

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201811006

有向网络能控性指数的上下界研究

陈 鹏, 李晓丽

(东华大学 信息科学与技术学院, 上海 201620)

摘 要: 研究网络可控性的重要前提是证明系统是可控的. 网络的可控性是指通过施加适当的外部输入或者调节输入来控制整个网络, 从而获得预期的状态. 传统计算有向网络控制输入节点的方法是通过求解网络对应的二分图的最大匹配, 由于这种方法对于网络节点的匹配方式没有施加限制, 导致节点控制链路过长, 造成网络控制信息传递存在延迟, 影响网络的可控性性能. 通过 Kalman 判据、PBH 判据等可证明一定时间内系统是否可控, 但是随着网络规模的增大, 网络中节点之间的关系也变得更加复杂, 单纯使用这类方法使得运算的复杂度变高. 本文首先结合 Kalman 秩判据提出能控性指数 K 的下界算法 (KMLA). 通过确定网络达到可控状态时的能控性指数的下界, 可以快速确定控制输入的控制节点集群. 然后提出基于入度的能控性指数 K 的最小上界算法 (KMUA). 发现本文提出的 KMUA 算法能够使 K 值的上界更加接近网络达到步可控时的 K 值. 结合具体的网络模型和实际的网络对能控性指数的上下界进行验证, 结果表明本文提出的算法, 结合能控性指数上下界, 可优化节点的控制链长度.

关键词: 二分图; 最大匹配; 能控性指数; KMLA; KMUA

中图分类号: O231.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2019)05-0195-06

Research on upper and lower bounds of controllability index for directed networks

CHEN Peng, LI Xiaoli

(Shool of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract: An important prerequisite for the study of network controllability is to prove that the system is controllable. The controllability of the network means that the entire network is controlled by applying proper external inputs or adjusting inputs to achieve the desired state. The traditional way to calculate the control input nodes of directed network is to solve the maximum matching of the bipartite graphs corresponding to the network. However, since this method does not impose restrictions on the matching manner of the network node, the node control chain is too long and the information transfer of the control input is delayed, which affects the whole controllable performance of the network. The Kalman criterion and the PBH criterion can prove whether the system is controllable within a certain period of time. However, the relationship between nodes in the network becomes more complicated as the size of the network increases, so the simple utilization of such methods increases the complexity of the operation. Therefore, the lower bound algorithm for the controllability index K (KMLA) was proposed by combining the Kalman rank criterion. Control node cluster for control input can be quickly determined by determining the lower bound of the network's controllability index. Then based on in-degree of networks, the minimum upper bound algorithm for the controllability index K (KMUA) was proposed. It was found that the KMUA algorithm proposed in this paper could make the upper bound of the K value closer to the K value when the network reached the K -step controllable. The upper and lower bounds of the controllability index K were verified by the specific network model and the real network. Results show that the algorithm can optimize the control chain length of the driven node by combining the upper and lower bounds of the controllability index.

Keywords: bipartite graphs; maximum matching; controllability index; KMLA; KMUA

随着计算机技术的快速发展, 对象与数据的关联性变得越来越复杂, 随之衍生了很多结构复杂的大规模网络系统^[1-2]. 在有限的时间内, 通过对网络

若干节点施加控制, 如果网络系统的所有状态变量可以由任意初态迁移到任意终态, 则称该网络系统是可控的^[3-5]. 网络可控对于研究大规模网络问题具有重要的意义. 文献[6]提出网络系统的结构能控性, 大大降低传统方法中计算 Kalman 秩判据的复杂度. 文献[6]通过引入图论的思想, 将有向网络映射到二分图, 从而确定图的最大匹配求得满足结构可控性的最少驱动节点数目. 文献[7]基于 PBH 秩

收稿日期: 2018-11-01
基金项目: 国家自然科学基金(61473077, 61573239);
上海自然科学基金(16ZR1446700)
作者简介: 陈 鹏(1992—), 男, 硕士研究生
通信作者: 李晓丽, xlli@dh. edu. cn

判据,通过计算网络系统矩阵的最大几何重数,来确定实现网络精确可控性所需的最少驱动节点的数目.文献[7]提出的精确可控性理论弥补了^[6]的不足,可用于求解无向网络以及其他任意结构的加权网络的可控性,使网络系统可控性的理论更加完备.

现有的研究中,对于一个有向网络,关于确定其驱动节点的数目已经取得丰富的研究成果^[6-8].但上述工作并不能保证受控网络在一定的时间内收敛到目标状态,这对大规模网络可控性研究具有理论和实际意义.文献[9]提出能控子网络的概念,对具有固定数量控制节点的有向网络的可控性指数进行优化,得出稠密的同质网络比稀疏的异质的网络具有更大的能控性指数的结论.文献[10]对带有时滞的线性系统的能控性指数进行研究,针对两种形式的能控性: R^n -controllability 和 $R(\nabla)$ -controllability,提出两种形式的能控性指数列表.

以上工作对于网络的控制节点的控制链长度没有施加限制,当网络规模较大时,节点之间的状态信息的传递会造成一定的控制延迟等问题^[11].本文针对有向网络,对能控性指数的上下界进行研究.本文的主要工作有:首先通过对系统可控性进行分析,提出能控性指数的概念.然后根据 Kalman 秩判据的相关理论,提出能控性指数的下界算法(KMLA).最后结合最大匹配的原理,提出基于入度的能控性指数的最小上界算法(KMUA).结合具体的模型和实际的网络数据集对本文提出的算法进行验证,实验结果表明通过确定网络能控性指数的上下界,可以实现优化节点的控制链长度,为设计合理的使网络满足一定步数可控的控制方案提供依据.

1 问题描述

对于一个由 N 个状态节点和 M 个控制节点组成的网络系统,可以将其近似的看成线性非时变系统^[6],如下所示

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t). \quad (1)$$

式中: N 维向量 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 表示网络在时间节点 t 的状态向量; A 为 $N \times N$ 维的系统矩阵,描述了状态节点间边的连接情况以及边的连接强度; B 为 $N \times M$ 维的输入矩阵,描述了网络的控制连线图,刻画了 M 个控制节点与 N 个状态节点的连接关系^[12].

引理 1^[13] 对 N 维线性非时变系统(1),构造系统的可控性判别矩阵

$$C = [B, AB, \dots, A^{K-1}B, A^K B, \dots, A^{N-1}B]. \quad (2)$$

则系统完全可控的充分必要条件为

$$\text{rank}(C) = N. \quad (3)$$

事实上 C 矩阵所有列并不是完全线性无关的,可能某些列线性相关,则可能前 $(K+1)M$ 列已经能够使 C 矩阵满秩,由此引出能控性指数的概念.定义一个 $N \times (K+1)M$ 维的 K 步可控性矩阵

$$C = [B, AB, \dots, A^K B]. \quad (4)$$

定义 1 对于系统(1),定义系统的能控性指数为使下列等式成立的正整数 K

$$\begin{aligned} \text{rank}(Q = [B, AB, \dots, A^K B]) &= N \quad \text{且} \\ \text{rank}(Q' = [B, AB, \dots, A^K B]) &< N. \end{aligned} \quad (5)$$

为表述的简洁性,用 K 步能控描述系统能控性指数为 K 这一性能.很明显,当 $K = N - 1$ 时, Q 即为能控性判别矩阵.表明,当系统 K 步完全能控时,系统在 $K+1, K+2, \dots$ 步仍然满足完全能控的特性.

本文关于“ K 步能控”的表述在离散系统中具有特定的物理含义,指存在有限步的控制信号序列: $u(0), u(1), \dots, u(K-1)$,使得系统当前状态 $X(0)$ 能在第 K 步达到零状态.而连续系统在研究中不涉及控制步数的概念,因此针对连续系统“ K 步能控”并不具有类似离散系统的实际物理含义.为了表述的一致性和简洁性,本文不再特别针对连续系统和离散系统进行区分说明.

2 能控性指数 K 的下界算法

结合能控性指数的定义可知,需要从零开始不断的计算 $AB, A^2B, \dots, A^K B$,直到满足 K 步可控的代数判据为止.控制输入矩阵 B 用 N 维方阵表示时,只有对角元素非零,为了简化,可将 B 转化成 $N \times 1$ 维列向量形式

$$B_n = B * 1_N. \quad (6)$$

式中: 1_N 为 $N \times 1$ 维元素都为 1 的列向量.计算 $A^K B_n$ 时,向量中非零的元素表示控制输入可以在 K 步影响到该非零元素所映射的状态节点.能控性指数 K 的下界算法(KMLA)的步骤为

步骤 1: 将 B 矩阵转换成 B_n 形式的列向量;

步骤 2: K 从 0 开始取值,计算 $A^K B_n$,并记录 $A^K B_n$ 中非零元素所在的行索引集合为 S_R ;

步骤 3: 令 $K = K + 1$,计算 $A^K B_n$,若 $A^K B_n$ 中存在非零元素,且非零元素所在的行索引不在集合 S_R 中,则更新 S_R ,将行索引添加到 S_R ;

步骤 4: 若非零元素所在的行索引 R_{row} 在集合 S_R 中,将 $A^K B_n$ 中行索引为 R_{row} 的非零元素清零.若此时

$A^K B_n$ 为零向量, 则确定下界为 $K-1$; 否则, 重复步骤 3 到步骤 4.

如下所示的系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将 B 矩阵转换成 B_n 形式的列向量: $B_n = [101001100]^T$, 则行索引集合 $S_R = \{1, 3, 6, 7\}$; $AB_n = [011000110]^T$, 非零元素所在的行索引中, 3 和 7 位于 S_R 中, 故 $AB_n = [010000010]^T$, 更新行索引集合 $S_R = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$; 计算 $A^2 B_n = [000200001]^T$, 更新行索引集合 $S_R = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$; 计算 $A^3 B_n = [000120000]^T$, 4 位于 S_R 中, 故 $A^3 B_n = [000020000]^T$, 更新行索引集合 $S_R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; 计算 $A^4 B_n = [000010000]^T$, 非零元素所在的行索引中, 5 位于 S_R 中, 故 $A^4 B_n = [000000000]^T$ 为零向量, 即网络系统在当前控制输入作用下, 能控性指数 K 的下界为 3, 网络最快 3 步可控.

通过确定 K 值的下界, 为设计合理的 K 步可控性方案提供理论依据. 但是, 在实际的 K 步可控网络中, 当网络系统的规模较大时, 可能导致控制输入的控制链过长, 因此确定 K 值的上界对于 K 步可控的研究也是至关重要的.

3 能控性指数 K 的最小上界算法

由可控性理论可知^[1], 有向网络的最少驱动节点的集合可由二分图的最大匹配算法得出. 同时, 研究表明网络的最少驱动节点的集合并不唯一, 导致网络的最大可达路径的长度可能存在差别^[8]. 如下图所示的系统

由图 1 可知, 图 1(b) 中控制输入为 $u = \{u_1, u_3, u_5\}$, 图 1(c) 中控制输入为 $u = \{u_1, u_2, u_5\}$. 两种控制方案下, 虽然最小控制输入集合的节点个数相同, 但是控制输入的控制链长度并不一样. 图 1(b) 中, 最大控制链长度为 $u_3 - x_3 - x_4 - x_6$. 图 1(c) 中, 最大控制链长度为 $u_1 - x_1 - x_3 - x_4 - x_6$. 表明两种控制方案下, 能控性指数 K 的上界并不一样.

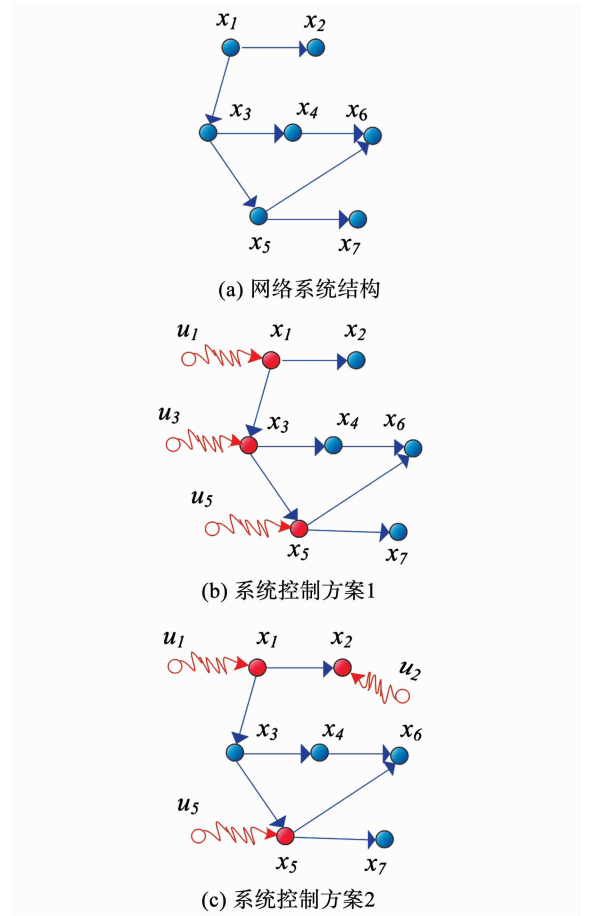


图 1 简单的有向网络的不同控制方案

Fig. 1 Simple directed networks with different control schemes

3.1 算法分析

对于一个有向无自环网络 $G = (V, E)$, 基于入度的能控性指数 K 的最小上界算法 (KMUA) 的一般步骤如下

步骤 1: 令集合 $S = \{\}$, 随机查找未在 S 中并且入度为 1 的节点, 记为 v_i , 其中 $0 \leq i \leq N$, 令 $S = S \cup \{v_i\}$;

步骤 2: 若存在 v_i , 回溯一步可达 v_i 的节点, 记为 v_j , 其中 $0 \leq j \leq N$;

步骤 3: 若 v_j 的出度大于 2, 则只保留链路 $v_j - v_i$, 删除其他 v_j 的一步可达链路, 使 v_j 的出度为 1;

步骤 4: 若 v_j 的入度大于 2, 回溯可达 v_j 并以 v_j 为终点的所有链路, 只保留回溯链路长度最短的链路, 删除其他一步可达 v_j 的链路, 使 v_j 的入度为 1;

步骤 5: 在剩余的网络中, 重复步骤 1 ~ 4, 直到找不到未在集合 S 中并且入度为 1 的节点为止;

步骤 6: 将剩余网络中的入度为 0 的节点作为最小控制输入的节点集合, 且剩余网络中控制输入的最大链路长度即为 K 值的最小上界.

上述步骤中, 当初始网络不存在入度为 1 的节

点时,需要对网络进行如下的初始化构造:随机查找网络中入度最小的节点,记为 v_s ,其中 $0 \leq s \leq N$.按照上述步骤4的处理过程,使 v_s 的出度为1.

3.2 算例分析

以图2(a)所示的网络系统,对KMUA算法进行简单的说明.

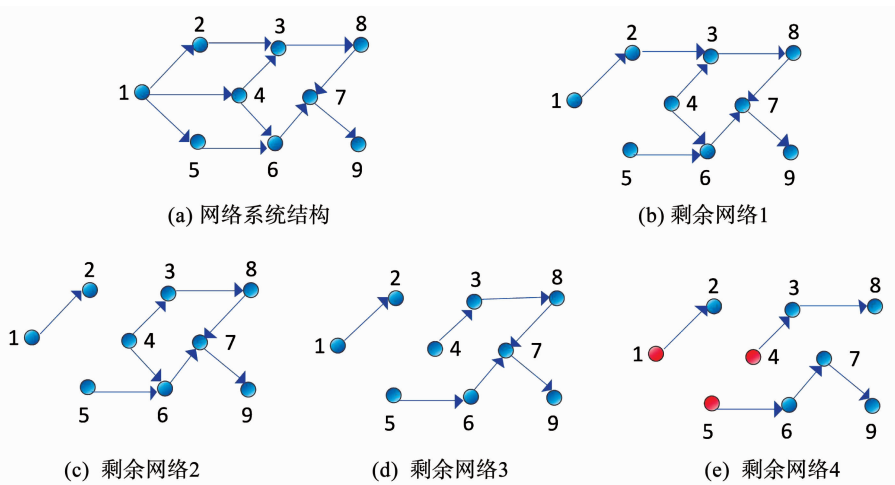


图 2 KMUA 算法示意

Fig. 2 Schematic diagram for KMUA algorithm

首先查找图2(a)所示的网络中入度为1的节点,随机选择节点2为当前节点,更新集合 $S = \{2\}$.一步可达2的节点为1,且节点1的入度为0,出度大于2,则保留节点1~2的链路,删除其他链路,使节点1的出度为1,得到图2(b)所示剩余网络.

查找图2(b)所示的网络中入度为1的节点,得到节点8的入度为1,更新集合 $S = \{2, 8\}$.一步可达8的节点为3,且节点3的入度大于2,回溯所有可达节点3并以节点3为终点的链路,并将较长的链路删除,只保留最短的一条链路,使节点3的入度为1,得到图2(c)所示剩余网络.

对剩余的网络按照上述步骤继续查找,最终得到图2(e)所示剩余网络,此时 $S = \{2, 3, 6, 8, 7, 9\}$.剩余网络中的入度为0的节点为:1,4,5,即最小控制输入的节点集合 $\{1, 4, 5\}$.剩余网络中控制输入的最大链路为:5—6—7—9,即 K 值的最小上界为3.

同时经过检验可知,传统最大匹配算法得到的 K 的最小上界值为5.本文提出的KMUA算法,不仅能够得到网络的最小控制输入集合,而且还能够使能控性指数 K 的上界尽量小.

4 仿真结果分析

表1为随机生成的ER随机网络仿真结果.其中 N 为网络节点的个数, L 为网络的边, $\langle k \rangle$ 为网络的平均度.令 $n_D = N_D/N$ 来描述网络的控制输入情况,式中 N_D 为网络达到可控状态的最小控制输入的数目. n_D^{HP} 为传统最大匹配算法Hopcroft-Karp得到

的值; n_D^{KM} 为KMUA算法得到的值; K_{HP}^{up} 为Hopcroft-Karp算法得到的控制输入的最大控制链路的长度; K_{KM}^{up} 为KMUA算法得到的控制输入的最大控制链路的长度; K_{HP} 、 K_{KM} 表示网络满足式(5)的最小正整数 K ; K_{LOW} 为KMLA算法得到值.

从表1可以看出,本文提出的KMUA算法得到的 n_D^{KM} 值和 n_D^{HP} 值相等,表明在不额外添加控制输入的情况下,KMUA算法能够保证网络系统达到相应的可控状态.且当网络规模一致时, n_D 数目随着网络稠密程度的增加而减少,验证了网络的最小控制输入集合与网络的度序列相关的结论.当网络规模一致时, K_{KM}^{up} 的值始终不大于 K_{HP}^{up} ,且有时 K_{KM}^{up} 的值是 K_{HP}^{up} 的数倍之多,表明传统算法求得的最小控制输入可能存在控制链特别长的情况,本文提出的KMUA算法可以很好的改善控制链的长度,使控制链尽量短.同时,当网络的最小控制输入数目相同时, K_{HP} 和 K_{KM} 的值相等,表明两种算法得到的最小控制输入都能使网络满足 K 步可控,且KMUA算法得到的 K 值上界值更小,表明通过KMUA算法能够使网络的控制输入的控制链长度变短.

大规模网络系统中,在进行能控性指数 K 的秩判据的计算时,可能存在 $2^N - 1$ 个组合的矩阵计算,同时对于真实网络的 A 、 B 矩阵的具体值并不能完全的确定,导致秩判据无法得到确定的 K 值^[14].为了描述大规模真实网络的 K 步可控性,结合本文得到的 K 值的上下界来间接描叙 K 的变化范围.

表2为几种不同领域的真实数据集,所有真实

数据集的来源均来自文献[6]和互联网^[15]. 对于每一种网络, 给出网络的一些基本描述特征, 其中 T_{Type}

表示网络的类型, N_{Name} 为网络的名称, N 为节点个数, L 为边数, $\langle k \rangle$ 为网络的平均度.

表 1 ER 随机网络仿真结果
Tab. 1 Simulation results for ER random networks

N	L	$\langle k \rangle$	n_{D}^{HP}	n_{D}^{KM}	$n_{\text{HP}}^{\text{up}}$	$n_{\text{KM}}^{\text{up}}$	n_{HP}	n_{KM}	n_{LOW}
10	7	1.40	0.60	0.60	4	4	2	2	2
10	13	2.60	0.30	0.30	5	3	3	3	3
20	14	1.40	0.60	0.60	4	3	3	3	3
20	39	3.90	0.25	0.25	7	5	5	5	4
30	43	2.87	0.33	0.33	7	5	4	4	3
30	55	3.67	0.30	0.30	10	6	5	5	3
30	71	4.73	0.23	0.23	9	7	4	4	3
40	19	2.95	0.68	0.68	6	3	3	3	3
40	26	1.30	0.55	0.55	7	4	4	4	4
40	44	2.20	0.40	0.40	7	4	4	4	4
40	66	3.30	0.30	0.30	13	6	6	6	5
50	24	0.96	0.72	0.72	3	2	2	2	2
50	35	1.40	0.56	0.56	4	4	4	4	4
50	64	2.56	0.38	0.38	11	4	3	3	3
50	78	3.12	0.28	0.28	15	5	4	4	4
90	69	1.53	0.53	0.53	9	5	5	5	5
90	118	2.62	0.42	0.42	16	7	6	6	6
100	117	2.34	0.39	0.39	17	5	5	5	4
200	177	1.77	0.50	0.50	9	5	4	4	4
300	228	1.52	0.54	0.54	8	5	4	4	4

表 2 真实网络数据集仿真结果
Tab. 2 Simulation results for real networks

T_{Type}	N_{Name}	N	L	$\langle K \rangle$	n_{D}^{HP}	n_{D}^{KM}	$n_{\text{HP}}^{\text{up}}$	$n_{\text{KM}}^{\text{up}}$	K_{LOW}
Graph Drawing	GD01_b	18	37	4.11	0.11	0.11	11	8	4
	GD95_a	36	57	3.17	0.14	0.14	15	9	7
	GD95_b	73	96	2.63	0.53	0.53	7	4	4
	GD96_b	111	193	3.48	0.83	0.83	1	1	1
	GD98_a	38	50	2.63	0.63	0.63	4	2	2
Pajek	GlossGT	72	122	3.39	0.51	0.51	5	5	2
Citation	SmallW	396	996	5.02	0.77	0.77	11	7	4
Electronic Circuits	S208a	122	189	3.10	0.24	0.24	14	8	7
	S420a	252	399	3.17	0.23	0.23	16	9	7
	S838a	512	819	3.20	0.23	0.23	20	13	5
Food Web	Grassland	88	137	3.11	0.52	0.52	7	3	2
	Seagrass	49	226	9.22	0.27	0.27	6	4	4
	Ythan	135	601	8.90	0.51	0.51	7	4	3
Intra-organization	FreemansI	34	695	40.88	0.03	0.03	33	33	33
	Consulting	46	879	38.22	0.04	0.04	29	25	24
Neuronal	C. elegans	306	2345	15.33	0.19	0.19	8	6	6
Trust	College student	32	96	6.00	0.19	0.19	8	6	6
	Prison inmate	67	182	5.42	0.13	0.13	9	8	8

从表 2 可以看出, 对于真实网络, 本文提出的 KMUA 算法可以保证得到的 n_{D}^{KM} 值和 n_{D}^{HP} 相同, 且

$K_{\text{KM}}^{\text{up}}$ 的值始终不大于 $K_{\text{HP}}^{\text{up}}$. 也就是说在保证不额外添加控制输入的情况下, KMUA 算法能够使原始

网络的控制链长度变短,使网络满足 K 步可控的上界更小.

5 结 论

本文通过对有向网络能控性指数的上下界的研究,结合 Kalman 秩判据提出 KMLA 算法,通过确定 K 值的下界,为设计合理的 K 步可控性方案提供理论依据. 受到网络匹配节点的入度大小的启发,本文提出 KMUA 算法,发现当最小控制输入个数相同时, KMUA 算法相较于传统的最大匹配算法能够使 K 的上界更小,表明通过 KMUA 算法得到的控制输入集合能够优化控制链的长度,避免出现控制链过长的情况. 同时结合 KMUA 算法能够使 K 值的上界更加接近网络达到 K 步可控时的 K 值. 在现实网络中,当无法忽略通信网络或者电力传感器网络信息传递过程中的链路延时带来的影响时,在保证网络可控的前提下,对控制输入的链路长度进行优化,使网络满足 K 步可控显得至关重要.

参考文献

[1] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks[J]. SIAM Review, 2003, 45(2): 167. DOI:10.1137/S003614450342480

[2] TIAN Shaolin, LU Jinhu, CHEN Guanrong, et al. When structure meets function in evolutionary dynamics on complex networks[J]. IEEE Circuits & Systems Magazine, 2014, 14(4): 36. DOI:10.1109/MCAS.2014.2360790

[3] HOPCROFT J E, KARP R M. A $n^5/2$ algorithm for maximum matchings in bipartite[C]// 12th Annual Symposium on Switching and Automata Theory. New York, USA: IEEE, 1971: 122. DOI: 10.1109/SWAT.1971.1

[4] TASSA T. Finding all maximally-matchable edges in a bipartite graph[J]. Theoretical Computer Science, 2012, 423(423): 50. DOI: 10.1016/j.tcs.2011.12.071

[5] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006

WANG Xiaofan, LI Xiang, CHEN Guanrong. Complex network theory and its application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006

[6] LIU Y Y, SLOTINE J J, BARABASI A L. Controllability of complex networks[J]. Nature, 2011, 473(7346): 167. DOI:10.1038/nature10011

[7] YUAN Zhengzhong, CHEN Zhao, DI Zengru, et al. Exact controllability of complex networks[J]. Nature Communications, 2013, 4. DOI:10.1038/ncomms3447

[8] ZHANG Xizhe, HAN Jianfei, ZHANG Weixiong. An efficient algorithm for finding all possible input nodes for controlling complex networks[J]. Scientific Reports, 2017, 7(1): 10677. DOI:10.1038/s41598-017-10744-w

[9] DING Jin, TAN Ping, LU Yongzai. Optimizing the controllability index of directed networks with the fixed number of control nodes[J]. Neurocomputing, 2016, 171: 1524. DOI: 10.1016/j.neucom.2015.07.102

[10] SENAME O, LAFAY J F, RABAH R. Controllability indices of linear systems with delays[J]. Kybernetika, 1995, 31(6): 559

[11] JUNGERS R M, D'INNOCENZO A, BENEDETTO M D D. Controllability of linear systems with switching delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(4): 1117. DOI:10.1109/TAC.2015.2460711

[12] SCHIZAS C, EVANS F J. APL and graph theory in dynamic systems analysis[J]. IEE Proceedings D (Control Theory and Applications), 1981, 128(3): 85. DOI:10.1049/ip-d.1981.0016

[13] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002

ZHENG Dazhong. Linear system theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002

[14] KALMAN R E. Mathematical description of linear dynamical systems[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, 1963, 1(2): 152. DOI:10.1137/0301010

[15] BATAGELJ V, MRVAR A. Pajek-analysis and visualization of large networks[C]//International Symposium on Graph Drawing. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001: 477. DOI:10.1007/3-540-45848-4_54

(编辑 苗秀芝)