(2018)04-0049-07

Free-floating space manipulator trajectory optimization based on adaptive Radau pseudospectral method

ZHONG Xiaoqing[1], SHAO Xiangyu[2], XU Linyang[2], SUN Guanghui[2]

(1.Institute of Telecommunication Satellite, China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China;
2.Research Institute of Intelligent Control and Systems, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To solve the contradiction between calculation speed and accuracy of Gauss Pseudo-spectral Method (GPM), a novel hp-adaptive Radau Pseudo-spectral Method (hp-RPM) is proposed for the Optimal Trajectory Planning issue in Free-Floating Space Manipulator (FFSM). Based on the multi-segment Radau Pseudo-spectral Method, the proposed method can allocate segment-numbers of total paths and the width of each sub-interval during iteration process, and configure the number of nodes in each sub-interval. By increasing the number of segment, the number of nodes and the order of polynomial can be reduced, saving the calculation speed as well. Based on the above theory, this paper first establishes the dynamic model of multi-arm FFSM system and develops a method for updating this model. Then, the continuous optimal trajectory planning problem is discretized and the design of hp-RPM is described. Finally, the hp-RPM is used to solve the trajectory planning problem of two-link FFSM system and the simulation is conducted. The result shows that the position and velocity planning curves of the two methods are similar under the same initial condition, but the error of hp-RPM at each node is obviously lower than that of the GPM. In the case of higher precision and more initial nodes, hp-RPM can effectively improve the computation speed and guarantee the accuracy simultaneously.

Keywords: free floating space manipulator; Gauss Pseudospectral; Radau Pseudospectral; hp adaptive; trajectory planning

随着人类对太空探索日渐深入,所需执行空间的任务相应变得复杂,在完成各类空间任务的过程中,空间机器人发挥着不可替代的作用[1].自由漂浮空间机器人(FFSM)是一种基座处于自由状态的空间机器人,在执行任务的过程中,其基座固连航天器停止运行,处于“自由漂浮”的状态[2].这种“自由漂浮”状态对完成特定空间任务、减小航天器损耗、延长卫星寿命有着重要的意义,因此国内外许多学者[3-4]对 FFSM 系统机械结构、动力学建模以及控制问题进行了相关研究.

对 FFSM 系统的轨迹规划研究有直接法和间接法两种主要方法.直接法将连续最优控制问题转化为非线性离散规划问题直接进行数值求解,收敛速度快、对初值要求低[5].2006 年 Huang 等[6]以粒子蚁群算法为基础解决了 FFSM 时间最优控制问题.2013 年李适[7]利用 Gauss 伪谱法完成了 FFSM 时间燃料最优控制,并利用协态映射引理证明了解的可

收稿日期: 2017-08-28
基金项目: 国家自然基金面上项目(61673009)
作者简介: 仲小清(1982—),男,高级工程师;
孙光辉(1983—),男,副教授,博士生导师
通信作者: 孙光辉,guanghuisun@hit.edu.cn

行性.间接法利用哈密顿函数推导出最优控制一阶必要条件,并通过数值计算的方法求得最优解.该方法求解精度高,但收敛速度慢,对初值依赖强.2009 年 Yokoyama 等[8]通过间接法得到受风力约束的飞行机器人点到点最优路径.

伪谱法是一种直接方法,基于正交多项式的根进行配点,应用较为广泛的有 Lobatto 伪谱法、Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法[9-10].在应用形式上,伪谱法有两种主要形式:p 法和 h 法.p 法仅通过增加多项式阶数来提高精度,高阶多项式微分矩阵求解困难和收敛速度慢导致该方法有很大的局限性;h 法将整个过程分段,在每段内用低阶多项式近似,通过增加分段的个数来提高收敛速度.然而,分段个数过多会使得误差变大,影响解的精确性[11-12].

本文在 Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法的基础上,将 h 法和 p 法的优点结合在一起设计出 hp 自适应 Radau 伪谱法.该方法对分段个数、每段的宽度、以及在每段上多项式的阶数进行配置,可以显著提高计算效率和求解精度.Han 等[13]用 hp 自适应 RPM 解决了飞行器再入轨迹规划问题.本文将 hp 自适应 RPM 算法应用到 FFSM 系统,完成空间机械臂的轨迹规划问题.

1 FFSM 系统动力学建模

惯性坐标系下 FFSM 系统模型如图 1 所示,$\boldsymbol{\rho}_i$ 为系统质心到连杆 i 质心的矢量,$\boldsymbol{r}_i$ 为连杆 i 质心到惯性坐标系原点 O 的矢量,$\boldsymbol{p}_i$ 为关节 i 在惯性坐标系中的位置矢量.

由图 1 可知连杆 k 的质心矢量$\boldsymbol{\rho}_k$ 满足:

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_{k-1} = \boldsymbol{b}_{k-1} + \boldsymbol{a}_k.\ (k = 1,\cdots,N)$$

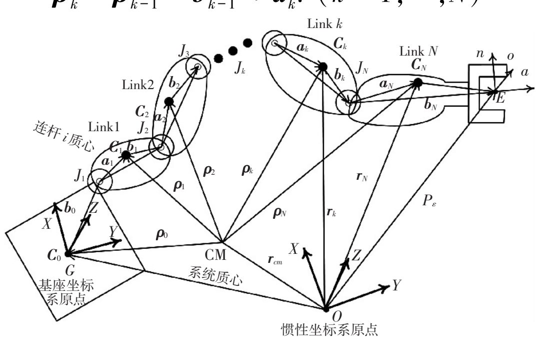

图 1 FFSM 系统模型

Fig.1 The model of FFSM system

如图 2 所示,引入增广体的概念[14],可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_k = \sum\limits_{i=0}^{n} \boldsymbol{v}_{ik}, \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_k = \sum\limits_{i=0}^{n} \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{v}_{ik}, \end{cases} \quad (k = 0,\cdots,n) \qquad (1)$$

其中

$$\boldsymbol{v}_{ik} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_i^*, & i < k; \\ \boldsymbol{c}_i^*, & i = k; \\ -\boldsymbol{a}_i^*, & i > k. \end{cases}$$

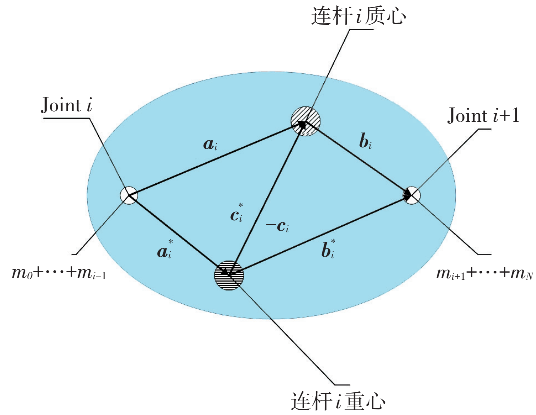

图 2 增广体定义

Fig.2 The definition of augment body

不失一般性,假设惯性坐标系原点和系统质心重合即$\boldsymbol{r}_{cm}$为 0.由式(1)可以得到末端执行器的角速度、线速度和角动量为:

$$\boldsymbol{\omega}_E = \boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i \dot{\boldsymbol{q}}_i, \qquad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_E = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{v}_{in} + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{r}_n, \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{h} = \sum_{k=0}^{n} (\boldsymbol{I}_k \boldsymbol{\omega}_k - m_k(\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{v}_{jk} \times \sum_{i=0}^{n} v_{ik} \times \boldsymbol{\omega}_i)) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} \boldsymbol{D}_{ij} \boldsymbol{\omega}_i.. \qquad (4)$$

其中$\boldsymbol{D}_{ij}$为

$$\boldsymbol{D}_{ij} = \begin{cases} -M\{-\boldsymbol{a}_i^* \cdot \boldsymbol{b}_i^*)\boldsymbol{1} - \boldsymbol{a}_i^* \boldsymbol{b}_i^*\}, & i < j; \\ \boldsymbol{I}_i + \sum\limits_{k=0}^{N} m_k\{(\boldsymbol{v}_{ik} \cdot \boldsymbol{v}_{ik})\boldsymbol{1} - \boldsymbol{v}_{ik} \boldsymbol{v}_{ik}\}, & i = j; \\ -M\{\boldsymbol{b}_i^* \cdot (-\boldsymbol{a}_i^*)\boldsymbol{1} - \boldsymbol{b}_i^*(-\boldsymbol{a}_i^*)\}, & i > j. \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{1}$ 为单位并矢.

由于${}^i\boldsymbol{v}_{ik}$是在第 i 个关节坐标系中定义,因此要得到惯性坐标系的表达式,需要将连杆坐标系中的表达式转换到惯性坐标系.根据文献[14],可以求得由基座坐标系和关节坐标系到惯性坐标系的转移矩阵 $\boldsymbol{T}_0$、$\boldsymbol{T}_i$ 为:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{e},n) = (n^2 - \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e})\boldsymbol{1} + 2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} + 2n\boldsymbol{e}^{\times}, \\ &\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{e},n,\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_i) = \boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{e},n)\,{}^0\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_i), \end{aligned} \qquad (5)$$

式中 $\boldsymbol{e}$、n 分别为欧拉参数,随基座转轴单位向量 $\boldsymbol{a}$ 和转角 θ 变化,满足:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a},\theta) = \boldsymbol{a}\sin(\theta/2),$$

$$n(\boldsymbol{a},\theta) = \cos(\theta/2).$$

由式(5)可知,转移矩阵$\boldsymbol{T}_0$ 是随基座运动不断

变化的量,需要实时更新;新的转移矩阵可利用如下公式求取:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{e}^{\times} + n]\,{}^{0}\boldsymbol{\omega}_0,$$

$$\dot{n} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}0}\boldsymbol{\omega}_0.$$

式(2)、(3)在惯性坐标系中表示为:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}_E &= \boldsymbol{T}_0\{{}^0\boldsymbol{J}_{11}{}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\boldsymbol{J}_{12}\dot{\boldsymbol{q}}_m\},\\ \boldsymbol{\omega}_E &= \boldsymbol{T}_0\{{}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\boldsymbol{J}_{22}\dot{\boldsymbol{q}}_m\},\end{aligned} \tag{6}$$

其中:

$${}^0\boldsymbol{J}_{11} = -\sum_{i=0}^{n}({}^0\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{v}'_{in})^{\times},\ {}^0\boldsymbol{J}_{22} = {}^0\boldsymbol{F}_n,$$

$${}^0\boldsymbol{J}_{12} = -\sum_{i=0}^{n}({}^0\boldsymbol{T}_i{}^i\boldsymbol{v}'_{in})^{\times 0}\boldsymbol{F}_i,$$

$${}^0\boldsymbol{F}_j = [{}^0\boldsymbol{T}_1{}^1\boldsymbol{z}_1\quad {}^0\boldsymbol{T}_2{}^2\boldsymbol{z}_2\quad ,\cdots,\quad {}^0\boldsymbol{T}_j{}^j\boldsymbol{z}_j\quad 0,\cdots,0].$$

式(6)带入拉格朗日方程得到系统动力学方程[15]:

$$\boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{q}_m)\ddot{\boldsymbol{q}}_m + \boldsymbol{C}_q(\boldsymbol{q}_m,\dot{\boldsymbol{q}}_m)\dot{\boldsymbol{q}}_m = \boldsymbol{\mu}. \tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{H}_q$ 为 $N\times N$ 的对称正定惯量矩阵;$\boldsymbol{C}_q$ 为 $N\times 1$ 的离心力和哥氏力矩阵;$\boldsymbol{\mu}$ 为 $N\times 1$ 的控制力矩向量;$\boldsymbol{q}_m=[q_1\quad q_2\quad \cdots\quad q_n]^{\mathrm{T}}$ 为各关节转角状态矩阵.各矩阵计算如下:

$$\boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{q}_m) = \boldsymbol{H}_\omega^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} + M\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{H}_\omega,$$

$$\boldsymbol{H}_\omega = [{}^0\boldsymbol{D}^{-10}\boldsymbol{D}_q\quad \boldsymbol{F}\quad \boldsymbol{F}_2]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_k = \tilde{\boldsymbol{V}}_k\tilde{\boldsymbol{V}}_k^{\mathrm{T}},\ \tilde{\boldsymbol{V}}_k = [v_{0k}\quad v_{1k}\quad v_{2k}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{C}_q(\boldsymbol{q}_m,\dot{\boldsymbol{q}}_m)\dot{\boldsymbol{q}}_m = \boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{q}_m)\dot{\boldsymbol{q}}_m - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}_m}(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_q(\boldsymbol{q}_m)\dot{\boldsymbol{q}}_m).$$

2　Bolza 形式最优控制问题

2.1　问题描述

将式(7)转化成状态方程形式

$$\dot{\boldsymbol{X}} = f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},t),$$

其中:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\mu},$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_m\\ \dot{\boldsymbol{q}}_m\end{bmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{H}_q^{-1}\boldsymbol{C}_q\end{bmatrix}\boldsymbol{X} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{H}_q^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}. \tag{8}$$

边界约束为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}(t_0),t_0,\boldsymbol{X}(t_f),t_f) = 0. \tag{9}$$

路径约束为

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}(\tau),\boldsymbol{U}(\tau),\tau) \leqslant 0. \tag{10}$$

考虑到时间最优、燃料最优和基座扰动,定义如下目标函数[16]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \alpha\boldsymbol{J}_1 + \beta\boldsymbol{J}_2 + \gamma\boldsymbol{J}_3 = \\ &\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}(t_0),t_0,\boldsymbol{X}(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{U}(t),t) = \alpha + \beta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}(t).$$

式中:α、β、γ 分别为相关系数;$\boldsymbol{J}_1$、$\boldsymbol{J}_2$、$\boldsymbol{J}_3$ 分别为时间最优、燃料最优和基座稳定性目标函数.

$$\begin{cases}\boldsymbol{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t,\\ \boldsymbol{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)u(t)\,\mathrm{d}t,\\ \boldsymbol{J}_3 = \int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\omega}_0^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\omega}_0(t)\,\mathrm{d}t.\end{cases} \tag{11}$$

2.2　Bolza 标准化

将时间$[t_o,t_f]$分成 S 段,$0=t_0<t_1<\cdots<t_S=t_f$,变量 $t\in[t_{s-1},t_s]$.通过如下变换将变量 t 转化为变量 $\tau\in[-1,1]$为

$$\tau = \frac{2t-(t_s+t_{s-1})}{t_s-t_{s-1}},(t_{s-1}<t<t_s) \tag{12}$$

式中$\boldsymbol{x}^{(s)}(\tau)$、$\boldsymbol{\mu}^{(s)}(\tau)$分别为时间区间 s 内的状态变量和控制变量.标准 Bolza 最优控制问题可以描述为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}^{(s)} &= \alpha\boldsymbol{J}_1^{(s)} + \beta\boldsymbol{J}_2^{(s)} + \gamma\boldsymbol{J}_3^{(s)} = \\ &\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}(-1),t_0,\boldsymbol{X}(1),t_f) + \sum_{s=1}^{S}\frac{t_s-t_{s-1}}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_1^{(s)} = \sum_{s=1}^{S}\frac{t_s-t_{s-1}}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\tau,$$

$$\boldsymbol{J}_2^{(s)} = \sum_{s=1}^{S}\frac{t_s-t_{s-1}}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{u}^{(s)}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(s)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\boldsymbol{J}_3^{(s)} = \sum_{s=1}^{S}\frac{t_s-t_{s-1}}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{\omega}^{(s)}(\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}^{(s)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

且满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(s)}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{t_s-t_{s-1}}{2}f(\boldsymbol{x}^{(s)}(\tau),\boldsymbol{u}^{(s)}(\tau),\tau;t_{s-1},t_s),$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(s)}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{t_s-t_{s-1}}{2}f(\boldsymbol{x}^{(s)}(\tau),\boldsymbol{u}^{(s)}(\tau),\tau;t_{s-1},t_s),$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^{(1)}(-1),\tau_0,\boldsymbol{X}^{(S)}(1),\tau_f) = 0,$$

由连续性条件可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t_s^{-1}) = \boldsymbol{x}(t_s^{+1}),\\ \boldsymbol{u}(t_s^{-1}) = \boldsymbol{u}(t_s^{+1}).\end{cases}$$

3　Radau 伪谱法

Radau 伪谱法离散点选择基于 Legendre-Gauss-Radau(LGR)节点,该类节点散落在半开区间[-1,1)或(-1,1]内.本文利用 LGR 节点进行离散处理,

且仅包含-1 边界点.第 s 段中的状态变量 $x_i^{(s)}$ 由多项式近似[17]：

$$\boldsymbol{x}^{(s)}(\tau) \approx \boldsymbol{X}^{(s)}(\tau) = \sum_{i=0}^{N_s} \boldsymbol{L}_i^{(s)}(\tau)\, \boldsymbol{X}^{(s)}(\tau_i) = \sum_{i=0}^{N_s} \boldsymbol{L}_i^{(s)}(\tau)\, \boldsymbol{X}_i^{(s)}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{L}_i^{(s)}(\tau) = \prod_{j=0, j\neq i}^{N_s+1} \frac{\tau - \tau_j^{(s)}}{\tau_i - \tau_j^{(s)}}. \quad (i = 0,1,\cdots,N_s)$$

式中：$\tau \in [-1,1]$，$(\tau_0^{(s)},\cdots,\tau_{N_s-1}^{(s)})$ 为 s 段内 LGR 节点；$\tau_{N_s}^{(s)}=1$ 为 s 段的终点；$\boldsymbol{L}_i^{(s)}(\tau)$ 为拉格朗日基函数.

在 Radau 伪谱法中，假设最后一个点没有控制，控制变量离散化为：

$$\boldsymbol{u}^{(S)}(\tau) \approx \boldsymbol{U}^{(S)}(\tau) = \sum_{i=0}^{N_s-1} \breve{\boldsymbol{L}}_i^{(S)}(\tau)\, \boldsymbol{U}^{(S)}(\tau_i) = \sum_{i=0}^{N} \breve{\boldsymbol{L}}_i^{(S)}(\tau)\, \boldsymbol{U}_i^{(S)},$$

$$\breve{\boldsymbol{L}}_i^{(S)}(\tau) = \prod_{j=0, j\neq i}^{N_s-1} \frac{\tau - \tau_j^{(S)}}{\tau_i - \tau_j^{(S)}}, (i = 0,1,\cdots,N_s - 1)$$

式中 $\boldsymbol{U}_i^{(s)}$ 为在 N_k 个 LGR 节点处近似值.状态方程式(8)的离散形式为

$$\sum_{i=0}^{N_s-1} \boldsymbol{H}_{k,i}^{(s)}\, \boldsymbol{X}_k^{(s)} = \frac{t_s - t_{s-1}}{2} f(\boldsymbol{X}_k^{(s)}, \boldsymbol{U}_k^{(s)}, \boldsymbol{\tau}_k^{(s)}; t_{k-1}, t_k),$$
$$(k = 0,1,\cdots,N_s - 1). \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_{k,i}^{(s)} = \dot{\boldsymbol{L}}_i^{(s)}(\tau_k), \begin{cases} i = 0,1,\cdots,N_s - 1, \\ k = 0,1,\cdots,N_s - 1, \\ s = 1,2,\cdots,S. \end{cases}$$

为第 s 段的 Radau 伪谱微分矩阵.同时目标函数离散形式为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}_1^{(1)}, t_0, \boldsymbol{X}_{Ns+1}^{(s)}, t_s) + \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=0}^{N_s-1} \frac{t_s - t_{s-1}}{2} \boldsymbol{\omega}_j^{(s)} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_j^{(s)}, \boldsymbol{U}_j^{(s)}, \boldsymbol{\tau}_j^{(s)}),$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_j^{(s)}(i=1,\cdots,N_s)$ 为 LGR 权重，可通过下式离线计算得到：

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{2}{N^2},$$

$$\boldsymbol{\omega}_k = \frac{1}{(1-\tau_k)(\dot{p}_{N-1}(\tau_k))^2}. \quad (k = 2,\cdots,N-1).$$

由式(9)～(13)可得边界条件、路径约束和连续性条件离散形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}_0^{(1)}, t_0, \boldsymbol{X}_{N_S+1}^{(S)}, t_S) = 0, \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_j^{(s)}, \boldsymbol{U}_j^{(s)}, \boldsymbol{\tau}_j^{(s)}) \leqslant 0, \\ \boldsymbol{X}_{N_s}^{(s)} = \boldsymbol{X}_0^{(s+1)}, \\ \boldsymbol{U}_{N_s}^{(s)} = \boldsymbol{U}_0^{(s+1)}. \end{cases}$$

4 hp 自适应算法设计

4.1 迭代判据

第 s 段内节点为 $[t_0^{(s)}, t_1^{(s)}, \cdots, t_{N_s-1}^{(s)}] \in [t_{s-1}, t_s]$，取两两节点的中间点为

$$\bar{t}_j^{(s)} = \frac{t_j^{(s)} + t_{j+1}^{(s)}}{2}. \quad (j = 0,1,\cdots,N_s - 1)$$

定义 $\bar{\boldsymbol{X}}$、$\bar{\boldsymbol{U}}$ 分别为状态变量 $\boldsymbol{x}$ 和控制变量 $\boldsymbol{u}$ 在中间点处的取值，其值由拉格朗日插值多项式计算得到：

$$\bar{\boldsymbol{X}}^{(s)} = [\boldsymbol{x}(\bar{t}_0^{(s)}), \boldsymbol{x}(\bar{t}_1^{(s)}), \cdots, \boldsymbol{x}(\bar{t}_{N_s-1}^{(s)})]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{(s)} = [\boldsymbol{u}(\bar{t}_0^{(s)}), \boldsymbol{u}(\bar{t}_1^{(s)}), \cdots, \boldsymbol{u}(\bar{t}_{N_s-1}^{(s)})]^{\mathrm{T}},$$

上式带入到式(14)中，并定义 s 段内的误差矩阵 $\boldsymbol{R}^{(s)}$ 如下

$$\boldsymbol{R}^{(s)} = \left| \bar{\boldsymbol{H}}^{(s)}\, \bar{\boldsymbol{X}}^{(s)} - \frac{t_s - t_{s-1}}{2} f(\bar{\boldsymbol{X}}^{(s)}, \bar{\boldsymbol{U}}^{(s)}, \bar{\tau}_{;}^{(s)} t_{s-1}, t_s) \right|.$$

式中：$\boldsymbol{R}^{(s)}$ 为一个 $N_s \times 1$ 的矩阵；$\boldsymbol{R}^{(s)}$ 中的元素为在节点 $\bar{t}_j^{(s)}(j=0,1,\cdots,N_s-1)$ 处的误差，定义 s 段内误差的最大值[18]为

$$e_{\max}^{(s)} = \max_{j=0\cdots N_s-1} \boldsymbol{R}^s[j].$$

定义 ε_d 为容忍误差，若 $e_{\max}^{(s)} < \varepsilon_d$，表明在 s 段内，配点处状态满足精度要求，可停止该段内的迭代计算.若 $e_{\max}^{(s)} > \varepsilon_d$，则需要细分时间段或增加时间段内配点个数来减少误差，达到精度要求.当所有时间段内误差均满足要求，则停止迭代，得到最优解.

4.2 细分区间或增加配点准则

当 s 段内精度不满足要求，定义 s 段内各点曲率[16]为

$$k^{(s)}(\tau_i) = \frac{|\ddot{\boldsymbol{X}}_m^{(s)}(\tau_i)|}{|[1 + \dot{\boldsymbol{X}}_m^{(s)}(\tau_i)]^{3/2}|},$$

令

$$r_s = \frac{k_{\max}^{(s)}}{\bar{k}^{(s)}}.$$

式中 $k_{\max}^{(k)}$、$\bar{k}^{(k)}$ 分别为 s 区间内各点曲率的最大值和平均值.

定义临界值参数 $r_{\max}$，若 $r_s < r_{\max}$，表明该区间内比较平滑，可以通过增加节点个数来提高精度；若 $r_s > r_{\max}$，说明 s 段内振荡较大，需要对该区间重新划分.

4.2.1 增加节点个数计算

若 $r_s < r_{\max}$，需要增加 s 段内节点个数，增加的节点个数 N_{sf} 为

$$N_{sf} = \mathrm{ceil}(\log_{10}(e_{\max}^{(s)}) - \log_{10}(\varepsilon_d)) + 1.$$

修正后节点的数量为

$$N_s = N_{s0} + N_{sf}.$$

式中:N_{s0}为修正前节点的个数,ceil(·)为取整运算.

4.2.2　区间细分个数及位置计算

若 $r_s > r_{\max}$,对 s 段细分,子区间的数量 n_k 由如下公式计算:

$$n_k = 2 * \mathrm{ceil}(\log_{10}(e_{\max}^{(s)}) - \log_{10}(\varepsilon_d)),$$

子区间的位置通过曲率密度函数 $\rho(\tau)$ 求取[19],定义

$$\rho(\tau) = ck^{(s)}(\tau)^{1/3},$$

c 为常数,且满足

$$\int_{-1}^{1} \rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1.$$

定义节点分配函数为

$$F(\tau) = \int_{-1}^{\tau} \rho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

第 i 个子区间起点和终点分别为 τ_{i-1} 和 τ_i,满足

$$F(\tau_i) = \frac{i}{n_k}. \quad (1 \leqslant i \leqslant n_k)$$

5　仿真分析

本文以两连杆 FFSM 系统为例,分别应用 GPM 和 hp-RPM 进行轨迹规划仿真,并对两方法进行比较,系统参数见表 1,状态约束见表 2.

表 1　FFSM 系统参数

Tab.1　The FFSM parameters

Link	m_i/kg	I_i/(kg · m^2)	a_i/m	b_i/m
0	40	6.67	0.5	0.5
1	4	3.33	0.5	0.5
2	3	2.50	0.5	0.5

注:m_i、I_i 分别为第 i 个连杆的质量和惯性力矩.

表 2　状态约束

Tab.2　The state constraint

时间	q_1	q_2	$\dot{q}_1$	$\dot{q}_2$
t_0	π/14	π/19	0	0
t_f	π/3	4π/5	0	0
Max	−π	−π	−1	−1
Min	π	π	1	1

控制变量满足约束为:

$$-10 \leqslant \mu_1 \leqslant 10,$$

$$-8 \leqslant \mu_2 \leqslant 8.$$

选取目标函数各相关系数为:

$$\alpha = 0.7, \quad \beta = 0.1, \quad \gamma = 2,$$

取初始时刻节点个数 $P=10$,分段个数 $S=1$,容忍误差 $\varepsilon_d = 1\times10^{-3}$.

在 CPU 为 Inter i5-3230、操作系统 Windows7 32 位、内存 4 G 的电脑上,应用 MATLAB2014a 进行仿真实验.选取相同的初始节点个数,用 GPM 和 hp-RPM方法进行计算.计算时间见表 3,仿真结果如图 3~6 所示.

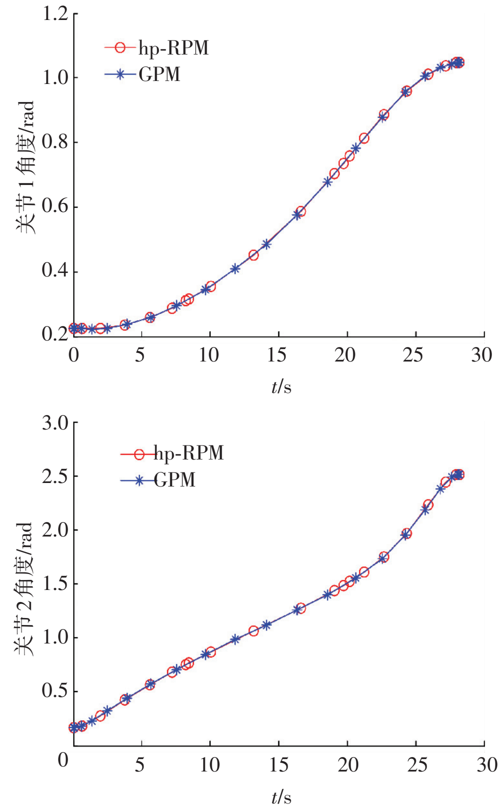

图 3　关节 1、关节 2 角度变化曲线

Fig.3　Angle change curve of joint 1 and joint 2

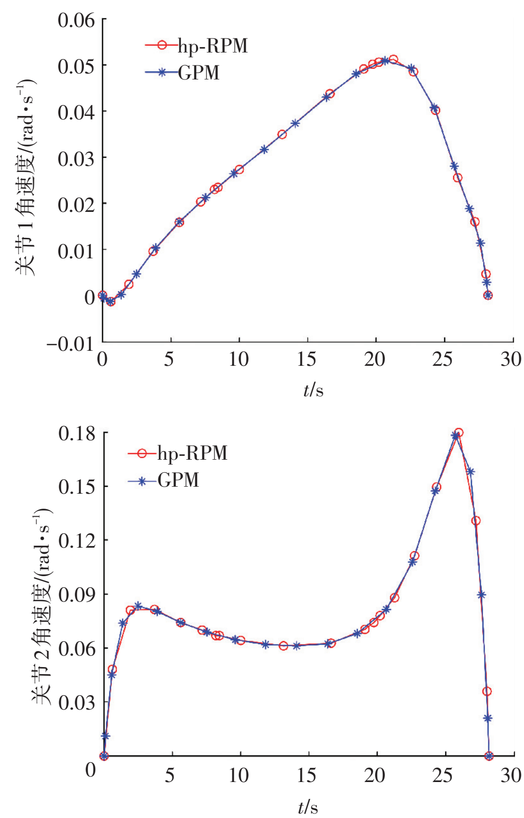

图 4　关节 1、关节 2 角速度变化曲线

Fig.4　Angle velocity change curve of joint 1 and joint 2

表 3　耗时比较

Tab.3　Comparison of time-consumtion　　s

方法	GPM	hp-RPM
消耗时间	874.3	365.7

图 3、4 为两关节角度、角速度的变化曲线，可以看出用两种方法进行轨迹规划时得到的两关节角度、角速度轨迹曲线在趋势和平滑度上是一致的.但在整个运动过程中两者的配点选取有很大差别，例如在 7、20 s 时，hp-RPM 配点个数明显多于 GPM，相对应的误差曲线在此时有明显变大的趋势，这也表明 hp-RPM 可以根据当前误差对子区间内节点个数进行重配置来减少误差.

图 5、6 为位置误差和角速度误差曲线，可以看出 hp-RPM 在求解过程中精度明显高于 GPM，在各个计算节点上的精度均满足要求；而用 GPM 进行求解时，出现精度不满足要求的情况.

观察图 5、6 位置误差曲线，可知在即将到达目标位置时，利用 hp-RPM 规划出的位置误差曲线有较大的振荡趋势，在实际应用时会对 FFSM 正常工作产生一定的影响.产生这种现象的一个重要原因是在进行节点配置时，最后一个节点没有施加控制量，导致在即将到达目标位置时系统出现不受控情况.因此，在实际设计跟踪控制器时需要对末端振荡进行充分考虑，通过对末端状态的单独控制消除影响.

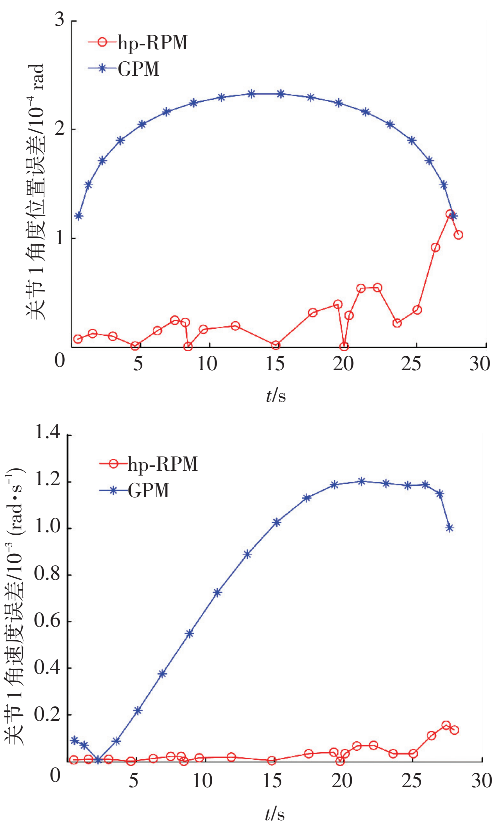

图 5　关节 1 位置和角速度误差曲线

Fig.5　Position and angular velocity error curve of joint 1

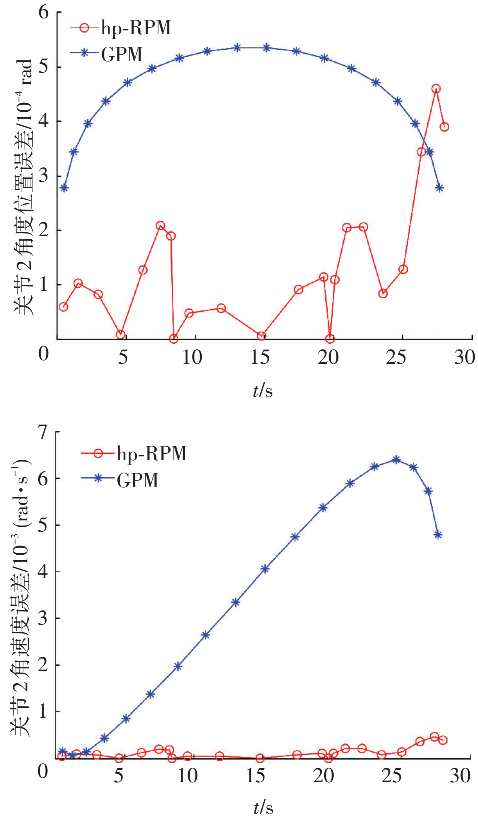

图 6　关节 2 位置和角速度误差曲线

Fig.6　Position and angular velocity error curve of joint 2

6　结　论

1) 针对普通 Gauss 伪谱法求解轨迹规划问题的缺点，本文提出了 hp-RPM 来解决 FFSM 系统点到点的轨迹规划问题.该方法通过求解每次迭代过程的误差，来决定下一次迭代时子区间及其节点个数.

2) 不同于传统的 GPM，hp-RPM 通过细分子区间避免了求解过程中出现高阶多项式，显著的减少了计算时间，从而解决了普通伪谱法中求解精度和计算效率之间的矛盾.在系统精度要求较高的情况下，hp-RPM 通过计算每次迭代的误差来决定是否继续进行迭代计算，从而保证了精度要求，有着重要的实际意义.

3) 在两连杆 FFSM 系统中对 hp-RPM 方法进行了仿真验证，仿真结果表明 hp-RPM 在计算速度上明显高于 GPM，并且在计算过程中 hp-RPM 通过改变区间及节点个数来提高计算精度.

参考文献

[1] SKAAR S B, RUOFF C F. Teleoperation and Robotics in Space [M]. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994. DOI: 10.2514/4.866333.

[2] LILLY K W, BONAVENTURA C S. A generalized formulation for simulation of space robot constrained motion [C]//Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nagoya, Japan: IEEE, 1995, 3: 2835－2840. DOI: 10.1109/

ROBOT.1995.525685.

[3] VAFA Z, DUBOWSKY S. The kinematics and dynamics of space manipulators: the virtual manipulator approach[J]. International Journal of Robotics Research, 1990, 9(4): 3-21. DOI: 10.1177/027836499000900401.

[4] LIANG Bin, XU Yangsheng, BERGERMAN M. Mapping a space manipulator to a dynamically equivalent manipulator[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1998, 120(1): 1-7. DOI: 10.1115/1.2801316.

[5] GARG D, PATTERSON M, HAGER W W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1843-1851. DOI: 10.1016/j.automatica.2010.06.048.

[6] HUANG Panfeng, XU Yangsheng. PSO-based time-optimal trajectory planning for space robot with dynamic constraints[C]// Proceedings of ROBIO'6 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. Kunming, China: IEEE, 2006: 1402-1407. DOI: 10.1109/ROBIO.2006.340134.

[7] 李适.空间机器人路径优化与鲁棒跟踪控制[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2013.
LI Shi. Path optimization and robust tracking control for spacemanipulator[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology. 2013.

[8] YOKOYAMA N, OCHI Y. Path planning algorithms for skid-to-turn unmanned aerial vehicles[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(5): 1531-1543. DOI: 10.2514/1.41822.

[9] DARBY C L, HAGER W W, RAO A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2011, 32(4): 476-502. DOI: 10.1002/oca.957.

[10] COTTRILL G C, HARMON F G. Hybrid Gauss pseudospectral and generalized polynomial chaos algorithm to solve stochastic trajectory optimization problems[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Portland, Oregon: AIAA, 2011: 6572. DOI: 10.2514/6.2011-6572.

[11] HUNTINGTO G T, BENSON D, RAO A V. A comparison of accuracy and computational efficiency of three pseudospectral methods[J]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2007. DOI: 10.2514/6.2007-6405.

[12] BENSON D A, HUNTINGTO G T, THORVALDSEN T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2006, 29(6): 1435-1440. DOI: 10.2514/1.20478.

[13] HAN Peng, SHAN Jiayuan, MENG Xiuyun. Re-entry trajectory optimization using an hp-adaptive Radau pseudospectralmethod[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2013, 227(10): 1623-1636. DOI: 10.1177/095441 0012461745.

[14] DUBOWSKY S, PAPADOPOULOS E. The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1993, 9(5): 531-543. DOI: 10.1109/ 70.258046

[15] SAHA S K. A unified approach to space robot kinematics[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12(3): 401-405. DOI: 10.1109/70.499822.

[16] HAN Peng, SHAN Jiayuan. Re-entry trajectory optimization using a multiple-interval Radau pseudospectral method[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2013, 22(1): 20-27. DOI: 10.3969/j.issn.1004-0579.2013.01.004.

[17] 刘瑞帆, 于云峰, 闫斌斌. 基于改进 hp 自适应伪谱法的高超声速飞行器上升段轨迹规划[J].西北工业大学学报, 2016, 34(5): 790-797. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2758.2016.05.008.
LIU Ruifan, YU Yunfeng, YAN Binbin. Ascent phase trajectory optimization for hypersonic vehicle based on hp-adaptive pseudospectral method[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2016, 34(5): 790-797. DOI: 10.3969/j.issn.1000-2758.2016.05.008.

[18] GARG D, HAGER W W, RAO A V. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems[J]. Automatica, 2011, 47(4): 829-837. DOI: 10.1016/j.automatica.2011.01.085.

[19] ZHAO Yiming, TSIOTRAS P. Density functions for mesh refinement in numerical optimal control[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2015, 34(1): 271-277. DOI: 10.2514/1.45852.

(编辑　张　红)