

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201712038

Bennett 单元阵列可展机构的动力学分析

智常建,王三民,李剑锋,李博,彭麒安

(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 为分析 Bennett 单元阵列可展机构的几何特性、运动学特性和动力学特性,建立通用的 Bennett 单元阵列可展机构的运动学和动力学分析模型. 采用拆解法将 Bennett 单元阵列可展机构中的单元机构分成 4 个空间串联开链机构;根据开链机构的特性,引入坐标变换法结合螺旋理论建立 Bennett 单元阵列可展机构的运动学分析模型,用虚功原理法将各空间串联开链机构组装在一起,构建动力学分析模型和动力学分析方法;以 4×4 Bennett 单元阵列可展机构为例分析其运动学和动力学,并用仿真和实验来验证所建立的动力学分析模型和动力学分析方法. 结果表明:算例中的 Bennett 单元阵列可展机构在其运动范围内运动平稳,对角线上的单元机构距离驱动单元愈远,其驱动角的角速度和角加速度变化范围越大. 广义力矩的变化比较平缓,在其运动范围内不会引起较大冲击. 仿真结果、实验结果与运动学和动力分析模型计算结果吻合较好,说明该运动学和动力学分析模型和方法是准确的,可以用来指导 Bennett 单元阵列可展机构的构型设计、轨迹规划和动力系统参数的选定等.

关键词: Bennett 机构;可展机构;动力学分析;螺旋理论;虚功原理

中图分类号: TH113.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2019)01-0134-08

Dynamic analysis of Bennett unit array deployable mechanism

ZHI Changjian, WANG Sanmin, LI Jianfeng, LI Bo, PENG Qi'an

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China)

Abstract: To study the geometrical, kinematic characteristic and dynamic characteristic of Bennett unit array deployable mechanism, the decomposition method is used to disassemble a unit mechanism of the deployable mechanism into 4 spatial serial open-chain mechanisms, and according to its characteristic, the kinematic analysis model of Bennett unit array deployable mechanism is set up by the transformation of coordinates method combining with screw theory. And then, all spatial serial open-chain mechanisms are assembled by the virtual principle to build the dynamics analysis model by which the kinematic and dynamic of a 4×4 Bennett unit array deployable mechanism are studied, and simulations and experiments are carried out to testify the validity of this model. Results show that the deployable mechanism in the example can move smoothly and steady in their motion range. The farther the units on diagonal is away from the driving unit, the greater the variation range of angular velocity and acceleration of its driving angular will be. Since the generalized driving force moment changes gradually, it won't cause a greater impact in the motion range. The simulation results, the experimental results and the model calculation results tend to be identical, and this proves that these kinematic and dynamic analysis models are accurate.

Keywords: Bennett linkage; deployable mechanism; dynamic analysis; screw theory; virtual principle

Bennett 机构是典型的空间过约束机构,可实现复杂运动规律,且承载能力强. 许多空间过约束机构都是以 Bennett 机构为基础构建的,例如 Goldberg 5R 和 6R 机构、Myard 机构等^[1]. Bennett 机构可以用来构建多种几何形式的可展机构,例如拱形^[1-2]、抛物柱面^[3]、圆柱形^[4]等. Bennett 单元阵列可展机构刚性好,可以应用到航空航天、应急救援和医疗器

械等领域,应用潜力巨大^[2-4].

运动学和动力学的研究一直以来都是机构学的研究热点,大多数研究主要集中在单环空间机构和并联机构上^[5-10]. Zhi 等^[5]研究了 Bennett 机构的运动学和动力学. Tsai、Zhao、贾晓辉、Kalani 和 Xin 等^[6-10]分别以不同的并联机构为对象研究了动力学问题. 可展机构动力学主要集中在平面单元机构组成的可展机构^[11-14],有关空间机构组成的可展机构动力学研究比较少. 孙宏图等^[11]研究了正方形可展机构的运动学和动力学. Sun 等^[12]研究了剪式单元机构组成的空间可展机构的运动学和动力学. 李博等^[13-14]研究了平面剪式阵列可展机构的动力学,并

收稿日期: 2017-12-07

基金项目: 国家自然科学基金(51175422)

作者简介: 智常建(1984—),男,博士研究生;

王三民(1960—),男,教授,博士生导师

通信作者: 王三民, wangsam@nwpu.edu.cn

分析了运动副间隙耦合对其动力学的影响. 动力学建模的方法主要包括牛顿-欧拉法、拉格朗日法、凯恩法和虚功原理法等, 这些方法各有各的优势和适用范围^[7-8, 15-16]. 虚功原理法把整个机构作为一个整体, 无需计算各运动副的约束力. Bennett 单元阵列可展机构具有多闭环和过约束的特性, 因此它的动力学分析模型建立比较复杂, 目前尚未见到有关 Bennett 单元阵列可展机构的动力学建模与分析方面的公开研究成果.

本文采用拆解法将可展机构中的各单元分解成多个串联开链机构. 采用坐标变换法和螺旋理论分析了各串联开链机构的运动学, 然后采用虚功原理将各串联开链机构组装在一起, 建立了 Bennett 单元阵列可展机构的动力学分析模型. 以 4×4 的 Bennett 单元阵列可展机构为例, 分析了其运动学和动力学. 该方法适用范围比较广, 对多种空间机构组成的可展机构的运动学和动力学分析具有借鉴意义.

1 Bennett 机构

Bennett 机构是由 4 个轴线不平行的运动副连接而成的空间四杆机构, 相对的边长相等, 结构简图见图 1(a). 为了方便表示 Bennett 单元阵列可展机构, 采用 Chen^[1]的方法把 Bennett 机构看作一个长方形来对其进行简化, 具体见图 1(b).

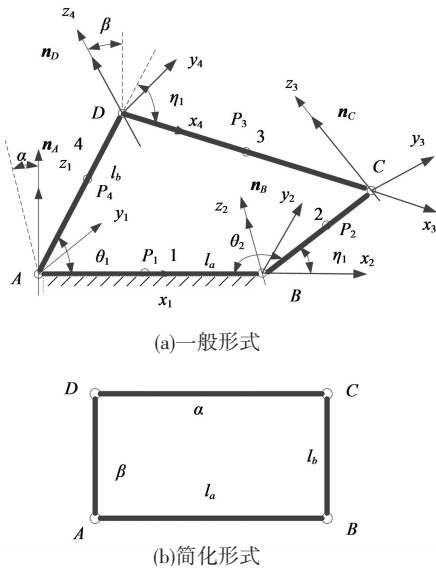


图 1 Bennett 机构

Fig.1 Bennett linkage

杆 AB 作为机架, n_A 、 n_B 、 n_C 与 n_D 分别为运动副 A、B、C 和 D 的轴线方向单位向量, 分别垂直平面 DAB、ABC、BCD 和 CDA. 以 A 点为原点, 杆 AB 所在的直线为 x 轴, 运动副 A 的轴线为 z 轴, 建立笛卡尔坐标系 A- $x_1y_1z_1$, 简称坐标系 1, 本文以编号表示坐标系. 以同样的方法建立图 1 中的其他 3 个坐标系:

B- $x_2y_2z_2$ 、C- $x_3y_3z_3$ 和 D- $x_4y_4z_4$. n_A 与 n_B 、 n_C 与 n_D 的夹角都为 α , n_B 与 n_C 、 n_D 与 n_A 的夹角为 β . Bennett 机构满足下面两个几何条件^[5]

$$l_1 = l_3 = l_a, \quad l_2 = l_4 = l_b, \\ \frac{\sin \alpha}{l_a} = \pm \frac{\sin \beta}{l_b}.$$

由上述几何条件可以得到 $\triangle DAB \cong \triangle BCD$ 和 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, 进一步可得 $\angle DAB = \angle BCD = \theta_1$ 和 $\angle ABC = \angle CDA = \theta_2$, θ_1 和 θ_2 被称为 Bennett 机构的内角. 杆 BC 与 x 轴正向夹角为 η_1 . 为了便于表示, 将 θ_1 称为 Bennett 机构的输入角, θ_2 称为 Bennett 机构的内输出角, η_1 称为 Bennett 机构的外输出角, η_1 和 θ_2 满足: $\eta_1 = \pi - \theta_2$. 由文献[5]可得

$$\eta_1 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-f_2(\theta_1) - \sqrt{f_2^2(\theta_1) - f_1(\theta_1)f_3(\theta_1)}}{f_1(\theta_1)} \right). \quad (1)$$

式中:

$$f_1(\theta_1) = (l_a/l_b - 1)(\cos \theta_1 + 1), \\ f_2(\theta_1) = \cos \alpha \sin \theta_1, \\ f_3(\theta_1) = (l_a/l_b + 1)(\cos \theta_1 - 1).$$

两个坐标系之间的变换包括两种: 转动变换矩阵 R 和平移向量 d . 坐标系 2 到坐标系 1 的变换矩阵为

$$T_{12} = \begin{bmatrix} R_{12}(\alpha) & d_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

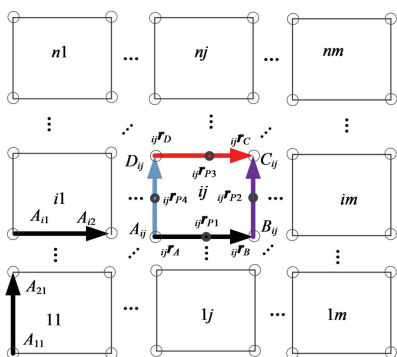
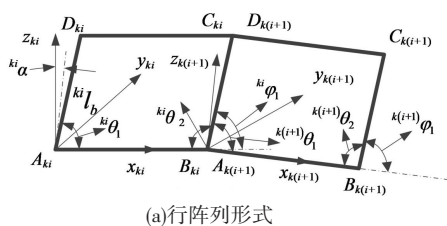
式中 $R_{12}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$

Bennett 机构中其他相邻的坐标系之间的变换矩阵 T_{23} 、 T_{14} 以及 T_{43} 都可以按照类似的方法得到.

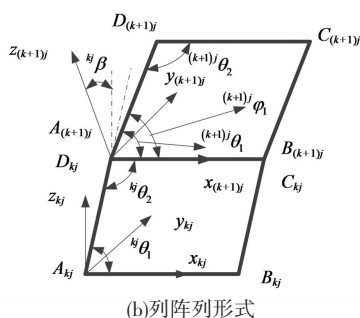
2 Bennett 单元阵列可展机构的运动学和动力学

2.1 Bennett 单元阵列可展机构

相邻的 Bennett 机构单元可以通过共享连杆和运动副的方法连接在一起构成大型的可展机构, 称之为 Bennett 单元阵列可展机构. 此类可展机构中, 最常见的是由 $n \cdot m$ 个相同的 Bennett 机构构成的 n 行 m 列可展机构, 称为 $n \times m$ 阵列可展机构, 其结构简图见图 2. 图 2 中, Bennett 单元阵列可展机构的最基本形式是由两个 Bennett 机构通过共享杆组成的, 有两种组成方式: 一种是行阵列形式, 见图 3(a); 一种是列阵列形式, 见图 3(b).

图 2 $n \times m$ Bennett 单元阵列可展机构Fig.2 $n \times m$ Bennett unit array deployable mechanism

(a)行阵列形式



(b)列阵列形式

图 3 相邻 Bennett 机构单元之间的坐标系

Fig.3 Coordinate system of adjacent Bennett linkage units

共享杆是组合机构中两个单元共同拥有的构件,图 3(a)中 $B_{ki}C_{ki}$ 就是行阵列机构中单元 ki 和单元 $k(i+1)$ 的共享杆. Bennett 单元阵列可展机构的相邻单元之间的坐标变换矩阵是其运动学和动力学分析的基础,建立图 3 中的 4 个坐标系,可以得到 Bennett 单元阵列可展机构两种基本形式的坐标变换矩阵

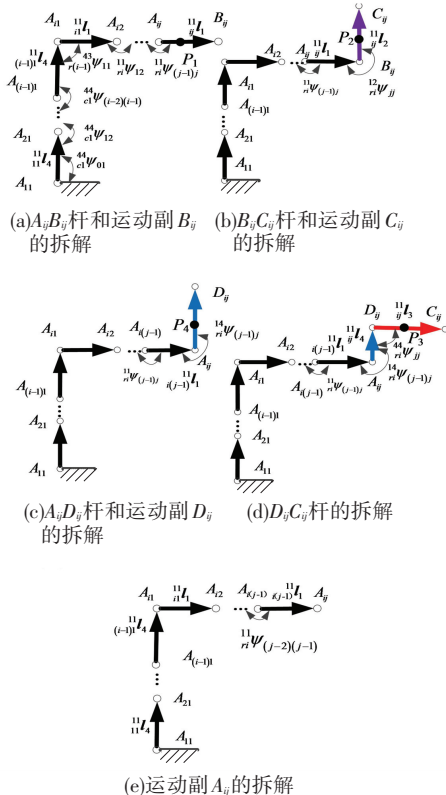
$${}^k_R T_{i(i+1)} = \begin{bmatrix} {}^k_R \mathbf{R}_{i(i+1)}({}^{ki}\delta, {}^{ki}\alpha) & {}^k d_{i(i+1)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^j_C T_{k(k+1)} = \begin{bmatrix} {}^j_C \mathbf{R}_{k(k+1)}({}^{kj}\theta, {}^{kj}\beta, {}^{kj}\varphi_1) & {}^j d_{k(k+1)} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

式中: ${}^k_R \mathbf{R}_{i(i+1)}({}^{ki}\delta, {}^{ki}\alpha)$ 为坐标系 $k(i+1)$ 到坐标系 ki 的转动变换矩阵, ${}^{ki}\delta = {}^{k(i+1)}\theta_1 - {}^{ki}\varphi_1$, ${}^k d_{i(i+1)}$ 为坐标系 $k(i+1)$ 到坐标系 ki 的平移向量, ${}^j_C \mathbf{R}_{k(k+1)}({}^{kj}\theta, {}^{kj}\beta, {}^{kj}\varphi_1)$ 为坐标系 $(k+1)j$ 到坐标系 kj 的转动变换矩阵, ${}^j d_{k(k+1)}$ 为坐标系 $(k+1)j$ 到坐标系 kj 的平移向量.

2.2 Bennett 单元阵列可展机构的运动学分析

将 $n \times m$ 的 Bennett 单元阵列可展机构第 i 行 j 列的单元机构编号为 ij . ij 中的杆件可以看作一个空间串联开链机构的末端. 由图 2 可以看出, ${}^{11}_i \mathbf{r}_A$ 有多种表达式,即可展机构中的一个杆可以有多种拆解路径,本文选择第 1 列各单元的杆 AD 和第 i 行各单元的 AB 进行拆解即按照图 2 中黑色粗线和箭头所示的路线拆解. 具体的拆解路径只会影响表达式,不会影响最终的分析结果. 单元 ij 中各杆和各运动副的拆解路径如图 4 所示.

图 4 单元 ij 各杆和各运动副的拆解路径Fig.4 Disassembly path of all links and all kinematic pairs of the unit ij

由图 4 可以得到各运动副在全局坐标系 11 中的位置向量分别为

$${}^{11}_i \mathbf{r}_A = {}^{11}_i \mathbf{l}_4 + \dots + {}^{11}_{(i-1)} \mathbf{l}_4 + {}^{11}_i \mathbf{l}_1 + \dots + {}^{11}_{i(j-1)} \mathbf{l}_1,$$

$${}^{11}_{ij} \mathbf{r}_B = {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_A + {}^{11}_{ij} \mathbf{l}_1,$$

$${}^{11}_{ij} \mathbf{r}_C = {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_A + {}^{11}_{ij} \mathbf{l}_1 + {}^{11}_{ij} \mathbf{l}_2,$$

$${}^{11}_{ij} \mathbf{r}_D = {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_A + {}^{11}_{ij} \mathbf{l}_4.$$

${}^{pq}_{hk} \mathbf{l}_e$ 为第 h 行 k 列的单元机构中的杆 e 在坐标系 pq 中的位置向量.

由图 2 和图 4 可知, 单元 ij 中各杆的质心 P_1 、 P_2 、 P_3 和 P_4 分别为杆 $A_{ij}B_{ij}$ 、 $B_{ij}C_{ij}$ 、 $D_{ij}C_{ij}$ 和 $A_{ij}D_{ij}$ 的中点,它们在全局坐标系 11 中的位置向量:

$${}^{11}_{ij} \mathbf{r}_{P1} = ({}^{11}_{ij} \mathbf{r}_A + {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_B)/2, \quad {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_{P2} = ({}^{11}_{ij} \mathbf{r}_B + {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_C)/2,$$

$${}^{11}_{ij} \mathbf{r}_{P3} = ({}^{11}_{ij} \mathbf{r}_C + {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_D)/2, \quad {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_{P4} = ({}^{11}_{ij} \mathbf{r}_A + {}^{11}_{ij} \mathbf{r}_D)/2.$$

图 4 中的各支链可以简化成一个由 n 个转动副串联而成的开链机构, 分别以各运动副为原点, 建立多个坐标系, 如图 5 所示。

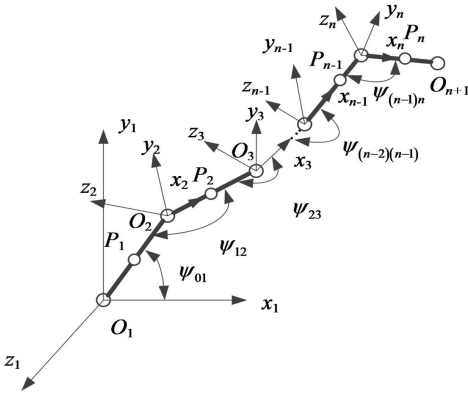


图 5 n 个转动副串联构成的开链机构

Fig.5 Open chain mechanism by n revolute pairs connected in series

杆 n 质心 P_n 的位姿有射线坐标和轴线坐标两种表述形式。射线坐标形式

$$\mathbf{x}_{P_n} = (\boldsymbol{\psi}_n, \mathbf{r}_{P_n})^T, \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{\psi}_n = (\psi_{01}, \psi_{12}, \dots, \psi_{(n-1)n})^T$ 为杆 n 的欧拉角, $\mathbf{r}_{P_n} = O_1P_n$ 为杆 n 的质心 P_n 的位置向量, 其表达式为

$$\mathbf{r}_{P_n} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{l}_{n-1} + \mathbf{l}_{P_n},$$

式中: $\mathbf{l}_i = O_iO_{i+1}, \mathbf{l}_{P_n} = O_nP_n$ 。

杆 n 质心 P_n 位姿的轴线坐标形式为

$${}^a\mathbf{x}_{P_n} = \tilde{\Delta} \mathbf{x}_{P_n} = (\mathbf{r}_{P_n}, \boldsymbol{\psi}_n)^T.$$

式中 $\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ 为对偶算子, 实现射线坐标和轴线坐标的互换。

$\mathbf{S}_{ei}$ 为运动副 O_i 的轴线在坐标系 1 的单位方向向量, $\mathbf{S}_i$ 为运动副 O_i 的轴线在坐标系 i 中的单位方向向量, 则

$$\mathbf{S}_{ei} = \mathbf{R}_{li} \mathbf{S}_i.$$

式中 $\mathbf{R}_{li}$ 为坐标系 i 到坐标系 1 的转动变换矩阵。

杆 n 的角速度可以表示为

$$\boldsymbol{\omega}_n = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_n = \dot{\psi}_{01} \mathbf{S}_{e1} + \dot{\psi}_{12} \mathbf{S}_{e2} + \dots + \dot{\psi}_{(n-1)n} \mathbf{S}_{en}.$$

杆 n 质心 P_n 在全局坐标系中的速度

$$\mathbf{v}_{P_n} = \dot{\mathbf{r}}_{P_n} = \dot{\mathbf{l}}_1 + \dot{\mathbf{l}}_2 + \dots + \dot{\mathbf{l}}_{n-1} + \dot{\mathbf{l}}_{P_n}.$$

式中:

$$\dot{\mathbf{l}}_k = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{l}_k, \quad (1 \leq k \leq n), \quad \dot{\mathbf{l}}_{P_n} = \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{l}_{P_n}.$$

由此可得

$$\mathbf{v}_{P(n+1)} = \dot{\psi}_{01} (\mathbf{S}_{e1} \times \mathbf{l}_{P1n}) + \dot{\psi}_{12} (\mathbf{S}_{e2} \times \mathbf{l}_{P2n}) + \dots + \dot{\psi}_{(n-1)n} (\mathbf{S}_{en} \times \mathbf{l}_{Pnn}).$$

式中:

$$\mathbf{l}_{Pjn} = \mathbf{l}_j + \dots + \mathbf{l}_{n-1} + \mathbf{l}_{Pn} = O_jP_n, \quad (1 \leq j \leq n).$$

对式 (2) 求时间的一阶和二阶导数, 可得质心 P_n 的速度和加速度螺旋

$$\$_{P_n} = (\boldsymbol{\omega}_n, \mathbf{v}_{P_n})^T = \mathbf{J}_{P_n} \dot{\boldsymbol{\psi}}_n,$$

$$\mathbf{\epsilon}_{P_n} = \dot{\$_{P_n}} = (\boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{a}_{P_n})^T = \mathbf{H}_{P_n} \dot{\boldsymbol{\psi}}_n + \mathbf{J}_{P_n} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_n.$$

式中

$$\mathbf{J}_{P_n} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{e1}^T & \mathbf{S}_{e2}^T & \dots & \mathbf{S}_{en}^T \\ (\mathbf{S}_{e1} \times \mathbf{l}_{P1n})^T & (\mathbf{S}_{e2} \times \mathbf{l}_{P2n})^T & \dots & (\mathbf{S}_{en} \times \mathbf{l}_{Pnn})^T \end{bmatrix}$$

为杆 n 的质心 P_n 雅克比矩阵,

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_n = (\dot{\psi}_{01}, \dot{\psi}_{12}, \dots, \dot{\psi}_{(n-1)n})^T,$$

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}}_n = (\ddot{\psi}_{01}, \ddot{\psi}_{12}, \dots, \ddot{\psi}_{(n-1)n})^T$$

分别为杆 n 的广义速度和加速度矢量, $\psi_{i(i+1)}$ 为杆 i 和杆 $i+1$ 之间的夹角, $\mathbf{H}_{P_n} = \dot{\mathbf{J}}_{P_n}$ 为质心 P_n 的海塞矩阵。

由该方法可以方便地得到可展机构中单元机构 ij 的各运动副的速度螺旋 ${}^{11}\$_{A \setminus ij}, {}^{11}\$_{B \setminus ij}, {}^{11}\$_{C}$ 和 ${}^{11}\$_{D}$, 加速度螺旋 ${}^{11}\mathbf{\epsilon}_{A \setminus ij}, {}^{11}\mathbf{\epsilon}_{B \setminus ij}, {}^{11}\mathbf{\epsilon}_{C}$ 和 ${}^{11}\mathbf{\epsilon}_{D}$ 以及各杆质心的速度螺旋 ${}^{11}\$_{P1 \setminus ij}, {}^{11}\$_{P2 \setminus ij}, {}^{11}\$_{P3}$ 和 ${}^{11}\$_{P4}$, 加速度螺旋 ${}^{11}\mathbf{\epsilon}_{P1 \setminus ij}, {}^{11}\mathbf{\epsilon}_{P2 \setminus ij}, {}^{11}\mathbf{\epsilon}_{P3}$ 和 ${}^{11}\mathbf{\epsilon}_{P4}$ 。

2.3 Bennett 单元阵列可展机构的动力学分析

Bennett 单元阵列可展机构的自由度可以通过构型设计变成 1。可展机构中, 假定单元 11 为驱动单元, 单元 ij 的内角和输出角位移都是单元 11 的驱动杆位移 ${}_{11}\theta_1$ 的函数。在可展机构运动的过程中, 除了作用驱动单元机构杆 4 上的广义力矩, 还有作用在各杆件上的惯性力螺旋, 由虚功原理可得

$$\begin{aligned} w_d = & \tau \delta_{11} \boldsymbol{\psi}_{P4} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ({}_i\$_{FP1} \delta_{ij}^a \mathbf{x}_{P1} + {}_j\$_{FP4} \delta_{ij}^a \mathbf{x}_{P4}) + \\ & \sum_{i=1}^n {}_{im}\$_{FP2} \delta_{im}^a \mathbf{x}_{P2} + \sum_{j=1}^m {}_{nj}\$_{FP3} \delta_{nj}^a \mathbf{x}_{P3} = \tau \delta_{11} \boldsymbol{\psi}_{P4} + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ({}_i\$_{FP1ij} {}^a\mathbf{J}_{P1} \delta_{ij} \boldsymbol{\psi}_{P1} + {}_j\$_{FP4ij} {}^a\mathbf{J}_{P4} \delta_{ij} \boldsymbol{\psi}_{P4}) + \\ & \sum_{i=1}^n {}_{im}\$_{FP2im} {}^a\mathbf{J}_{P2} \cdot \delta_{im} \boldsymbol{\psi}_{P2} + \sum_{j=1}^m {}_{nj}\$_{FP3nj} {}^a\mathbf{J}_{P3} \delta_{nj} \boldsymbol{\psi}_{P3}. \end{aligned}$$

式中: $\delta_{11} \boldsymbol{\psi}_{P4} = \delta_{11} \theta_1$; τ 为作用在驱动单元上的广义力矩; 由于 ${}_i\boldsymbol{\psi}_{Pe}$ 是广义变量 ${}_{11}\theta_1$ 的函数, 可以得到 $\delta_{ij} \boldsymbol{\psi}_{Pe} = {}_i\mathbf{f}_{\omega Pe} \delta_{11} \theta_1$, 称之为单元 ij 中杆 e 广义速度矢量, ${}_i\mathbf{f}_{\omega Pe}$ 为单元 ij 中杆 e 的广义速度矢量系数矩阵; ${}_i\mathbf{x}_{Pe}$ 是单元 ij 中杆 e 质心的射线坐标形式, ${}^a\mathbf{x}_{Pe} = \tilde{\Delta} \mathbf{x}_{Pe}$, $\tilde{\Delta}$ 是对偶算子; ${}^a\mathbf{J}_{Pi} = \tilde{\Delta} {}_i\mathbf{J}_{Pi}$; ${}_i\$_{FPe} = ({}_i\mathbf{F}_{Pe}, {}_i\mathbf{M}_{Pe})$ 为单元 ij 中杆 e 的质心 ${}_iP_e$ 包含重力惯性力螺旋, ${}_i\mathbf{F}_{Pe}$ 为杆质心 ${}_iP_e$ 处的惯性力, ${}_i\mathbf{M}_{Pe} = -{}_i\mathbf{J}_e \cdot {}_i\boldsymbol{\alpha}_e - {}_i\boldsymbol{\omega}_e \times ({}_i\mathbf{I}_e \cdot \boldsymbol{\omega}_e)$ 为杆 i 质心 P_i 的惯性力矩。

将 $\delta_{11}\boldsymbol{\psi}_{p4} = \delta_{11}\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\delta_{ij}\boldsymbol{\psi}_{pe} = \mathbf{f}_{ij\omega_{pe}}\delta_{11}\boldsymbol{\theta}_1$ 代入可得 Bennett 单元阵列可展机构的动力学分析模型:

$$\boldsymbol{\tau} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mathbf{f}_{FP1ij}^a \mathbf{J}_{P1ij} \mathbf{f}_{\omega P1} + \mathbf{f}_{FP4ij}^a \mathbf{J}_{P4ij} \mathbf{f}_{\omega P4}) +$$
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{FP2im}^a \mathbf{J}_{P2im} \mathbf{f}_{\omega P2} + \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_{FP3nj}^a \mathbf{J}_{P3nj} \mathbf{f}_{\omega P3} = 0.$$

采用数值方法求解动力学方程,可以获得作用在驱动单元上的广义力矩.

3 算 例

以图 6 中 Bennett 机构构成的 4×4 阵列可展机构为例,分析其运动学和动力学.

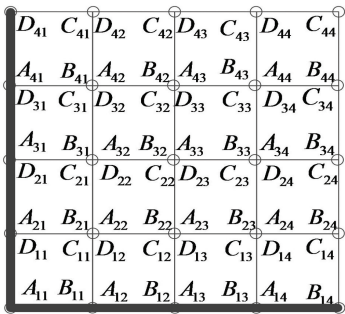


图 6 4×4 L 型 Bennett 单元阵列可展机构

Fig.6 Schematic diagram of 4×4 L type Bennett unit array deployable mechanism

在该可展机构中,所有的 Bennett 单元机构都是相同的,其参数见表 1,表 1 中杆 a 和杆 b 对应图 1 中的 l_a 和 l_b . 假定单元 11 为驱动单元,杆 $A_{11}B_{11}$ 为机架,电机作用在运动副 A_{11} 上,为了保证机构展开的效率和稳定,驱动机构的运动规律分为 3 个阶段:加速阶段、匀速阶段和减速阶段. 具体的运动规律如下:

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_1 t^2, & (0 \leq t \leq \frac{T}{6}); \\ \frac{\alpha_1 T t}{6} - \frac{\alpha_1 T^2}{72}, & (\frac{T}{6} < t \leq \frac{2T}{3}); \\ \frac{1}{2}\alpha_1 T t - \frac{\alpha_1 T^2}{8} - \frac{\alpha_1 t^2}{4}, & (\frac{2T}{3} < t \leq T). \end{cases}$$

式中 T 为可展机构的运动周期.

表 1 Bennett 单元机构的基本参数

Tab.1 Basic parameters of Bennett unit linkage

杆	长度/mm	扭角/(°)	E /MPa	ρ /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	截面半径/mm
杆 a	36	30.000 0	71	2 740	5
杆 b	12	9.594 1	71	2 740	5

Bennett 机构在阵列后是否干涉与驱动角的运动范围有很大关系,如果阵列后所有单元的驱动角在展开过程中不超过其运动范围,则不会干涉. Bennett 机构的运动范围与本身构件参数和形状的选择有关,为了考虑更大运动范围内的 Bennett 单元

阵列可展机构的动力学问题,本文没有考虑 Bennett 单元构件的设计,假设 Bennett 单元机构的驱动角的运动范围为 $0 \sim \pi$. 加速阶段驱动单元的加速度: $\alpha_1 = 0.1 \text{ rad/s}^2$, 减速阶段驱动单元的加速度 $\alpha_2 = -\alpha_1/2$. 展开过程中,第一行中所有单元的杆 1 和第一列中所有单元的杆 4 分别位于同一条直线上,如图 6 中的粗线所示. 可展机构的第一行及第一列的各 Bennett 单元机构的输入角和输出角可以通过式(1)得到

$${}_{1(i+1)}\theta_1 = {}_{1i}\eta_1, \quad {}_{(j+1)1}\theta_1 = {}_{j1}\eta_1.$$

式中: $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$.

第 $i + 1$ 行 $j + 1$ 列单元机构的输入角和输出角:

$${}_{(i+1)(j+1)}\theta_1 = 2\pi - ({}_i\theta_1 + {}_{(i+1)j}\theta_2 + {}_{i(j+1)}\theta_2).$$

式中: $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$.

该可展机构的输入角和输出角可以依次求解,然后按照此顺序求解出各个单元输入角和输出角的角速度及角加速度. 为了验证所建模型的正确性,采用 ADAMS 对算例中的可展机构进行了动力学仿真.

对于 4×4 阵列可展机构,对角线上的各单元的运动参数比较有代表性. 图 7~9 给出了可展机构对角线上各单元机构的驱动角在运动范围内的角位移、角速度和角加速度.

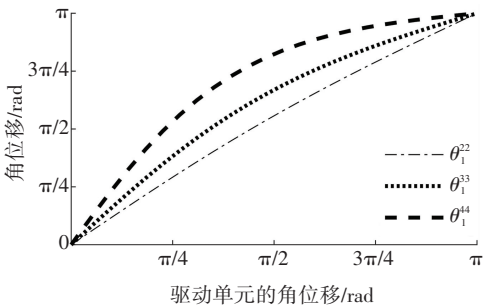


图 7 对角线上各单元驱动角的角位移

Fig.7 Angular displacements of the driving angulars of all uints located on the digonal

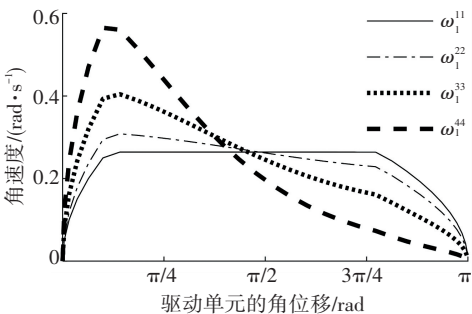


图 8 对角线上各单元驱动角的角速度

Fig.8 Angular velocities of the driving angulars of all uints located on the digonal

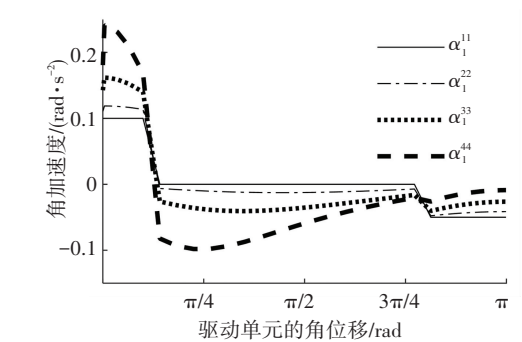
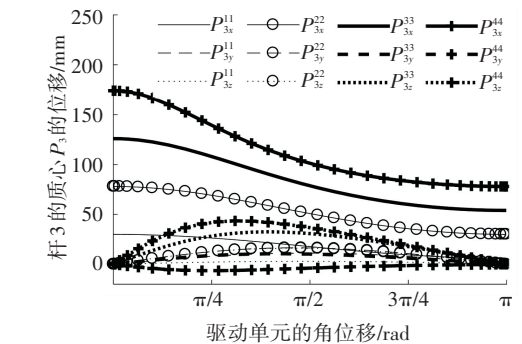


图 9 对角线上各单元驱动角的角加速度

Fig.9 Angular accelerations of the driving angulars of all units located on the diagonal

由图 7 可看出,文中给定的参数使得可展机构各单元的驱动角在运动范围内变换比较平缓.可展机构中各单元的驱动角都在 $0 \sim \pi$,不会相互干涉.由图 8 和图 9 可看出,单元机构距离驱动单元愈远,驱动角的角速度和角加速度变化范围越大.

图 10~12 给出了 4×4 Bennett 单元阵列可展机构对角线上各单元机构杆 3 的质心 P_3 在 x 、 y 和 z 轴方向上的位移、速度和加速度.



控制. 该试验台可以测量可展机构中各运动副和各质心的加速度. 给定丝杠上滑块的运动是梯形的, 初始速度为 $0\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, 加速和减速阶段的加速度为 $6\text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}$, 匀速阶段的速度为 $6\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, 初始位移为 124 mm , 运动距离为 60 mm . 算例中的杆件参数(见表 1)可以保证可展机构具有较大的运动范围, 有利于工程应用, 但是杆件的加工难度大, 成本高. 为了便于杆件加工和降低成本, 实验台杆件的扭角取两个特殊的角度, 具体参数见表 2.



图 14 Bennett 单元阵列可展机构实验台

Fig. 14 Experiment table of Bennett unit array deployable mechanism

表 2 实验台的基本参数

Tab.2 Basic parameters of the experiment platform

参数	长度/mm	扭角/($^{\circ}$)
杆 a	160.000	60
杆 b	92.376	30
驱动杆 l_d	250.000	0

表 2 中杆 a 和杆 b 对应图 1 中的 l_a 和 l_b , 驱动杆 l_d 是图 14 中的驱动杆. 虽然实验台中的可展机构运动范围小, 但是在一定程度上可以用来验证本文建立的运动学和动力学分析模型和方法.

针对实验台中的可展机构, 采用表 2 中的杆件参数和滑块的运动条件进行了数值仿真计算. 通过坐标变换可以将计算值和实验值放入同一坐标系中. 对比了单元 22 中杆件 3 的质心 P_3^{22} 的加速度在同一坐标系中的计算值和实验测量值, 具体结果见图 15. 可以看出实验结果和模型计算结果基本一致, 误差是由丝杠偏心距、滑块和丝杠之间不够光滑等因素引起的. 由模型计算和实验测量对比结果看, 文中建立的运动学和动力学分析模型和方法是正确的, 可以用来分析类似的 Bennett 单元阵列可展机构.

动力学分析结果可应用于此类可展机构的轨迹规划、控制器参数的整定以及动态设计等环节.

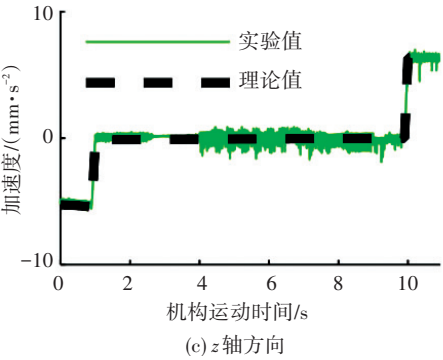
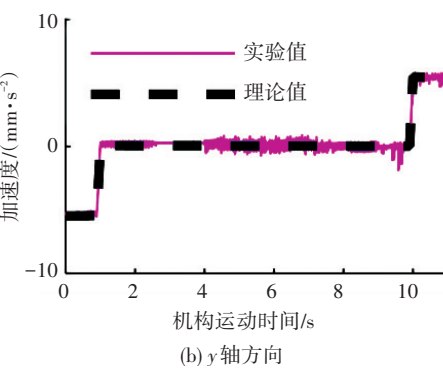
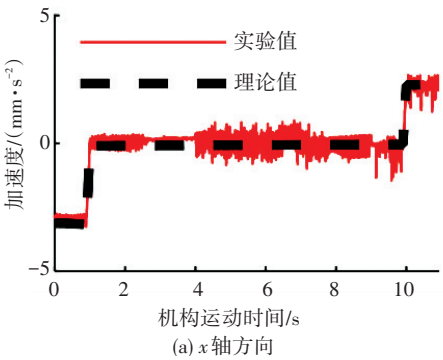


图 15 质心 P_3^{22} 的加速度

Fig.15 Accelerations of the centroid P_3^{22}

5 结 论

- 1) 根据 Bennett 单元阵列可展机构多闭环和重复的特性, 将其拆解为多个空间串联开链机构, 结合螺旋理论与坐标变换法, 构建了 Bennett 单元阵列可展机构的运动学分析模型, 采用虚功原理法建立了其动力学分析模型和动力学分析方法. 该模型对任意个 Bennett 单元机构、不同组合方式构成的可展机构具有通用性;
- 2) 该运动学与动力学分析模型将虚功原理中相关的导数运算变换为向量之间的加乘运算, 在一定程度上提高了可展机构的运动学和动力学分析运算效率;
- 3) 算例中的 4×4 Bennett 单元阵列可展机构在给定运动范围内运动平稳, 广义力矩的变化比较平缓.

4)采用 ADAMS 仿真和实验的方法对所建模型进行了验证,结果证明文中所建的动力学和运动学模型是正确的,可以用于此类可展机构的设计和分析.

参考文献

[1] CHEN Yan. Design of structural mechanisms[D]. Oxford: University of Oxford, 2003

[2] MELIN N O B. Application of Bennett mechanisms to long-span shelters[D]. Oxford: University of Oxford,2004

[3] SONG Xiaoke, DENG Zongquan, GUO Hongwei, et al. Networking of Bennett linkages and its application on deployable parabolic cylindrical antenna[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 109:95. DOI:10.1016/j.mechmachtheory.2016.10.019

[4] LU Shengna, ZLATANOV D, DING Xilun. Approximation of cylindrical surfaces with deployable Bennett networks[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(2): 1. DOI: 10.1115/1.4035801

[5] ZHI Changjian, WANG Sanmin, LI Jianfeng, et al. Kinematic and dynamic characteristics analysis of Bennett's Linkage[J]. Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), 2015, 22(3):95. DOI: 10.11916/j.issn.1005-9113.2015.03.014

[6] TSAI L W. Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(1):3. DOI:10.1115/1.533540

[7] ZHAO Yongjie, GAO Feng. Inverse dynamics of the 6-dof out-parallel manipulator by means of the principle of virtual work[J]. Robotica, 2009, 27(2):259. DOI:10.1017/S0263574708004657

[8] 贾晓辉, 田延岭, 张大卫. 基于虚功原理的 3-RRPR 柔性精密定位工作台动力学分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(1):68. DOI: 10.3901/JME.2011.01.068

JIA Xiaohui, TIAN Yanling, ZHANG Dawei. Inverse dynamics of 3-RRPR compliant precision positioning stage based on the principle of virtue work[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(1): 68. DOI: 10.3901/JME.2011.01.068

[9] KALANI H, REZAEI A, AKBATZADEH A. Improved general solution for the dynamic modeling of Gough-Stewart platform based on principle of virtual work[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 83(4):

2393. DOI: 10.1007/s11071-015-2489-z

[10] XIN Guiyang, DENG Hua, ZHONG Guoliang. Closed-form dynamics of a 3-DOF spatial parallel manipulator by combining the Lagrangian formulation with the virtual work principle[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(2): 1329. DOI: 10.1007/s11071-016-2967-y

[11] 孙宏图, 袁茹, 王三民. 正方形可展机构的运动学与动力学特性研究[J]. 西北工业大学学报, 2013, 31(4):620

SUN Hongtu, YUAN Ru, WANG Sanmin. Kinematics and dynamics characteristics of square developable structure[J]. Journal of North-western Polytechnical University, 2013, 31(4):620

[12] SUN Yuantao, WANG Sanmin, MILLS J K, et al. Kinematics and dynamics of deployable structures with scissor-like-elements based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(4):655. DOI:10.3901/CJME.2014.0519.098

[13] 李博, 王三民, 袁茹, 等. 基于剪式线性阵列可展结构对称性的动力学分析方法研究[J]. 西北工业大学学报, 2015(4):665

LI Bo, WANG Sanmin, Yuan Ru, et al. Dynamics analysis method study based on linear array deployable structure symmetry of scissor-like element[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2015,33(4): 665

[14] 李博, 王三民, 袁茹, 等. 运动副间隙耦合作用下平面剪式线性阵列可展结构的动力学分析[J]. 西北工业大学学报, 2017, 35(3): 455

LI Bo, WANG Sanmin, YUAN Ru, et al. Dynamics analysis of planar linear array deployable structures under the coupling action of clearance Joints[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2017, 35(3):455

[15] 智常建, 王三民, 孙远涛. 运动副间隙对多杆锁机构动力学特性的影响[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2014, 46(8):102

ZHI Changjian, WANG Sanmin, SUN Yuantao. Effect of kinematic pairs clearance on dynamic characteristics of multi-linkage lock mechanisms[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, 46(8): 102

[16] FILIPOVIC M, DJURIC A, KEVAC L. The significance of adopted Lagrange's principle of virtual work used for modeling aerial robots [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(7): 1804. DOI: 10.1016/j.apm.2014.09.019

(编辑 杨 波)