

DOI: 10.11918/j.issn.0367-6234.201706126

随机-区间混合不确定性多输出模型确认指标

赵录峰, 吕震宙, 王 璐

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘要:为解决随机和区间变量共存条件下的多输出模型确认问题,提出了一种新的模型确认指标.首先,依据概率方法和区间理论,分析了随机输入变量在实现值条件下随机-区间混合不确定性多输出模型的特点;然后,将基于马氏距离的随机不确定性多输出模型确认方法,推广到随机-区间混合不确定性因素影响下的多输出模型确认之中,定义了一种新的多输出模型确认指标.该指标运用模型输出响应量与试验输出响应量的上、下界马氏距离分布函数曲线之间的面积差异,度量随机-区间混合不确定性条件下多输出模型预测结果与试验结果之间的不一致性.最后,讨论了所提指标的数学性质,给出了指标的计算方法和步骤,通过一个数值算例和一个工程算例验证了指标的正确性与有效性.研究结果表明,当样本数据量充足时,新的模型确认指标能够有效地度量模型输出响应量与试验结果之间差异程度,正确地判断不同多输出模型的优劣,适合于随机-区间混合不确定性因素影响下的多输出模型确认问题.

关键词:模型确认;指标;随机变量;区间变量;混合不确定性;多输出模型

中图分类号: O212.4; TP391.9

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2018)04-0078-07

Validation metric for multi-output model with mixed uncertainty of random and interval variables

ZHAO Lufeng, LU Zhenzhou, WANG Lu

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aiming at dealing with the model validation issue for multi-output model with the mixture of random and interval inputs, a new model validation metric is proposed. Based on the probability method and interval theory, characteristics of multi-output model involving both random and interval inputs under the fixed random variables are analyzed. The new multi-output model validation metric is defined by extending the multi-output model validation method based on Mahalanobis distance (MD) under random inputs to multi-output model with the mixture of random and interval inputs. This metric provides a comparison between the MD cumulative distribution function (CDF) curves of the upper and lower bounds from model responses to which from experimental one, and meanwhile shows disagreement with model predictions and corresponding physical observations. Finally, estimation procedures are presented with a discussion of new metric properties and the correctness and effectiveness of the proposed metric are demonstrated by a numerical and an engineering case, respectively. Results show that: the new metric, on one hand, is able to measure the difference between system responses with experimental results under sufficient physical observations; and, on the other hand, can correctly differentiate models in worse or better accuracy.

Keywords: model validation; metric; random variable; interval variable; mixed uncertainty; multi-output model

随着仿真技术在现代工程设计中的广泛应用,模型确认已经成为国内学者的研究热点.模型确认是指从模型的用途出发,客观地评估模型在多大程度上能够准确描述真实物理世界的过程^[1-3].开展模型确认工作,首先需要建立科学合理的模型确认指标.模型确认指标是指用于度量模型预测与试验结果之间差异程度的指标^[4-5].

在实际工程中,由于模型本身、模型参数、物理试

验结果和试验数据信息等4个方面都会受到各种不确定性因素的影响,因此模型确认工作也具有一定的不确定性^[6-9].目前,不确定性条件下的模型确认方法很多.文献[10]将其分为:假设检验法^[11-12]、贝叶斯因子法^[13-15]、频率指标^[2,16]和面积指标^[17-18]等.这些方法主要适用于一维或多维独立输出模型确认,而不适合多维相关输出模型确认问题.为此,文献[19]提出了基于多维概率积分转换(probability integral transformations, PIT)的PIT面积指标和t-pooling方法,文献[20]提出了基于马氏距离(Mahalanobis distance, MD)的MD面积指标和MD-pooling方法.

已有这些方法均建立在概率方法之上,仅适合于随机不确定性模型确认问题.然而,在工程实际

收稿日期: 2017-06-22

基金项目: 国家自然科学基金(51475370);中央高校基本科研业务费专项资金(3102015BJ(II)CG009)

作者简介: 赵录峰(1973—),男,博士研究生;
吕震宙(1966—),女,教授,博士生导师

通信作者: 吕震宙, zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

中,所建的多输出模型往往既含有随机输入变量,又含有区间输入变量,这类模型称为随机-区间混合不确定性多输出模型.关于这类模型确认方法,目前还鲜有研究.在随机-区间混合不确定性多输出模型中,随机变量和区间变量之间可能相互独立,也可能存在相关性.本文所研究的随机-区间混合不确定性多输出模型,是指随机输入变量和区间输入变量共存且相互独立这类模型,运用概率理论和区间分析方法,对它的确认方法进行研究.

1 MD 面积指标

针对随机不确定性多输出模型确认问题,文献[20]提出了适用于单个确认点的 MD 面积指标.

设 $\mathbf{Y}=(Y_1, \dots, Y_m)$ 为 $m(m>1)$ 维模型随机输出向量, $\boldsymbol{\mu}$ 、 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $F_Y(y_1, \dots, y_m)$ 分别为输出向量 \mathbf{Y} 的均值向量、协方差矩阵和联合分布函数. $\mathbf{y}=(y_1, \dots, y_m)$ 为来自 $F_Y(y_1, \dots, y_m)$ 的任一样本观察值. 则 \mathbf{Y} 到 $\boldsymbol{\mu}$ 的马氏距离被定义为

$$R(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})}, \quad (1)$$

样本观察值 \mathbf{y} 到 $\boldsymbol{\mu}$ 的马氏距离为

$$r(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})}.$$

式中 \mathbf{Y} 为随机输出向量. 由式(1)可知, $R(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu})$ 为一维随机变量. 设 $R(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu})$ 的 CDF 记为 $F_R(r) = P\{R \leq r\}$, 则 $F_R(r)$ 曲线如图 1 所示.

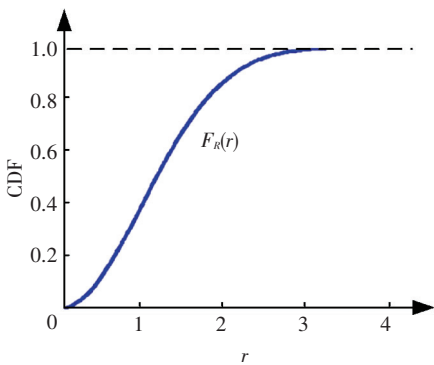


图 1 随机变量 CDF 对应的马氏距离 CDF

Fig.1 CDF of MD distribution for a random variable

由图 1 可知,输出向量 \mathbf{Y} 通过式(1)被转变成一维随机变量 $R(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu})$. 由于式(1)含有 \mathbf{Y} 的均值向量和协方差矩阵,因此 $F_R(r)$ 综合了 \mathbf{Y} 的均值向量和协方差矩阵的信息. 运用 MD 的这一性质,文献[20]提出的多维相关响应量模型确认指标为

$$d(F, S) = \int_0^\infty |F^m(r) - S^e(r)| dr. \quad (2)$$

式中: $F^m(r)$ 为多维输出模型响应量到它的均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的 MD 分布函数; $S^e(r)$ 为对应的试验响应量到模型响应量均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的经验 MD 分布函数. 式(2)

实质上表示 $F^m(r)$ 曲线和 $S^e(r)$ 曲线之间的面积差,即如图 2 中的阴影部分的面积.

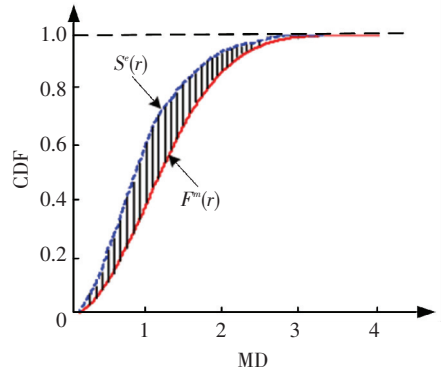


图 2 多维相关响应量模型确认的 MD 面积指标

Fig.2 MD area validation metric for models with multiple correlated responses

当模型与物理试验完全相同时,式(2)将趋于零;当模型与物理试验不一致时,且它们之间的差异越大,式(2)的计算结果也就越大. 因此,通过式(2)计算结果的大小可以评估不同多输出模型在描述真实物理过程的准确性程度.

2 混合不确定性多输出模型确认指标

2.1 随机-区间混合不确定性多输出模型

设含随机-区间混合不确定性 n_o 维输出模型的表达式定义为

$$Z_i^m = g_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (i = 1, \dots, n_o) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_{n_R})$ 为 n_R 维随机输入向量; $f_X(\mathbf{x})$ 为随机向量 \mathbf{X} 的联合概率密度函数; $f_{X_i}(x_i)$ ($i = 1, \dots, n_R$) 为第 i 维随机变量 X_i 的边缘概率密度函数; $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_I})$ 为 n_I 维区间输入向量; $[Y_j^L, Y_j^U]$ ($j = 1, \dots, n_I$) 为第 j 维区间变量 Y_j 的取值区间; Y_j^L, Y_j^U 分别为第 j 维区间变量的下、上界,且 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 相互独立. n_o 维模型输出向量 $\mathbf{Z}^m = (Z_1^m, Z_2^m, \dots, Z_{n_o}^m)$ 可通过式(3)获得.

当随机向量 \mathbf{X} 取任意一个实现值 \mathbf{x}^* 时, \mathbf{X} 的随机不确定性对输出变量的影响将会被消除,模型输出响应量的不确定性则来自区间向量 \mathbf{Y} , 这种情况下的模型输出响应量为多维区间变量,即 $\mathbf{Z}^m | (\mathbf{X} = \mathbf{x}^*) = (Z_1^m | \mathbf{x}^*, Z_2^m | \mathbf{x}^*, \dots, Z_{n_o}^m | \mathbf{x}^*)$, 其中第 k 维区间输出变量 $Z_k^m | \mathbf{x}^*$ 的取值区间可表示为 $[Z_k^{mL}, Z_k^{mU}]$ ($k = 1, \dots, n_o$), Z_k^{mL}, Z_k^{mU} 分别为第 k 维区间输出变量的下、上界. 当随机向量 \mathbf{X} 按照 $f_X(\mathbf{x})$ 在其取值范围内取全部实现值时,模型输出响应量 $\mathbf{Z}^m | \mathbf{X}$ 为 n_o 维随机区间变量,则它的上界 $\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X}$ 和下界 $\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X}$ 均为 n_o 维随机变量. 因此,随机-区间混合不确定多输出模型确认问题即转化为: \mathbf{X} 取 \mathbf{x}^*

时,模型与试验输出响应量的多维随机区间变量之间的差异程度比较.

2.2 随机-区间混合不确定性多输出模型确认指标

由上述分析可知,当 \mathbf{X} 按照它的 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 在其取值范围内取全部实现值时,模型响应量 $\mathbf{Z}^m | \mathbf{X}$ 的下、上界皆为 n_0 维随机变量. 设 $\boldsymbol{\mu}^L, \boldsymbol{\Sigma}^L$ 分别为模型响应量下界 $\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X}$ 的均值向量和协方差矩阵, 则模型响应量下界 $\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X}$ 到 $\boldsymbol{\mu}^L$ 的 MD 定义为

$$R^{mL}(\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L) = \sqrt{(\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)^T (\boldsymbol{\Sigma}^L)^{-1} (\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)}, \quad (4)$$

模型响应量上界 $\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X}$ 到 $\boldsymbol{\mu}^L$ 的 MD 定义为

$$R^{mU}(\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L) = \sqrt{(\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)^T (\boldsymbol{\Sigma}^L)^{-1} (\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)}. \quad (5)$$

设 $R^{mL}(\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L)$ 和 $R^{mU}(\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L)$ 的分布函数分别为 $F_{R^{mL}}(r) = P\{R^{mL} \leq r\}$ 和 $F_{R^{mU}}(r) = P\{R^{mU} \leq r\}$, 它们如图 3 所示.

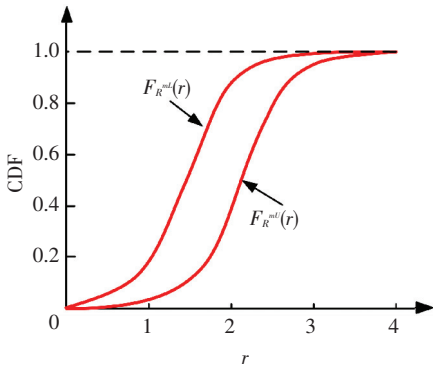


图 3 模型响应量的上下限 MD 分布函数曲线

Fig.3 The MD CDF curves of the upper and the lower bounds of the model responses

同理,相应的试验响应量下界 $\mathbf{Z}^{eL} | \mathbf{X}$ 到模型响应量下界均值向量 $\boldsymbol{\mu}^L$ 的 MD 定义为

$$R^{eL}(\mathbf{Z}^{eL} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L) = \sqrt{(\mathbf{Z}^{eL} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)^T (\boldsymbol{\Sigma}^L)^{-1} (\mathbf{Z}^{eL} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)}, \quad (6)$$

试验响应量上界 $\mathbf{Z}^{eU} | \mathbf{X}$ 到模型响应量下界均值向量 $\boldsymbol{\mu}^L$ 的 MD 定义为

$$R^{eU}(\mathbf{Z}^{eU} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L) = \sqrt{(\mathbf{Z}^{eU} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)^T (\boldsymbol{\Sigma}^L)^{-1} (\mathbf{Z}^{eU} | \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}^L)}. \quad (7)$$

设 $R^{eL}(\mathbf{Z}^{eL} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L)$ 和 $R^{eU}(\mathbf{Z}^{eU} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\mu}^L)$ 的经验分布函数分别为 $S_{R^{eL}}(r) = P\{R^{eL} \leq r\}$ 和 $S_{R^{eU}}(r) = P\{R^{eU} \leq r\}$, 它们如图 4 中的阶梯线所示.

在随机输入变量取现实值的情况下,如果所建的多输出模型与物理试验完全一致,那么模型与试验响应量上、下界的 MD 分布函数和经验 MD 分布函数曲线应该完全重合,即图 4 中的两条曲线与两条阶梯线之间阴影部分的面积应该为零.如果所建的模型与物理试验存在差异,那么模型与试验响应

量上、下界的 MD 分布函数和经验 MD 分布函数也会存在差异,且它们的差异越大,图 4 中阴影部分的面积也就越大.因此,根据模型与试验响应量上、下界的 MD 分布函数和经验 MD 分布函数曲线之间的面积大小,可以定量地评估所建模型的准确性程度.为此,本文提出的模型确认指标的表达式为

$$d(F^m, S^e) = \int_0^{+\infty} \left\{ |F_{R^{mL}}(r) - S_{R^{eL}}(r)| + |F_{R^{mU}}(r) - S_{R^{eU}}(r)| \right\} dr. \quad (8)$$

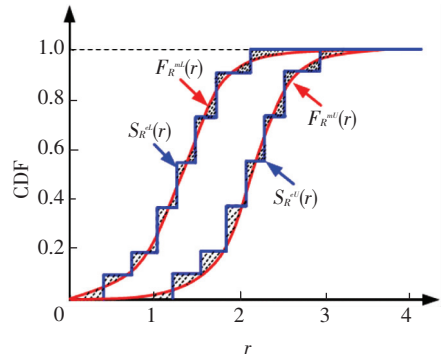


图 4 模型和试验响应量上、下界 MD 分布函数和经验 MD 分布函数

Fig.4 MD CDF and empirical MD CDF curves of the upper and the lower bounds of the model and experimental responses

2.3 指标的数学性质

对式(8)进一步分析可以看出,本文提出的新指标具有下列数学性质.

性质 1 非负性.由于式(8)的被积函数为非负函数,因此本文提出的新指标 $d(F^m, S^e)$ 也为非负数.

性质 2 对称性.由于

$$d(F^m, S^e) = \int_0^{+\infty} \left\{ |F_{R^{mL}}(r) - S_{R^{eL}}(r)| + |F_{R^{mU}}(r) - S_{R^{eU}}(r)| \right\} dr = \int_0^{+\infty} \left\{ |S_{R^{eL}}(r) - F_{R^{mL}}(r)| + |S_{R^{eU}}(r) - F_{R^{mU}}(r)| \right\} dr = d(S^e, F^m),$$

所以新指标 $d(F^m, S^e)$ 具有对称性.

性质 3 理想模型的指标值趋零性.当且仅当随机-区间混合不确定性多输出模型与物理试验完全一致时,如果 \mathbf{X} 按照 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 在其取值范围内取全部实现值,且样本量趋于无穷,则模型与试验响应量上、下界的 MD 分布函数和经验 MD 分布函数曲线重合,即 $d(F^m, S^e)$ 趋于零.

2.4 指标的求解

运用 Monte Carlo 数字模拟法,新指标的求解过程主要包括以下 7 个步骤.

步骤 1 获取模型随机输入变量的实现值.根据随机输入变量 \mathbf{X} 的联合概率密度 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$,产生样本容量为 M_R^m 的模型输入随机变量的实现值 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_R}) (i = 1, \dots, M_R^m)$.

步骤 2 获取模型区间输入变量样本.将模型的区间输入变量 $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_I})$ 在其取值区间内均匀的离散成 N_I 个样本 $\mathbf{y}_k=(y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_I})$, ($k=1, \dots, N_I$).

步骤 3 求解多输出模型响应量的区间集.对于模型的随机输入变量 \mathbf{X} 的每一个实现值 $\mathbf{x}_i=(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_R})$ ($i=1, \dots, M_R^m$), 根据区间输入变量 \mathbf{Y} 的 N_I 个样本 $\mathbf{y}_k=(y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_I})$ ($k=1, \dots, N_I$), 计算对应的模型响应量 $\mathbf{Z}^m | (\mathbf{X}=\mathbf{x}_i)$, 进而求得与 $\mathbf{X}=\mathbf{x}_i$ 对应的模型输出响应量的区间集 $[z^{mL} | \mathbf{x}_i, z^{mU} | \mathbf{x}_i]$ ($i=1, \dots, M_R^m$).

步骤 4 求解模型输出响应量上、下界的经验 MD 分布函数.依据步骤 3 求得的 M_R^m 个不同的模型输出响应量区间上、下界 $z^{mU} | \mathbf{x}_i$ 和 $z^{mL} | \mathbf{x}_i$, 计算区间下界集 $z^{mL} | \mathbf{x}_i$ ($i=1, \dots, M_R^m$) 的均值向量 $\boldsymbol{\mu}^L$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}^L$, 然后根据式(4)、(5)求解模型输出响应量区间上、下界 $\mathbf{Z}^{mU} | \mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Z}^{mL} | \mathbf{X}$ 的经验 MD 分布函数 $F_{R^{mL}}(r)$ 和 $F_{R^{mU}}(r)$.

步骤 5 求解试验输出响应量的区间集.按照 \mathbf{X} 的联合概率密度 $f_X(\mathbf{x})$ 选取样本容量为 M_R^e 的输入向量试验样本 $\mathbf{x}_j=(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_R})$ ($j=1, \dots, M_R^e$), 分别固定每个试验样本 \mathbf{x}_j , 通过试验得到与区间变量向量 \mathbf{Y} 的 N_I 个样本 $\mathbf{y}_k=(y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_I})$ ($k=1, \dots, N_I$) 对应的输出响应量观测值 $\mathbf{Z}^e | (\mathbf{X}=\mathbf{x}_j)$, 并求解对应于 $\mathbf{X}=\mathbf{x}_j$ 的试验输出响应量的区间集 $[z^{eL} | \mathbf{x}_j, z^{eU} | \mathbf{x}_j]$ ($j=1, \dots, M_R^e$).

步骤 6 求解试验输出响应量上、下界的马氏距离经验分布函数.依据步骤 5 求得的 M_R^e 个不同的试验输出响应量的区间上、下界 $z^{eU} | \mathbf{x}_j$ 和 $z^{eL} | \mathbf{x}_j$, 根据式(6)、(7)求得试验输出响应量的上、下界经验 MD 分布函数 $S_{ReU}(r)$ 和 $S_{ReL}(r)$.

步骤 7 通过式(8)计算模型确认指标 $d(F^m, S^e)$.

3 算例分析

下面通过一个数字算例和一个工程算例,验证本文所提指标的可行性和有效性.

3.1 数字算例

在本算例中,物理试验数据由式(9)产生,式中 $x \in [0, 6]$ 为区间变量, θ ($\theta = 1.5$) 为模型参数, $\varepsilon_1 \sim N(0, 0.2^2)$ 、 $\varepsilon_2 \sim N(0, 0.2^2)$ 分别为两个试验响应量的测量误差.设测量误差 ε_1 与 ε_2 之间的相关系数为 $\rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$. $\rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ 的表达式为

$$\rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\sqrt{D(\varepsilon_1)} \sqrt{D(\varepsilon_2)}}$$

选取与物理试验对应的 7 个模型(见表 1), 它

们被分为 3 组来验证新指标的可行性和有效性.

$$\begin{aligned} y_1^e(x, \theta) &= \sin(2x - 0.5\pi)\theta + \varepsilon_1, \\ y_2^e(x, \theta) &= \cos(0.25\pi x)\theta + 0.2x + \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (9)$$

表 1 3 个测试组的模型

Tab.1 Formulas of mathematical models in three test cases

测试组 编号	模型公式
第 1 组	$y_1^{m1} = y_1^e(x \in [0, 6], \theta = 1.5)$
	$y_2^{m1} = y_2^e(x \in [0, 6], \theta = 1.5), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$
	$y_1^{m2} = y_1^e(x \in [0, 6], \theta = 1.2)$
第 2 组	$y_2^{m2} = y_2^e(x \in [0, 6], \theta = 1.2), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$
	$y_1^{m3} = y_1^e(x \in [0, 6], \theta = 1.2)$
第 3 组	$y_2^{m3} = y_2^e(x \in [0, 6], \theta = 1.2), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = -0.6$
	$y_1^{m4} = y_1^e(x \in [0, 6], \theta \sim N(1.5, 0.2^2))$
	$y_2^{m4} = y_2^e(x \in [0, 6], \theta \sim N(1.5, 0.2^2)), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$
第 2 组	$y_1^{m5} = y_1^e(x \in [0, 6], \theta \sim N(1.5, 0.4^2))$
	$y_2^{m5} = y_2^e(x \in [0, 6], \theta \sim N(1.5, 0.4^2)), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$
第 3 组	$y_1^{m6} = y_1^e(x \in [2, 6], \theta = 1.5)$
	$y_2^{m6} = y_2^e(x \in [2, 6], \theta = 1.5), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$
	$y_1^{m7} = y_1^e(x \in [2, 4], \theta = 1.5)$
第 7	$y_2^{m7} = y_2^e(x \in [2, 4], \theta = 1.5), \rho_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0.5$

3.1.1 测试 1

第 1 组测试包括 3 个模型.模型 1 与式(9)相同,是一个完全正确的模型;模型 2 与式(9)中的参数 θ 有差异;模型 3 与式(9)相比,不仅参数 θ 发生了变化,而且试验响应量测量误差的相关系数也发生了变化.由此可推断出模型 1 优于模型 2,模型 2 优于模型 3.这组测试的目的是在随机-区间混合不确定性多输出模型的参数或相关性存在差异的情况下,讨论所建指标的可行性和有效性.

在本组测试中,模型的随机输入变量的样本容量 M_R^m 为 10 000, 试验随机输入变量的样本容量 M_R^e 为 1 000, 区间输入变量样本量 N_I 为 300, 按照本文提出的指标求解方法和步骤,计算第 1 组测试中的 3 个模型的指标值,计算结果见表 2.

表 2 数字算例的模型确认指标计算结果

Tab.2 Model validation metric results of the numerical test case

模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5	模型 6	模型 7
0.085 7	2.472 8	5.440 9	0.451 0	0.725 7	0.926 6	3.143 5

由表 2 可以看出,模型 1 的指标值最小(0.085 7), 模型 2 次之(2.472 8), 而模型 3 的指标值最大(5.440 9).通过 3 个指标的计算结果,可以清晰地判断出模型 1 优于模型 2,模型 2 优于模型 3,这一判断结论与定性分析的结论完全一致.此外,依据指标的数学性质的性质 3 可知,模型 1 的指标值应该收

敛于 0,但表 2 中模型 1 的指标值为 0.085 7,并不为零.产生这一问题的原因为:在指标求解过程中, $F_{RmL}(r)$ 、 $F_{RmU}(r)$ 、 $F_{RmL}(r)$ 和 $F_{RmU}(r)$ 均是通过有限样本估计所得,这必然会产生一定的误差.如果进一步增大样本容量, $F_{RmL}(r)$ 、 $F_{RmU}(r)$ 、 $F_{RmL}(r)$ 和 $F_{RmU}(r)$ 的计算结果将会趋于理论值,这样指标的计算结果就会趋于零.由此可见,对于参数或相关性存在差异的随机-区间混合不确定性多输出模型,所建指标能够有效地度量不同模型与物理试验之间的差异程度,正确地判断不同模型之间的优劣.

3.1.2 测试 2

第 2 组测试包括 2 个模型.与试验模型相比,模型 4 和模型 5 均将参数 θ 作为随机变量.模型 4 和模型 5 中参数 θ 的均值与试验模型的参数 θ 相同,皆为 1.5,但模型 4 中 θ 的方差比模型 5 的小.由此可推断出模型 4 优于模型 5.第 2 组测试的目的是在模型参数的分布函数存在很小差异时,验证所建指标是否能够有效判断不同模型之间的优劣.

同理,可求得第 2 组测试中的 2 个模型的指标值,计算结果见表 2.由表 2 可知,模型 4 的指标值(0.451 0)小于模型 5 的指标值(0.725 7),由此可判断出模型 4 优于模型 5,这一判断结论与定性分析的结论完全吻合.因此,对于参数的分布函数存在很小差异的随机-区间混合不确定性多输出模型,所建的指标也能够正确地判断不同模型之间的优劣.

3.1.3 测试 3

第 3 组测试也包括 2 个模型.与试验模型相比,模型 6 和模型 7 中随机输入变量与式(9)完全相同,但区间变量发生了变化.模型 6 中变量 x 的区间下限大于式(9)中 x 的区间下限,模型 7 中区间变量 x 的区间上限小于模型 6 中区间变量 x 的区间上限.因此模型 6 优于模型 7.第 3 组测试的目的是在模型区间变量的取值区间发生变化时,验证所建指标是否能够有效判断不同模型之间的优劣.

同理,可求得第 3 组测试中的 2 个模型的指标值,计算结果见表 2.由表 2 可以看出,模型 6 的指标值(0.926 6)小于模型 7 的指标值(3.1435),由此

可以判断出模型 6 优于模型 7,这一判断结论与定性分析的结论完全吻合.因此,对于区间变量的取值区间存在差异的随机-区间混合不确定性多输出模型,所建指标也能够正确地判断不同模型之间的优劣.

3.2 工程算例

如图 5 所示的矩形截面悬臂梁,自由端承受集中力 $F \in [1\ 000, 1\ 500]$,截面宽度 $b = 50\text{ mm}$,截面厚度 $h = 37\text{ mm}$,梁的长度 $l \sim N(2, 0.02^2)$,弹性模量 $E \sim N(206.8, 16^2)$.输出响应量为梁固定端 A 点的正应力 σ_A (GPa)、自由端 B 点处截面的转角 θ_B (rad) 和挠度 y_B (m),它们试验数据由式(10)产生,它们的测量误差分别为 $\varepsilon_\theta \sim N(0, 0.003^2)$ 、 $\varepsilon_y \sim N(0, 0.003^2)$ 、 $\varepsilon_\sigma \sim N(0, 0.01^2)$.

$$\begin{cases} \sigma_A = \frac{6Fl}{bh^2} + \varepsilon_\sigma, \\ y_B = \frac{4Fl^3}{Ebh^3} + \varepsilon_y, \\ \theta_B = \frac{6Fl^2}{Ebh^3} + \varepsilon_\theta. \end{cases} \quad (10)$$

为节约试验费用,假设建立了 6 个的悬臂梁模型,这些模型的形式与式(10)相同,但在输入变量存在差异,具体见表 3.为了便于研究,这 6 个模型被分为两组.第 1 组包括模型 1、模型 2 和模型 3,第 2 组包括模型 4、模型 5 和模型 6.与物理试验相比,第 1 组中 3 个模型的区间输入变量的取值区间与试验模型相同,但输入随机变量的分布函数的参数相互之间存在一定差异,第 2 组中 3 个模型的随机变量的分布函数与物理试验相同,但区间变量的取值区间相互不同.由表 3 中数据可以判断出,在第 1 组模型中,模型 1 优于模型 2,模型 2 优于模型 3;在第 2 组模型中,模型 4 优于模型 5,模型 5 优于模型 6.

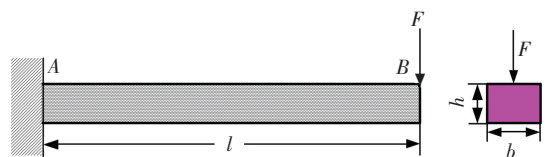


图 5 悬臂梁结构

Fig.5 Diagram of the cantilever beam

表 3 悬臂梁输入变量的参数分布

Tab.3 Distribution parameters of inputs of the cantilever beam

变量	E/GPa	$\varepsilon_\theta/\text{rad}$	ε_y/m	$\varepsilon_\sigma/\text{GPa}$	l/m	F
模型 1	$N(206.8, 16^2)$	$N(0, 0.003^2)$	$N(0, 0.003^2)$	$N(0, 0.001^2)$	$N(2, 0.02^2)$	[1 000, 1 500]
模型 2	$N(180.3, 16^2)$	$N(0, 0.003^2)$	$N(0, 0.003^2)$	$N(0, 0.001^2)$	$N(2, 0.02^2)$	[1 000, 1 500]
模型 3	$N(180.3, 16^2)$	$N(0, 0.003^2)$	$N(0, 0.003^2)$	$N(0, 0.001^2)$	$N(2, 0.03^2)$	[1 000, 1 500]
模型 4	—	—	—	—	—	[1 100, 1 500]
模型 5	—	—	—	—	—	[1 200, 1 500]
模型 6	—	—	—	—	—	[1 300, 1 400]

同算例 1 相似, M_R^m 为 10 000, M_R^c 为 1 000, N_l 为 500, 这两组模型确认指标计算结果见表 4。

由表 4 可以看出, 对于第 1 组模型, 模型 1 的指标值(0.065 2)小于模型 2 的指标值(1.197 2), 模型 2 的指标值(1.197 2)小于模型 3 的指标值(4.713 9), 由此可判断出: 模型 1 优于模型 2, 模型 2 优于模型 3; 对于第 2 组模型, 由指标计算结果可判断出: 模型 4 优于模型 5, 模型 5 优于模型 6。由此可见, 这两组模型指标值的判断结论与定性分析结论完全吻合, 从而再次验证了本文所提指标的可行性和有效性。

表 4 悬臂梁模型确认指标计算结果

模型 1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5	模型 6
0.065 2	1.197 2	4.713 9	0.853	2.486	4.234 1

3.3 模型确认指标的风险分析

虽然上述分析结果表明, 在样本充足的情况下, 新指标能够有效解决随机-区间混合不确定性多输出模型确认问题。但是样本量匮乏时, 运用新指标进行模型确认存在一定的风险。下面以算例 2 的第 1 组模型为例, 分两种情况进行讨论。

3.3.1 M_R^m 固定, M_R^c 变化

在保持 N_l 为 500 情况下, 当 M_R^m 发生变化时, d 随 M_R^m 的变化情况如图 6 所示。

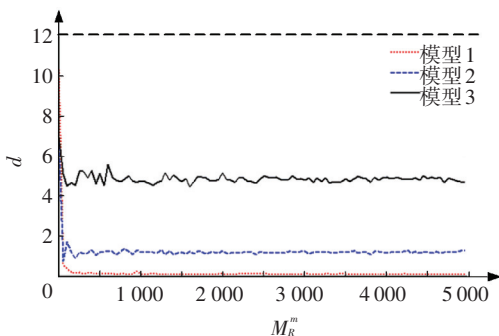


图 6 模型确认指标 d 随 M_R^m 的变化曲线

Fig.6 Model validation metric d versus the M_R^m

由图 6 可以看出, 随着 M_R^m 的增大, 指标值 d 迅速减小, 波动幅度也趋于减小。当 $M_R^m < 50$ 时, 由于求解模型响应量区间上、下限 MD 分布函数时存在较大误差, 使得 3 个模型的指标值很不稳定, 并存在相互重叠的现象。因此, 在 M_R^m 较少的情况下, 运用新指标对不同模型的优劣进行评判, 可能存在错判、误判风险。但当 $M_R^m > 100$ 时, 指标值 d 开始趋于收敛。这一现象表明随着 M_R^m 的不断增大, 模型响应量区间上限界的 MD 分布函数的计算结果趋于它们的理论解。由此可见, 运用新指标进行模型确认时, 要尽量获得充足的模型输入变量样本, 以减少由于计算原因而导致的错判误判风险。

3.3.2 M_R^m 固定, M_R^c 变化

在保持 N_l 为 500 的情况下, 当 M_R^c 发生变化时, d 随 M_R^c 的变化情况如图 7 所示。

由图 7 可以看出, 随着 M_R^c 的增大, d 同样迅速减小并趋于收敛。当 $M_R^c < 100$ 时, 由于在求解试验响应量区间上、下限的经验 MD 分布函数时存在较大误差, 使得 3 个模型的指标值很不稳定。因此, 在试验样本较少的情况下, 运用新指标对不同模型的优劣进行评判, 会存在一定的错判、误判风险。但当 $M_R^c > 100$ 时, d 开始趋于稳定并收敛, 并能够客观地评估不同模型与试验的一致性。

由上述分析可知, 为了控制新指标的错判、误判风险, 在模型确认时, 首先要保证能够获得有效的样本。由于不同领域的科学问题所建的多输出模型是不同的, 对应的模型确认指标达到稳定收敛状态所需的有效样本量也是不同的。因此, 在模型确认时, 有效样本量的大小要根据具体问题来确定。当样本量取使指标值达到稳定收敛状态的样本量时, 就能够防止错判、误判问题的发生, 保证所选择的随机-区间混合不确定性多输出模型的正确性。

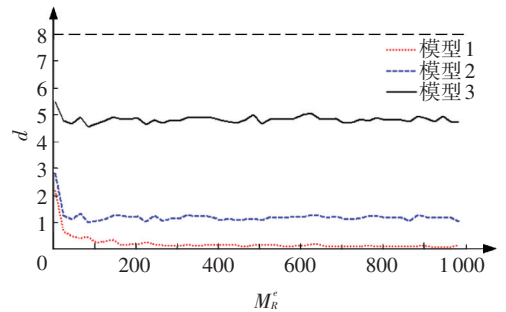


图 7 模型确认指标 d 随 M_R^c 的变化曲线

Fig.7 Model validation metric d versus the M_R^c

4 结 论

1) 对于随机-区间混合不确定性下的多输出模型, 当它的随机输入变量按照其联合概率密度在其取值范围内取所有实现值时, 模型输出响应量则为多维随机区间变量。因此, 随机-区间混合不确定性多输出模型确认的实质上就是比较模型与试验输出响应量的多维随机区间变量之间的差异程度。

2) 运用概率方法和区间理论, 将随机不确定性多输出模型的 MD 面积指标, 推广到随机-区间混合不确定性多输出模型确认中。将模型与试验输出多维随机区间变量上、下界的 MD 分布函数和经验 MD 分布函数之间的面积差异, 定义为新指标, 解决了随机和区间变量共存条件下多输出模型在描述真实物理试验时的准确性评估方法问题。

3) 研究结果表明, 在样本充足的情况下, 所提

的新指标在随机-区间混合不确定性多输出模型确认方面可行有效,但它也有一定的局限性.当样本量较少时,运用新指标对不同模型的优劣进行评判时,存在一定的错判误判风险.

参考文献

- [1] OBERKAMPF W L, SINDIR M N, CONLISK A T. Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations: AIAA-G-077-1998 [R]. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [2] OBERKAMPF W L, BARONE M F. Measures of agreement between computation and experiment: validation metrics [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 217(1): 5-36. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.03.037.
- [3] OBERKAMPF W L, ROY C J. Verification and validation in scientific computing [M]. New York, USA: Cambridge University Press, 2010.
- [4] MESSER M, PANCHAL J H, KRISHNAMURTHY V, et al. Model selection under limited information using a value of information based indicator [J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(12): 121008(1-13). DOI: 10.1115/1.4002751.
- [5] XIONG Ying, CHEN Wei, TSUI K L, et al. A better understanding of model updating strategies in validating engineering models [J]. Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 189(15/16): 1327-1337. DOI: 10.1016/j.cma.2008.11.023.
- [6] BAYARRI M J, BERGER J O, PAULO R, et al. A framework for validation of computer models [J]. Technometrics, 2007, 49(2): 138-154. DOI: 10.1198/004017007000000092.
- [7] KENNEDY M C, O'HAGAN A. Bayesian calibration of computer models [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 2001, 63(3): 425-464. DOI: 10.1111/1467-9868.00294.
- [8] ARENDT P D, APLEY D W, CHEN Wei, et al. Improving identifiability in model calibration using multiple responses [J]. Journal of Mechanical Design, 2012, 134(10): 100909(1-9). DOI: 10.1115/1.4007573.
- [9] NECPÁLOVÁ M, ANEX R P, FIENEN M N, et al. Understanding the DayCent model: calibration, sensitivity, and identifiability through inverse modeling [J]. Environmental Modelling & Software, 2015, 66: 110-130. DOI: 10.1016/j.envsoft.2014.12.011.
- [10] LIU Yu, CHEN Wei, ARENDT P, et al. Toward a better understanding of model validation metrics [J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(7): 071005(1-13). DOI: 10.1115/1.4004223.
- [11] BURANATHITI T, CAO Jian, CHEN Wei, et al. Approaches for model validation: methodology and illustration on a sheet metal flanging process [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering-Transactions of the ASME, 2006, 128(2): 588-597. DOI: 10.1115/1.1807852.
- [12] REBBA R, MAHADEVAN S. Validation of models with multivariate output [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91(8): 861-871. DOI: 10.1016/j.res.2005.09.004.
- [13] 张保强, 陈国平, 郭勤涛. 模型确认热传导挑战问题求解的贝叶斯方法 [J]. 航空学报, 2011, 32(7): 1202-1209. DOI: 11-1929/V.20110402.1751.002.
ZHANG Baoqiang, CHEN Guoping, GUO Qintao. Solution of model validation thermal challenge problem using a Bayesian method [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(7): 1202-1209. DOI: 11-1929/V.20110402.1751.002.
- [14] REBBA R, MAHADEVAN S. Model predictive capability assessment under uncertainty [J]. AIAA Journal, 2006, 44(10): 2376-2384. DOI: 10.2514/1.19103.
- [15] MAHADEVAN S, REBBA R. Validation of reliability computational models using Bayes networks [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2005, 87(2): 223-232. DOI: 10.1016/j.res.2004.05.001.
- [16] OBERKAMPF W L, TRUCANO T G. Verification and validation in computational fluid dynamics [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2002, 38(3): 209-272. DOI: 10.1016/S0376-0421(02)00005-2.
- [17] FERSON S, OBERKAMPF W L. Validation of imprecise Probability models [J]. International Journal of Reliability and Safety, 2009, 3(1): 3-22. DOI: 10.1504/IJRS.2009.026832.
- [18] FERSON S, OBERKAMPF W L, GINZBURG L. Model validation and predictive capability for the thermal challenge problem [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(29/30/31/32): 2408-2430. DOI: 10.1016/j.cma.2007.07.030.
- [19] LI Wei, CHEN Wei, JIANG Zhen, et al. New validation metrics for models with multiple correlated responses [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2014, 127: 1-11. DOI: 10.1016/j.res.2014.02.002.
- [20] ZHAO Lufeng, LU Zhenzhou, YUN Wanying, et al. Validation metric based on Mahalanobis distance for models with multiple correlated responses [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2017, 159: 80-89. DOI: 10.1016/j.res.2016.10.016.

(编辑 张红)