

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201803114

# 一种自由曲面自适应网格生成方法

王奇胜<sup>1</sup>, 高博青<sup>1</sup>, 吴慧<sup>2</sup>

(1. 浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310058; 2. 浙江财经大学 公共管理学院, 杭州 310018)

**摘要:** 为了在造型复杂的自由曲面上生成规整、流畅的结构化网格, 提出一种自适应网格生成方法. 首先, 用4条边界线圈定网格划分区域; 接着, 将一对不相连的边界线各自分为 $n+1$ 段并连接相对的分段点, 得到 $n$ 条曲线; 然后, 将这 $n$ 条曲线和同向的边界线分别划分为 $m+1$ 段, 并以多段线连接同一相对位置上的分段点, 得到另一个方向上的 $m$ 条曲线. 轮流对这 $m$ 条曲线和 $n$ 条曲线进行分段、连线等操作, 优化各自的形态, 直到分段点位置基本不变; 最后, 将分段点按照一定的规律连接成网格. 在网格生成过程中, 通过调整曲线的分段原则, 可以实现网格大小对边界线或曲面形态的自适应; 通过设定多种点阵的连接规律, 可以生成多种样式的网格. 案例分析表明: 该方法操作难度小、生成速度快、适用范围广, 生成的网格线条流畅、形状规整、形式多样, 能较好地满足建筑需求.

**关键词:** 自由曲面; 网格结构; 网格生成; 自适应网格; 网格调控

**中图分类号:** TU311.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2018)12-0150-06

## Adaptive grid generation over free-form surfaces

WANG Qisheng<sup>1</sup>, GAO Boqing<sup>1</sup>, WU Hui<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;  
2. College of Public Administration, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** To generate regular and fluent structured grids over free-form surfaces, especially complex multiple surfaces for architectural design, an adaptive grid generation method was proposed. First, the surface region to be meshed was determined by four boundary curves. Second, a pair of disconnected boundary curves was divided into  $n+1$  segments respectively and  $n$  lines were acquired by connecting pairs of segment points on the same relative positions. Third, these  $n$  curves and the other pair of boundary curves were divided into  $m+1$  segments respectively, and  $m$  polylines on the other direction were attained by connecting these segment points on the same relative locations. These two sets of curves were divided and reconnected in turn iteratively until the locations of segment points did not change obviously. Finally, the  $(m+2) \times (n+2)$  segment points were connected into a grid in a desired pattern. During the generation, the grid size was adaptive to boundary conditions or surface shapes by adjusting the rules of curve dividing, and various grids was generated by defining different rules of point connections. The case study indicates that this method is easy to operate, fast to generate, and widely applicable, and the resulting grids have fluent lines, regular shapes, and various patterns, which can meet architectural demands.

**Keywords:** free-form surface; grid structure; grid generation; adaptive grid; grid control

随着计算机辅助设计技术的突破和建造工艺的提升, 越来越多的自由曲面建筑出现在世界各地. 该类建筑通常具有独特的造型需求, 常规的网格结构难以表达, 而已有的自由曲面网格设计方法, 要么耗时耗力, 要么适用范围有限. 为复杂曲面生成符合建筑要求的网格, 是现代空间结构研究的难点与热点. Owen<sup>[1]</sup>总结了经典的网格划分算法, 如 Delaunay 三角法<sup>[2]</sup>、波前法<sup>[3]</sup>、映射法<sup>[4]</sup>及其组合<sup>[5-6]</sup>等. 但这

些方法在自由曲面应用中有局限性, 无法满足建筑上对网格规整性、流畅性等方面的要求. 近些年, 在空间结构领域, 自由曲面网格生成的研究, 取得了一定进展. Su 等<sup>[7]</sup>在波前法中引入主应力线来控制网格走向, 生成均匀的三角形网格, 但网格的流畅性较差. 危大结等<sup>[8]</sup>和潘炜等<sup>[9]</sup>将曲面近似展开并结合平面网格生成方法, 实现自由曲面的网格划分, 但网格质量依赖于曲面近似展开的效果, 易产生映射畸变. Zheleznyakova 等<sup>[10]</sup>和 Wang 等<sup>[11]</sup>在曲面参数域内利用物理类比和运动模拟优化节点分布, 再结合 Delaunay 法和映射法生成空间网格. 但这两种方法只适用于参数化曲面, 且难以保证网格的流畅性. Gao 等<sup>[12]</sup>提出了基于引导线偏移的网格划分方法,

收稿日期: 2018-03-22

基金项目: 国家自然科学基金(51678521, 51778558)

作者简介: 王奇胜(1991—), 男, 博士研究生;

高博青(1963—), 男, 教授, 博士生导师

通信作者: 高博青, bqgao@zju.edu.cn

但只保证了网格在一个方向上的流畅性. 针对以上算法存在网格流畅性欠佳、样式单一、适用范围小等问题, 本文提出一种自由曲面的自适应网格划分方法, 并通过多个复杂曲面的网格生成算例, 说明了方法的有效性.

## 1 几何基础

### 1.1 曲面表示

非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-splines, 简称 NURBS)<sup>[13]</sup>, 是建筑上常用来表达自由曲面的技术. NURBS 曲面是由节点矢量、控制点、权值确定的双参数曲面, 能表达任意造型的曲面. 但对于复杂的造型, 单个 NURBS 曲面 (称为单重曲面) 难以表达或不易建模, 需要由多个 NURBS 曲面联合表示, 称为多重曲面, 见图 1.

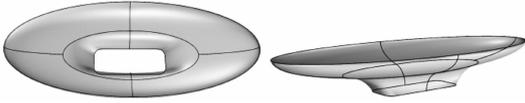


图 1 由 6 个曲面组成的多重曲面

Fig. 1 A multiple NURBS surface including six surfaces

### 1.2 曲线分段

#### 1) 等长划分

等长划分是将曲线按给定段数分成相同长度的分段. 长度的取值可分为弧长 (曲线段长度) 和弦长 (空间距离).

#### 2) 按长度占比划分

已知各个分段的长度占总长度的比例  $e_i$ . 由式 (1) 可求得第  $i$  段曲线的长度  $l_i$ . 已知各段的长度, 可求得各个分段点的实际位置, 实现曲线的按长度占比划分.

$$l_i = Le_i, \quad (1)$$

式中  $L$  为曲线总长度.

#### 3) 等比划分

等比划分是将曲线按给定段数划分成长度呈比例变化的分段. 根据等比公式 (2) ~ (3), 可知各分段的长度占比  $e_i$ , 再按长度占比划分曲线, 进而实现曲线的等比划分.

$$L = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \quad (2)$$

$$e_i = \frac{a_i}{L} = \frac{(1-r)r^{i-1}}{1-r^n}. \quad (3)$$

式中  $a_i$  是第  $i$  段长度,  $r$  是比例系数.

## 2 网格评价

针对建筑上常用的四边形网格和三角形网格, 采用网格单元形状质量系数评价其规整性, 采用节

点流畅度指标评价其流畅性.

### 2.1 规整性评价

三角形或四边形的网格单元的形状质量系数为

$$q_s = \begin{cases} 4\sqrt{3} \frac{S}{l_A^2 + l_B^2 + l_C^2}, & \text{三角形;} \\ 4\sqrt{\frac{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle BCD}}{(l_{AB}^2 + l_{AD}^2) \cdot (l_{AB}^2 + l_{BC}^2)}} \times \\ 4\sqrt{\frac{S_{\triangle CDA} \cdot S_{\triangle ABD}}{(l_{BC}^2 + l_{CD}^2) \cdot (l_{CD}^2 + l_{AD}^2)}}, & \text{四边形.} \end{cases} \quad (4)$$

式中  $q_s \in (0, 1]$ , 且  $q_s$  越大, 单元的形状质量越好<sup>[14]</sup>.

网格整体的规整度由所有网格单元的形状质量系数的平均值  $\bar{q}_s$  和标准差  $\sigma_s$  评定.  $\bar{q}_s$  越大, 说明网格的形状质量越高;  $\sigma_s$  越小, 说明网格的形状差异越小. 当  $\bar{q}_s$  越大且  $\sigma_s$  越小时, 网格的规整性越好.

### 2.2 流畅性评价

对于由三角形或四边形组成的结构化网格, 所有的内部节点连接着相同数量的杆件, 其节点流畅度定义为

$$q_v = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^g (\beta_{jk} - \pi)^2}{g} + \frac{\sum_{j=1}^g (\beta_j - \beta_{j+g})^2}{g}}. \quad (5)$$

式中: 对于三角形网格  $g = 3$ , 四边形网格  $g = 2$ ;  $\beta_{jk}$  是第  $j$  边和第  $k$  边的夹角, 且  $k = j + g$ , 而  $\beta_j$  是第  $j$  边和第  $j + 1$  (当  $j + 1 > 2g$  时,  $j + 1$  改为 1) 边的夹角, 如图 2 所示.  $q_v$  越小, 说明节点的相对边弯折和相对角差异越小, 即节点越流畅. 当  $q_v = 0$  时, 节点最流畅, 如图 3 所示的 4 种节点.

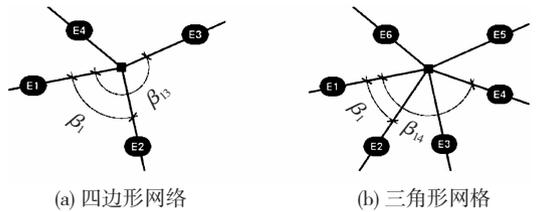


图 2 夹角示意

Fig. 2 Angles diagram

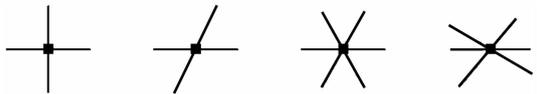


图 3  $q_v = 0$  的节点

Fig. 3 Nodes with  $q_v = 0$

网格整体的流畅度由网格内部节点的流畅度平均值  $\bar{q}_v$  评定.  $\bar{q}_v$  越小, 网格流畅性越好.

## 3 网格生成

建筑上造型复杂的曲面通常由多个 NURBS 曲面联合表示, 即多重曲面. 由于多重曲面的各个子曲面有独立的映射关系, 而且子曲面逐个展开不能

保证内部边界的吻合,已有的基于 NURBS 映射技术或曲面展开技术开发的网格划分方法<sup>[9, 10, 15]</sup>都难以用于多重曲面的网格划分.为此,提出了与曲面

表达方式无关的网格生成方法,可用于单重曲面和多重曲面的网格划分,具体步骤如下(以图 4(a)中的曲面  $S_1$  为例):

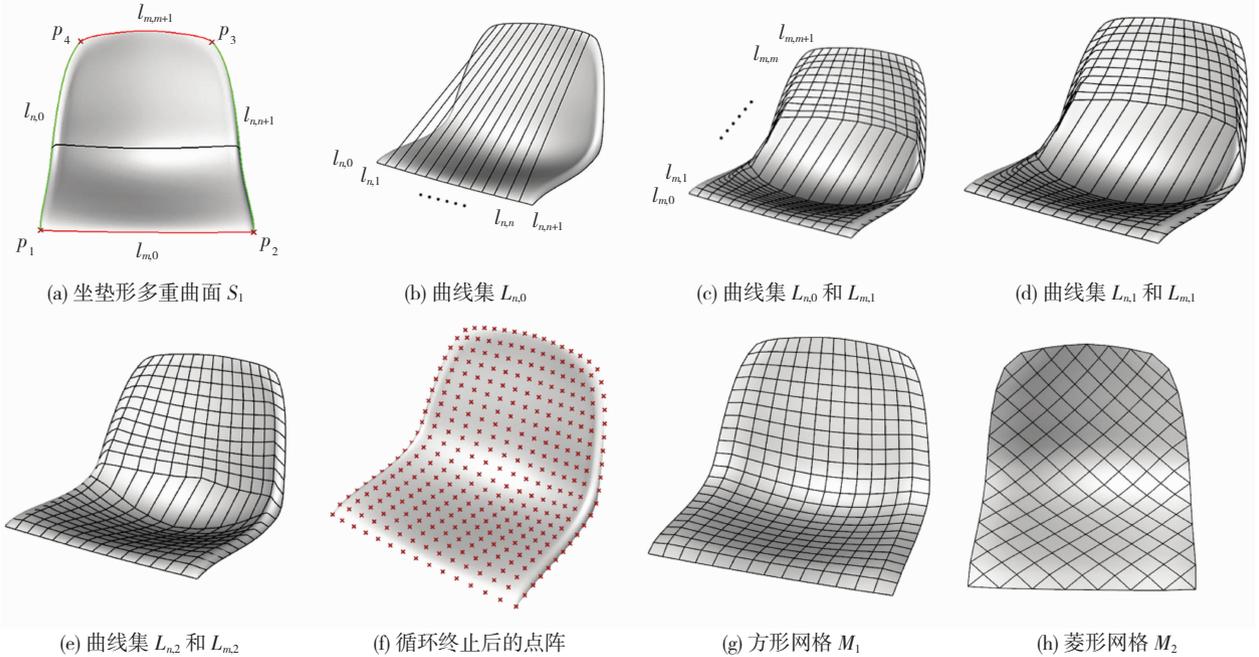


图 4 网格生成的各阶段示意

Fig. 4 Stages of grid generation

### 3.1 前处理

#### 1) 确定网格划分区域

读入曲面模型,对边界线进行分割或合并,得到 4 条曲线组成的网格生成区域  $A$ . 考虑到网格的规整性要求,最好保证这 4 条曲线中任意两条相连曲线的走势近似垂直.

#### 2) 设置网格生成参数

设定主方向插值曲线数  $m$ ,次方向插值曲线数  $n$ ,曲线的分段原则,输出的网格样式等. 曲面  $S_1$  的算例中,设定横向为主方向, $m = 20, n = 13$ ,采用等弧长划分,输出方形网格和菱形网格.

### 3.2 布置网格点

1) 将主方向边界线  $l_{m,0}$  和  $l_{m,m+1}$  分别划分为  $n + 1$  段,连接相同编号的分段点,得到  $n$  条曲线. 将这  $n$  条曲线和两条次方向边界线  $l_{n,0}, l_{n,n+1}$  作为初步的次方向网格曲线,记为  $L_{n,0}$ ,见图 4(b).

2) 将次方向网格曲线  $L_{n,0}$  划分为  $m + 1$  段,然后将分段点拉取到曲面上相应的最近点,接着将拉取后编号相同的分段点依次连接成  $m$  条曲线. 这  $m$  条曲线和两条主方向边界线构成了主方向网格曲线,记为  $L_{m,1}$ ,见图 4(c).

3) 类似地,划分主方向网格曲线  $L_{m,1}$  为  $n + 1$  段,再拉取分段点到曲面上,并依次连接同一编号的分段点,得到  $n$  条曲线. 这  $n$  条曲线和两条次方向边界线构造成了次方向网格曲线,记为  $L_{n,1}$ ,见图 4(d).

4) 对以上两步进行循环,即利用新得到的主方向曲线  $L_{m,k}$ ,生成新的次方向曲线  $L_{n,k}$  ( $k$  为循环次数),反之亦然(图 4(e)). 根据一次循环前后各网格点的移动距离是否足够小或者循环次数是否到达上限,判断是否结束循环.

5) 循环终止后,曲线  $L_{m,k}$  或  $L_{n,k}$  的分段点组成  $(m + 2) \times (n + 2)$  的点阵,即为所求网格点,见图 4(f).

上述分段点和网格线的编号满足以下关系:对于分段点  $p_i^{t,j}$ ,上标  $t, j$  表示该点所在的曲线为  $l_{t,j}$ ,下标  $i$  为该点的编号,编号相同即指  $i$  相同的点;将编号相同的点  $\{p_i^{t,j}, j = 0, 1, \dots, t + 1\}$  按  $j$  的大小依次连接,得到曲线  $l_{s,i}$ ;在第  $k$  次循环中,曲线集  $\{l_{s,i}, i = 0, 1, \dots, s + 1\}$  构成了  $L_{s,k}$ ;  $t, s = m$  或  $n$  且  $t \neq s$ .

### 3.3 后处理

将网格点按照特定的规律进行拓扑连接,得到期望的曲面网格样式,如方形网格  $M_1$  (图 4(g)) 和菱形网格  $M_2$  (图 4(h)). 再计算网格的杆件长度、单元形状质量系数和节点流畅度,进行规整性和流畅性的评价,如表 1 所示. 网格  $M_1$  和  $M_2$  的  $\bar{q}_s, \bar{q}_v$  都在 9.7、0.178 左右,表明网格的规整性和流畅性较好.

后续可以在一定的范围内调整  $m, n$  的取值,重新按照上述方法生成多组网格,并根据各网格的形状质量系数、节点流畅度和建筑要求,选取最满意的网格作为最终的网格.

表 1 网格评价

Tab. 1 Grid evaluation

曲面	网格	$\bar{l}/m$	$\sigma_l^2/m^2$	$\bar{q}_s$	$\sigma_s^2$	$\bar{q}_v/\text{rad}$
坐垫形曲面 $S_1$	方形网格 $M_1$	11.30	1.06	0.976	$5.65 \times 10^{-2}$	0.176
	菱形网格 $M_2$	16.50	4.07	0.962	$3.32 \times 10^{-1}$	0.180
	基本网格 $M_3$	5.03	2.23	0.804	$9.83 \times 10^{-2}$	0.180
曲面 $S_2$	边界适应网格 $M_4$	4.75	3.25	0.853	$4.60 \times 10^{-2}$	0.174
	全局适应网格 $M_5$	4.66	3.72	0.885	$5.65 \times 10^{-2}$	0.176
环形曲面 $S_3$	方形网格 $M_6$	2.90	0.53	0.994	$5.06 \times 10^{-3}$	0.288
阳光谷曲面 $S_4$	映射法网格 $M_7$	3.69	9.17	0.828	$2.23 \times 10^{-2}$	0.092
	本法网格 $M_8$	3.73	2.15	0.988	$1.90 \times 10^{-4}$	0.137
蝶形曲面 $S_5$	三角形网格 $M_9$	6.22	8.51	0.849	$1.14 \times 10^{-2}$	0.199
	四边形网格 $M_{10}$	7.53	14.50	0.845	$2.39 \times 10^{-1}$	0.220

### 4 网格调控

通过调整上述算法中的分段原则,实现网格大小的调控,使网格大小与边界条件或曲面形态相适应,从而改善网格的规整性。

#### 4.1 边界自适应

倘若一对边界线的长度相差较大,采用上述方法生成的网格规整性较差。例如,图 5(a) 给出的曲面采用上述算法生成的网格  $M_3$ ,如图 5(b) 所示,其形状质量系数均值  $\bar{q}_s$  仅 0.8。为此,调整算法中的曲线分段原则,将等长划分改为等比划分,其他步骤不变,实现网格大小对边界长度的自适应。曲线等比分段的比值  $r$  为:

$$R = \frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}, \quad (6)$$

$$r = \sqrt[n-1]{R}, \quad (7)$$

式中:  $R$  为相对边界线的长度比,划分曲线  $L_{m,k}$  时,  $R = \frac{l_{n,n+1}}{l_{n,0}}$ , 而划分曲线  $L_{n,k}$  时,  $R = \frac{l_{m,m+1}}{l_{m,0}}$ ;  $a_1$  是靠近  $l_{n,0}$  或  $l_{m,0}$  分段的长度。

由此生成的网格  $M_4$  见图 5(c)。由表 1 可知,调整后的网格形状质量系数均值较之前提升了 6.6%, 达到 0.853, 说明通过在算法中考虑边界线的长度关系,改进了网格的规整性。

#### 4.2 全局自适应

对于形态较为复杂的曲面,采用等长原则或等

比原则生成的网格,其规整性可能都难以满足要求。为此,调整算法中的曲线分段原则,根据  $e_{n,ji}$  和  $e_{m,ij}$  分别对曲线  $l_{n,j}$  和  $l_{m,i}$  进行按相对位置的曲线划分,而算法中的其他步骤不变,实现网格大小对曲面形态全局的自适应,其中  $e_{n,ji}$  和  $e_{m,ij}$  为:

$$e_{n,ji} = \frac{l_{m,i} + l_{m,i+1}}{\sum_{i=0}^m (l_{m,i} + l_{m,i+1})}, i \in [0, m], \quad (8)$$

$$e_{m,ij} = \frac{l_{n,j} + l_{n,j+1}}{\sum_{j=0}^n (l_{n,j} + l_{n,j+1})}, j \in [0, n]. \quad (9)$$

式中:  $e_{n,ji}$  为曲线  $l_{n,j}$  上第  $i$  段长度占曲线总长的比例;  $e_{m,ij}$  为曲线  $l_{m,i}$  上第  $j$  段长度占曲线总长的比例。

图 6 给出了分别采用基本方法、边界自适应调整和全局自适应调整生成的网格。从图中可以明显看出,前两种网格在边界附近较为规整,但在曲面内部“细腰”处较不规整,而第三种网格整体上都较为规整。再对曲面  $S_2$  进行考虑全局自适应的网格生成,得到的网格  $M_5$  如图 7 所示。结合表 1 可知,网格  $M_5$  的形状质量系数进一步提升到 0.885, 较网格  $M_3$  和  $M_4$  分别提高了 10.1% 和 4.8%。

由以上分析可知,经全局适应调整后,网格大小对曲面形态有了更好的适应,网格的规整性有了明显的提高。

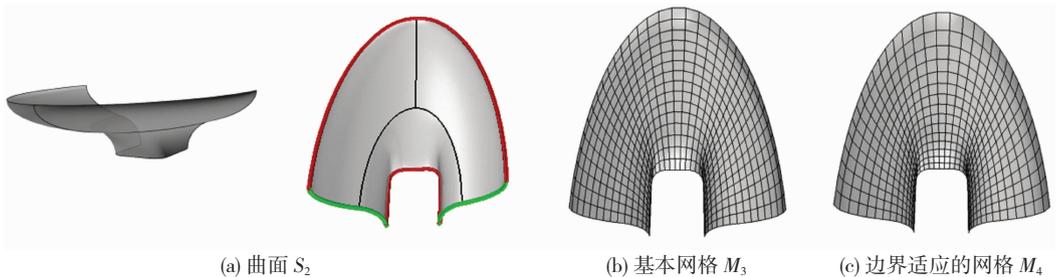


图 5 边界适应调整前后的网格对比

Fig. 5 Grid comparison before and after adjustment of boundary adaptation

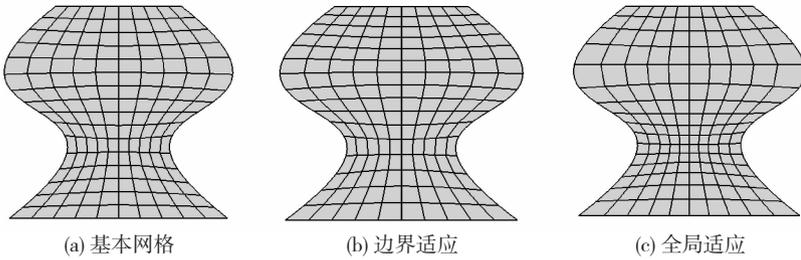


图 6 “细腰”形曲面的网格

Fig. 6 Grids for a surface with “a slender waist”

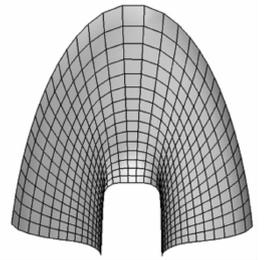


图 7 全局适应的网格  $M_s$

Fig. 7 Global adaptive grid  $M_s$

### 5 环形曲面处理

以上算法主要针对由 4 条边界线圈定的曲面区域,而对于仅有两条边界的环形曲面需要做一些局部的调整.以图 8(a)中的曲面为例,先在曲面上画一条连接两条边界线的曲线  $C$ (图 8(a)中的竖向绿线),再将曲面看成有两条边界线在  $C$  处重合的四

边曲面,且以不重合的两条边界线为主方向边界线,其他步骤基本不变,生成由主方向  $m + 2$  条曲线和次方向  $n + 1$  条曲线相交而成的  $(m + 2) \times (n + 1)$  的点阵,最后按规律将环形点阵连接成网格,如图 8 所示.上述过程中,曲线的分段和点阵的连接需要在算法实现上做局部调整,使其适配环形曲面.

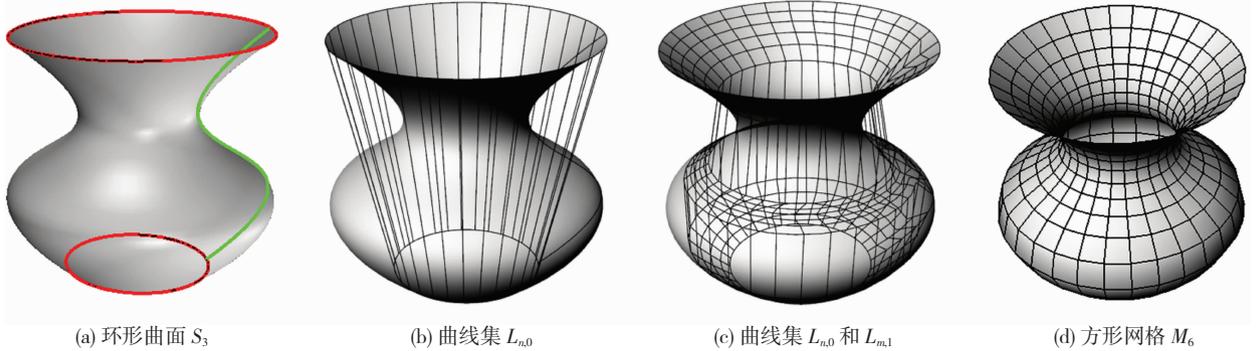


图 8 环形曲面的网格生成

Fig. 8 Grid generation for a toroidal surface

### 6 算例分析

已建成的世博轴阳光谷是比较有代表性的自由曲面建筑,如图 9(a)所示,其网格具有较好的规整性,但网格内存在多个奇异点,即以该点为节点的杆件数目不为 6 的点.这些奇异点破坏了网格整体的流畅性,降低了建筑美感.基于阳光谷建筑造型,建立相应的曲面模型(图 9(b)),其顶部近似长轴

100 m、短轴 80 m 的椭圆,底部近似长轴 30 m、短轴 27 m 的椭圆,高度 40 m,分别采用映射法和本法进行网格划分.由图 9(c)、(d)和表 1 可知,映射法划分的网格不存在奇异点,网格流畅性较好( $\bar{q}_v = 0.092$ ),但网格的规整性明显较差( $\bar{q}_s = 0.828$ ).而本法生成的网格兼顾了流畅性和规整性,达到了两者的协调统一,更符合建筑审美的要求,其  $\bar{q}_s = 0.988$ ,相较映射法提高了 19.3%.

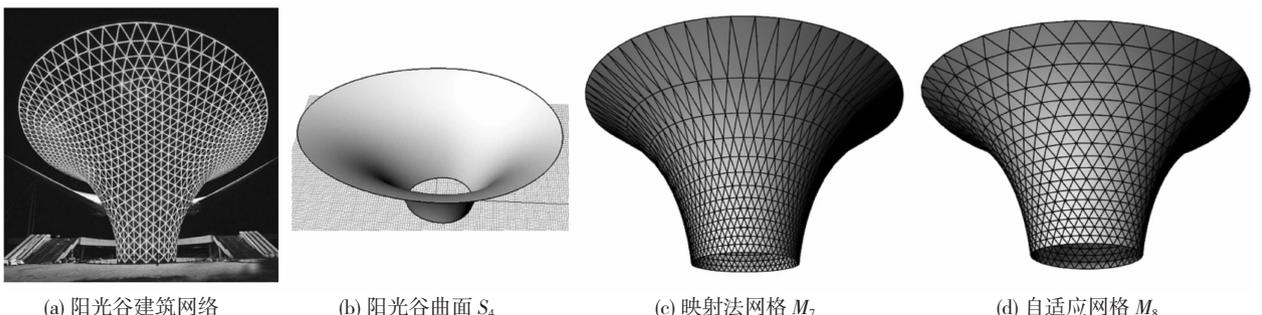


图 9 阳光谷曲面的网格生成

Fig. 9 Grid generation for the Sun Valley

另一个算例是图 1 所示的碟形曲面,其最大跨度 250 m,宽 100 m,高 33 m. 该曲面由 5 个子曲面组成,映射法难以适用. 在曲面上拟合一条连接两条边界线的曲线,构造适合本法的边界条件,如图 10(a)

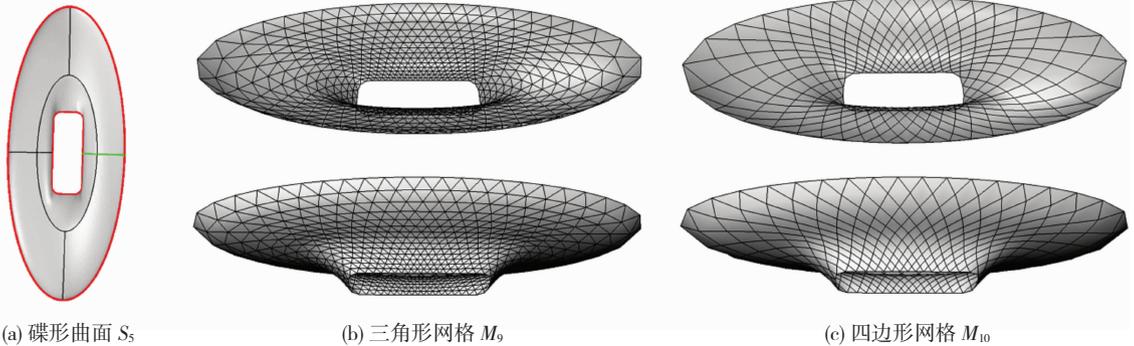


图 10 碟形曲面的网格生成

Fig. 10 Grid generation for a dish surface

## 7 结 论

本文针对多重曲面提出了一种以规整性和流畅性为目标的网格划分方法. 通过一系列的几何操作,如曲线分段、分段点连接等,实现了三角形或四边形网格的快速生成;通过调整曲线的分段原则,实现网格大小对曲面形态的自适应;通过调整分段和连线规律,使算法能适用于环形曲面和生成多种样式的网格. 算例表明,本法自动化程度高,运算速度快,生成的网格线条流畅、形状规整,无映射变形,符合建筑审美的要求,为网格结构的设计提供了有用的工具.

但需要说明的是,本法的第一步需要以 4 条曲线构造网格划分区域,并且为了保证网格的规整性,要求这 4 条曲线中任意两条相连曲线的走势近似垂直. 而对于非常复杂的曲面,难以构造合适的网格划分区域,导致生成的网格质量较差,甚至方法失效.

## 参 考 文 献

[1] OWEN S. A survey of unstructured mesh generation technology [C]// 7th International Meshing Roundtable. Berlin: Springer-Verlag, 1998: 239

[2] WANG B, KHOO B C, XIE Z Q, et al. Fast centroidal Voronoi Delaunay triangulation for unstructured mesh generation [J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2015, 280(5): 158. DOI:10.1016/j.cam.2014.11.035

[3] LO S H. Dynamic grid for mesh generation by the advancing front method[J]. Computers & Structures, 2013, 123(1): 15. DOI: 10.1108/02644409810208516

[4] CUILI RE J C. An adaptive method for the automatic triangulation of 3D parametric surfaces[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(2): 139. DOI:10.1016/s0010-4485(97)00085-7

[5] 熊英,胡于进,赵建军. 基于映射法和 Delaunay 方法的曲面三角网格划分算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(1): 56

XIONG Ying, HU Yujin, ZHAO Jianjun. An algorithm of surface triangulation based on mapping and Delaunay method[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(1): 56. DOI:10.3321/j.issn:1003-9775.2002.01.013

所示. 再采用本法生成网格大小自适应的三角形网格  $M_9$  和四边形网格  $M_{10}$ , 如图 10 所示. 网格  $M_9$  和  $M_{10}$  具有较好的规整性和流畅性, 其形状质量系数约 8.5, 节点流畅度指标约 0.21 (表 1).

[6] FREY P J. 3D Delaunay mesh generation coupled with an advancing-front approach [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1998, 157(1): 115. DOI:10.1016/s0045-7825(97)00222-3

[7] SU Liang, ZHU Shunlai, XIAO Nan, et al. An automatic grid generation approach over free-form surface for architectural design [J]. Journal of Central South University, 2014, 21(6): 2444. DOI:10.1007/s11771-014-2198-7

[8] 危大结,舒赣平. 自由曲面网格的划分与优化方法[J]. 建筑结构, 2013(19): 48

WEI Dajie, SHU Ganping. Mesh generation and optimization method for free-form surface grid[J]. Building Structure, 2013, 43(19): 48. DOI:10.19701/j.jzjg.2013.19.011

[9] 潘炜,吴慧,李铁瑞,等. 基于曲面展开的自由曲面网格划分[J]. 浙江大学学报(工学版), 2016(10): 1973

PAN Wei, WU Hui, LI Tierui, et al. Grid generation on free-form surface based on surface flattening [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2016, 50(10): 1973. DOI:10.3785/j.issn.1008-973X.2016.10.018

[10] ZHELEZNYAKOVA A L. Molecular dynamics-based triangulation algorithm of free-form parametric surfaces for computer-aided engineering[J]. Computer Physics Communications, 2015, 190: 1. DOI:10.1016/j.cpc.2014.12.018

[11] WANG Qisheng, GAO Boqing, LI Tierui, et al. A triangular mesh generator over free-form surfaces for architectural design [J]. Automation in Construction, 2018, 93: 280. DOI: 10.1016/j.autcon.2018.05.018

[12] GAO Boqing, LI Tierui, MA Teng, et al. A practical grid generation procedure for the design of free-form structures [J]. Computers & Structures, 2017(10): 196. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.10.006

[13] PIEGL L, TILLER W. 非均匀有理 B 样条[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社, 2010: 86

[14] 丁慧, 罗尧治. 自由形态网壳结构网格生成的等参线分割法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2014, 48(10): 1795

DING Hui, LUO Yaozhi. Isoparametric line dividing grid generation method for free-form lattice shells [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2014, 48(10): 1795. DOI: 10.3785/j.issn.1008-973X.2014.10.012

[15] 王奇胜,李铁瑞,吴慧,等. 基于映射技术和双向等分的自由曲面网格生成方法[J]. 建筑结构学报, 2018(7): 18

WANG Qisheng, LI Tierui, WU Hui, et al. Grid generation for free-form surface based on mapping technique and bidirectional equal-division[J]. Journal of Building Structures, 2018(7): 18. DOI: 10.14006/j.jzjgxb.2018.07.003