DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201806145

考虑轴变形影响的零度弧齿锥齿轮传动误差计算研究

彭山东^{1,2}, 唐进元^{1,2}, 周元生^{1,2}

(1.高性能复杂制造国家重点实验室(中南大学),长沙 410083;2.中南大学 机电工程学院,长沙 410083)

摘 要:传动误差是评判弧齿锥齿轮啮合性能的重要指标之一,直接反映弧齿锥齿轮的传动啮合特性,其与轴系结构密切相 关.本文主要研究轴系结构与传动误差之间的正向设计计算方法,提出一种基于通用软件工具平台的考虑轴变形影响的弧齿 锥齿轮传动误差数值计算方法,并与国际先进弧齿锥齿轮设计软件(KIMoS软件)进行对比,验证本文计算方法.针对两种轴 系结构设计方案,应用本文方法分析轴变形对航空发动机弧齿锥齿轮传动误差的影响.分析计算结果表明:支撑形式对齿面 接触力的大小影响甚微,但支撑形式与轴的变形对传动误差的影响较大.通过改变轴系的支撑结构可以获得良好的弧齿锥齿 轮传动误差曲线.本文工作可为研究轴系结构与零度弧齿锥齿轮传动误差关系提供参考.

关键词: 弧齿锥齿轮;传动误差;轴变形;有限元分析

中图分类号: TH132.4 文献标志码: A 文章编号: 0367-6234(2019)07-0121-07

Considering the effect of shaft deformation for zero spiral bevel gear transmission error calculation

PENG Shandong^{1,2}, TANG Jinyuan^{1,2}, ZHOU Yuansheng^{1,2}

(1.State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing(Central South University), Changsha 410083, China;2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Transmission error, to a certain extent, is one of the most important indexes to evaluate the meshing performance of spiral bevel gears, which directly reflects the transmission meshing characteristics of the Spiral Bevel Gears and is closely related to the shafting structure. This paper mainly studies the positive design calculation method between shaft structure and transmission error, and proposes a numerical calculation method of the spiral bevel gear transmission error considering the influence of shaft deformation based on the common software tool platform. It is compared with the international advanced design software (KIMoS software) of spiral bevel gear to verify the calculation method of the paper. The influence of shaft deformation on the transmission error of aero-engine spiral bevel gears is analyzed aiming at two kinds of design schemes for shaft structures in this paper. The analysis results show that the different forms of support have little effect on the contact force of the tooth surface, but the support form and the deformation of the shaft have a greater impact on the transmission error. Good transmission error curve of spiral bevel gears can be obtained by changing the support structure of the shafting system. Therefore, the work of this paper can provide reference for studying the relationship between shafting structure and transmission error of spiral bevel gear.

Keywords: spiral bevel gear; transmission error; shaft deformation; finite element analysis

弧齿锥齿轮由于具有承载能力大、传动比大、重 合度高、传动平稳、噪声低等特点,成为航空航天、汽 车、工程机械等领域中动力传递过程中的关键部件. 其制造精度、安装质量、啮合性能的好坏对设备的效 率、工作噪声、运转精度、使用寿命甚至安全性能都 有着至关重要的影响.随着计算机技术的飞速发 展,使用计算机仿真螺旋锥齿轮齿面接触分析 (Tooth Contact Analysis,简称 TCA)和加载齿面接触 分析(Loaded Tooth Contact Analysis,简称 LTCA)^[1] 已经成为一种十分重要的方法,即在齿轮产品试制 之前,基于计算机软件对齿轮在载荷作用下的啮合 过程进行模拟仿真分析,以获得齿轮在真实工况条 件下的工作情况,对于缩短试制周期,降低试制成 本,提高试制质量具有不可替代的重要意义.国内 外许多学者对弧齿锥齿轮的接触分析进行了大量研 究,取得了一定的研究成果.汪中厚^[2]等提出一种 含有齿形误差和安装误差的高精度数字化真实齿面 的接触分析方法,该方法可以求解出加载条件下的 齿轮传动误差,主要考虑的是齿形误差和安装误差 因素对传动误差的影响.方宗德^[3-4]结合有限元法 和柔度矩阵法提出了弧齿锥齿轮加载齿面接触分析

收稿日期: 2018-06-22

基金项目:国家自然科学重点基金(51535012;U1604255);湖南省 重点研发计划(2016JC2001)

作者简介:彭山东(1994—),男,硕士研究生

通信作者: 唐进元, jytang@ 163.com

理论,该方法结合了齿面几何分析与力学分析,主要 研究边缘接触和有摩擦承载接触等问题对传动误差 的影响. 唐进元^[5-7]等基于加载接触有限元分析原 理,给出弧齿锥齿轮有限元加载接触分析模型的构 建方法,研究在轻载和重载情况下轮齿的接触力、啮 合刚度、传动误差变化情况,得到载荷对传动误差的 影响规律. Ding Han^[8-10]等基于空间共轭曲面啮合 理论,确定出弧齿锥齿轮齿面的点矢函数,建立了考 虑误差的弧齿锥齿轮轮齿加载接触分析方法,确定 了具有误差的弧齿锥齿轮齿面接触分析的初始接触 点;提出了考虑刀盘几何误差测量与补偿的齿面优 化修正方法,通过不断调整齿面接触分析的初始接 触点,得到了弧齿锥齿轮的良好的传动误差曲线. 苏进展^[11]等提出了弧齿锥齿轮四阶传动误差设计 方法,通过改变接触迹线方向和参考点位置来获得 四阶传动误差的表达式,但该方法只是基于齿面接 触分析予以实现,没有考虑轴系结构等因素的影响. 彭方进^[12-13]等根据动力学原理和 Lagrange 乘子约 束,考虑惯性载荷对螺旋锥齿轮动态啮合分析的影 响,提出一种新的有限元分析模型,分析惯性载荷对 螺旋锥齿轮传动误差等动态啮合特性的影响规律. 刘光磊^[14]等研究了安装误差对弧齿锥齿轮传动误 差曲线的影响,分析了传动误差曲线对各类型安装 误差变动的敏感性. 樊大伟[15]等分析了齿轮设计中 影响传动误差的因素,主要研究了齿距、齿轮形貌、 粗糙度、印迹位置形状以及材料等因素对传动误差 的影响. 贺敬良^[16]等研究了影响传动误差的因素, 依据齿面接触分析中轮齿应力集中和边缘接触等啮 合缺陷,进行了齿面修形,得到良好的传动误差曲 线. Litvin F L^[17-18]等通过局部综合法对弧齿锥齿轮 进行加载接触分析,主要分析了齿轮啮合时传动误 差的变化规律,没有考虑轴系结构以及轴变形对传 动误差的影响. P.J.Gamez-Montero^[19]等在齿轮轴上 施加旋转副,轮齿之间施加碰撞力,并且给输入轴上 添加转速,输出轴上添加扭矩的方法进行弧齿锥齿 轮的动态啮合分析,最终得到了转速、啮合力以及传 动误差的变化规律,但该动态啮合分析没有加入轴 系结构以及轴变形的影响. Simon^[20]对弧齿锥齿轮 的安装位置偏差、齿形误差等方面进行研究,把理论 齿面、载荷分布和传动误差与机床设定参数联系起 来进行分析,得出较理想的机床设定参数,但此方法 只考虑齿面误差、载荷分布、安装误差等因素对传动 误差的影响. O. Vogel^[21]等提出了一种基于生成过 程的一般数学模型的齿面接触分析新方法,直接计 算接触路径,精确确定接触路径的边界、接触点的传 动误差等参数,但没有考虑复杂的轴系结构以及轴

变形对接触性能的影响.上述文献主要基于调整卡 参数计算出齿面结构,分析载荷大小、安装误差、制 造误差等因素对弧齿锥齿轮传动误差的影响以及加 载接触分析结果中的传动误差与 TCA 结果中的传 动误差的异同与联系,而关于齿轮轴的变形,轴的支 撑刚度等轴系结构特征参数对啮合传动误差的研究 较少.轴的变形、轴系结构等对弧齿锥齿轮的传动 误差有着重要影响,故研究分析轴的变形、轴系结构 等因素对啮合传动误差的影响是很有必要的.

本文提出并验证了一种基于通用软件工具平 台,考虑轴变形、轴系结构的弧齿锥齿轮传动误差数 值计算方法;应用该计算方法,分析了一对高速重载 航空用弧齿锥齿轮在两种轴系支撑方案下的轮齿接 触情况,得到齿面接触力、接触轨迹、轮齿变形和传 动误差等实际啮合性能参数,为高性能、高精度弧齿 锥齿轮的设计与制造提供了重要参考.

1 考虑轴变形的传动误差数值计算方法

1.1 考虑轴变形的传动误差数值计算原理

齿轮副在某一时刻的啮合可以视为两个弹性体的接触过程,当施加载荷后,齿轮1和齿轮2相互靠近并产生接触.在接触点 *i* 处的变形协调条件为^[22]

 $u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + \varepsilon_i - x_s - d_i = 0.$ (1) 式中: $u_i^{(1)}$ 为齿轮1在*i*点的弹性变形; $u_i^{(2)}$ 为齿轮 2在*i*点的弹性变形; ε_i 为*i*点初始间隙,即齿面原始 误差,其值可以取为一个较小的定值; x_s 为两个齿轮 的刚体接近量,即齿轮副沿啮合线方向的静态传递 误差; d_i 为*i*点接触后的剩余间隙,其值可用有限元 方法获得.具体步骤为:划分六面体网格,得到初始 位置时两齿面之间的间隙;然后通过加载接触分析 得到加载点对应的变形,两者求差值就是接触后的 剩余间隙.

将式(1)中弹性变形 *u*_i 分为宏观变形和局部变 形两部分,同时考虑齿轮载荷平衡条件可以有

$$\begin{split} \lambda_g F_i &- u_{ci} + x_s + d_i = \varepsilon_i \\ \sum_{j=1}^n p_j &= P, \ p_j \ge 0, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} p_j &= C. \end{split}$$

式中: F_i 为接触点 i 的载荷,其值可以由公式计算; $\lambda_{i,j}$ 为宏观柔度系数,表示单位载荷作用在 j 点处 时,两轮齿在 i 点处产生的法向位移之和; λ_g 为宏观 变形柔度系数矩阵,将宏观变形柔度系数 $\lambda_{i,j}$ 按行 排列进行组装可以得到宏观变形柔度系数矩阵^[23]; u_{ci} 为接触点接触变形,其值可以由公式计算; p_j 是作 用在接触线上第 j 点的法向载荷;n 是同一啮合位置 接触线上的接触点的个数;P是齿轮传递的总载荷; C是该啮合位置轮齿的变形,其值可通过有限元方 法求解.

将接触线进行分段处理,计算每一个分段的接触变形,作为相应接触点的接触变形.有限长线接触弹性接触变形的计算公式为^[24]

$$\begin{split} u_{ci} &= \frac{F_i}{\pi E^* l} \ln \frac{6.59 l^3 E^* (R_1 + R_2)}{F_i R_1 R_2}, \\ E^* &= \left\{ \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right\}^{-1}, \\ l &= \sqrt[3]{\frac{6F_i J_1 R_1}{2E^* \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3F_i J_1 R_1}{E^* \pi}}, \\ J_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \xi}{(\sin^2 \xi + \lambda^2 \cos^2 \xi)^{1/2}} \mathrm{d}\xi, \\ F_i &= \frac{M}{r_i \cos \alpha_i \cos \beta_i}. \end{split}$$

式中:l为接触线的长度; R_1 , R_2 分别为两齿轮接触 点的主曲率半径; E_1 , E_2 为两齿轮的材料的弹性模 量; v_1 , v_2 为两齿轮材料的泊松比;M为驱动力矩; r_i 为点i到旋转轴的距离; α_i 为点i处的齿形角; β_i 为 点i处的螺旋角.

根据上式求得静态传动误差*x_i*后,将线长方向上的静态传递误差转化为角度方向上的传动误差为^[25]

$$x_{\theta} = \frac{x_s}{T(x)},$$
$$T(x) = T_0 t_r(x),$$
$$t_r(x) = 1 - tx.$$

式中:如图 1 所示, T(x) 为角 — 距离转换因子; T_0 为转换因子幅值的大小, 其值为 60; t 为转换因子随 着 x 变化的程度, 其值取为 0.1.





Fig.1 Distribution of angle-distance conversion factor on the tooth flank

有限元分析方法涉及众多领域,得到广泛的应用,关于弧齿锥齿轮的有限元 LTCA 接触 Newton-

Raphson 法求解逻辑流程可参考文献[26]. 有限元 分析软件 ABAQUS 把分析计算过程划分为很多个 载荷增量步,通过观察接触面间的相互作用状态来 判断从属节点在接触对上是否开放. 只有在进行多 次迭代得到每个增量步的合理解后,再求解下一个 增量步. 所有增量步响应的总和组成了非线性分析 的近似解.

1.2 传动误差的求解流程

为了求得齿轮的传动误差,基于变形协调方程 与受力平衡方程,对齿轮传动误差与轴变形的关系 进行了分析研究,其整体的计算流程如图 2 所示.先 根据给定的载荷 P 利用公式计算出接触点的载荷 F_i 和接触变形 u_{ci} ,然后利用有限元方法计算得到与轴 变形相关的啮合位置轮齿的变形 C 和啮合接触后接 触点之间的剩余间隙 d_i ,由轮齿变形可计算出轮齿 的宏观变形柔度系数矩阵 λ_g .最后将上述计算的参 数代入变形协调方程,通过求解方程可得到齿轮线 方向的静态传动误差 x_i ,利用公式转换之后得到角 度方向上的传动误差 x_{θ} .上述计算原理可借助于通 用的商用软件 ABAQUS、MATLAB 予以实现.



图 2 传动误差的求解流程

Fig.2 The process of solving the transmission error

2 基于实际轴系结构的传动误差数值 计算方法的应用与验证

2.1 实际的弧齿锥齿轮轴系结构支撑方案

为了考虑轴变形对传动误差的影响,对两种轴 系结构方案进行了分析计算.为了保证分析变量的 唯一性,两种方案中工况是一样的,不同的是功率输 入轴的支撑形式;图3所示方案中的支撑形式相当 于悬臂梁支撑,图4所示方案中的支撑形式相当于 简支梁支撑.其中,工况的确定主要来源于高速重 载航空用弧齿锥齿轮的实际工作条件以及环境,且 工况的选择需要保证弧齿锥齿轮在实际工作中不发 生边缘接触、偏载等啮合缺陷,要能够得到良好的齿 面接触区域、传动误差等齿面接触性能参数.



图 3 靠近齿轮端的支撑形式示意图(含工况)

Fig.3 Support form diagram close to the gear end (including operating conditions)



图 4 远离齿轮端的支撑形式示意图(含工况)

Fig.4 Diagram of the supporting form far from the gear end (including operating conditions)

2.2 零度弧齿锥齿轮设计参数

本文以一对航空用零度弧齿锥齿轮加工为例, 构建其三维几何模型和有限元分析模型,对两种轴 系结构方案下的齿轮进行加载接触分析.所用的弧 齿锥齿轮几何参数如表1所示.

2.3 弧齿锥齿轮有限元模型的构建

为了节省分析计算时间,提高计算效率,并且兼 顾计算精度,对参与接触的齿面和相应重要部位采 用较多的控制节点,网格也划分得较为密集;而在不 参与接触的齿面以及对分析结果影响不大的部位则 采用了较少的控制节点,相应的网格划分得也比较 稀疏.最终得到的有限元模型如图 5 所示.

表1 几何参数

Tab.1 Geometric parameters			
参数名称	小轮	大轮	
齿数	47	55	
模数	3	3	
齿面宽/mm	19	19	
压力角/(°)	20	20	
外锥距/mm	108.52	108.52	
根锥顶点超过轴交错点的距离/mm	0	0	
面锥顶点超过轴交错点的距离/mm	-0.91	-0.79	
根锥角/(°)	38.48	47.23	
节锥角/(°)	40.31	49.29	
面锥角/(°)	42.37	51.12	
螺旋角/(°)	5	5	
旋向	左旋	右旋	



(c)齿轮副

图 5 弧齿锥齿轮有限元模型

Fig.5 Spiral bevel gear finite element model 为了更加真实地模拟齿轮副的啮合运转,设定 以下的载荷以及边界条件:

1)为提高分析计算的精度并且兼顾计算时间, 分析所采用的网格类型为六面体网格(C3D8R).

2)设定四个静态分析步,为更加接近实际啮合 条件,必须保证最后两个分析步的载荷大小相同.

3)根据齿轮的实际工况,约束两个齿轮除了绕 自身轴线旋转自由度以外的其他所有自由度,并且 给主动轮施加一定的转角,给从动轮施加相应的转 矩载荷.

4)将大轮的凸面(凹面)和小轮的凹面(凸面)

定义为接触对,并设置切向无摩擦和法向硬接触等 接触属性.

2.4 计算结果及分析

基于上述有限元模型,本文就两种不同的支撑 形式对弧齿锥齿轮进行了加载接触分析,得到了两 种不同支撑形式下弧齿锥齿轮啮合的接触力,如图 6 与图 7 所示.根据分析提取出来的主从动轮转角 结果,利用数值计算得到两种支撑形式下齿轮传动 的传动误差曲线,如图 8 和图 9 所示.



图 6 远离齿轮端支撑形式下的齿面接触力

Fig.6 The tooth contact force in the form of a support away from the gear end



图 7 靠近齿轮端支撑形式下的齿面接触力



对比分析图 6 与图 7 可知:两种不同的支撑形式 下接触力的总体变化趋势是一样的,在靠近齿轮一端 的支撑形式下的接触力变化趋势比另外一种支撑形 式下接触力的变化趋势要缓慢稳定;在最大接触力位 置,远离齿轮一端的支撑形式下的接触力变化比较平 缓;而在靠近齿轮一端的支撑形式下,接触力在最大 峰值处变化趋势剧烈,产生了"尖顶".原因可能是在 靠近齿轮一端的支撑形式下,受齿轮轴的长度以及质 量的影响,使得最大接触力变化过渡较大,而由于齿 轮轴的抵抗作用,载荷对于整个齿轮系统的影响不是 很明显,所以靠近齿轮一端的支撑形式下接触力整体 变化趋势较缓慢稳定. 在具体数值方面,在靠近齿轮 端支撑形式下(图 3 所示)的齿面接触力最大值为 4 132.71 N,平均值为 815.306 4 N;远离齿轮端支撑形 式下(图 4 所示)的齿面接触力最大值为 4 125.29 N, 平均值为 735.234 8 N.



图 8 靠近齿轮端支撑形式下的齿轮传动误差

Fig.8 Gear transmission error in the form of support near the gear end



图 9 远离齿轮端支撑形式下的齿轮传动误差



对比分析图 8 与图 9 可知:两种不同支撑形式下, 齿轮传动误差的整体变化趋势一样,都是呈现周期性 变化. 在靠近齿轮端支撑形式下的最大传动误差为 12.521 8 arcsec,最小传动误差为11.791 2 arcsec;在远 离齿轮端支撑形式下的最大传动误差为 11.161 2 arcsec,最小传动误差为10.5363 arcsec.在 靠近齿轮端支撑形式下的传动误差曲线的波动幅值 和整体幅值均大于远离齿轮端的支撑形式下的传动 误差.原因在于:在靠近齿轮端的支撑形式下,整个 齿轮轴相当于是简化的悬臂梁,由于齿轮轴受载荷 作用发生变形,引起传动误差幅值波动较大,导致齿 程中,齿轮及其支撑系统产生变形都会使齿轮偏离 理论位置,产生附加的传动误差这一说法.这就为 降低齿轮传动误差,减少齿轮传动噪声、啮合冲击, 提高齿轮传动平稳性等研究提供了参考.

2.5 本文方法计算结果与 KIMoS 软件计算结果对比

KIMoS 软件是德国 KLINGELNBERG 公司研制 开发的螺旋锥齿轮计算应用软件,是一个模块化结 构的用于所有齿制螺旋锥齿轮计算机集成设计和制 造程序系统.主要用于无负载优化的齿面接触分 析,干扰分析,考虑实际齿面形态,真实载荷下的齿 面接触分析等,是一个快捷、使用简便、功能齐全的 螺旋锥齿轮计算软件.

为了验证本文提出的考虑轴变形影响的传动误差的数值计算方法,利用 KIMoS 软件对同一对弧齿锥齿轮在远离齿轮端的支撑形式下进行了加载接触分析,得到了同等载荷,相同转速等条件下的弧齿锥齿轮的传动误差曲线和接触印痕.其中传动误差曲线如图 10 所示.从图中可以看出小轮在转动角度为-7.5°~7.5°时,最大的传动误差为54.7 rad.而通过上述数值计算方法得到的相同工况条件下的弧齿锥齿轮的传动误差曲线如图 9 所示,其中传动误差最大值为 11.161 2 arcsec,换算为54.13 rad.比较数值计算的结果和 KIMoS 软件计算的结果可知,两种方法得到的传动误差曲线变化趋势一致,且最大传动误差的数值相差只有 1.1%,由此可知,论文提出的数值计算方法与 KIMoS 软件分析计算方法有殊途同归的结果.



图 10 基于 KIMoS 计算的弧齿锥齿轮加载接触传动误差 曲线

- Fig.10 The loaded transmission error curve based on the calculation of the KIMoS of spiral bevel gears
- 3 结 论

 1)提出了一种考虑轴变形影响的弧齿锥齿轮 传动误差数值计算方法,并以一对高速重载航空用 弧齿锥齿轮为例,与 KIMoS 软件进行对比验证,结 果表明论文提出的计算方法得到的结果与 KIMoS 软件计算结果基本一致.

2)不同的支撑形式对齿面接触力的大小影响 不大,但是由于受齿轮轴变形的影响,接触力变化的 程度不一样,这就导致啮合过程中传动平稳性发生 变化.

3)根据数值计算分析结果得到轴变形对传动 误差的影响较明显.在靠近齿轮一端的支撑形式 下,由于齿轮轴受载荷作用发生变形,引起了附加的 传动误差,导致齿轮的传动误差整体幅值变大.

参考文献

[1] 曾韬.螺旋锥齿轮设计与加工[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学, 1989

ZENG Tao. Spiral bevel gear design and processing [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 1989

- [2]汪中厚,李刚,久保爱三.基于数字化真实齿面的螺旋锥齿轮齿面 接触分析[J].机械工程学报,2014,50(15):1
 WANG Zhonghou, LI Gang, KUBO Aizoh. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on digital real tooth surfaces[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2014,50(15):1
- [3]方宗德,邓效忠,任东锋.考虑边缘接触的弧齿锥齿轮承载接触分析[J].机械工程学报,2002,38(9):69
 FANG Zongde, DENG Xiaozhong, REN Dongfeng. Loaded tooth contact analysis of spiral bevel gears considering edge contact[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2002,38(9):69
- [4]方宗德.齿轮轮齿承载接触分析(LTCA)的模型和方法[J].机械 传动,1998(2):2
 FANG Zongde. Model and method of gear tooth contact analysis (LTCA)[J]. Mechanical Transmission, 1998(2):2
- [5] 唐进元,蒲太平.加载螺旋锥齿轮接触轨迹变化规律的研究[J]. 机械科学与技术,2010,29(4):461
 TANG Jinyuan, PU Taiping. A study of contact path variation of a loaded spiral bevel gear[J].Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering,2010,29(4):461
- [6] 唐进元, 蒲太平. 基于有限元法的螺旋锥齿轮啮合刚度计算[J]. 机械工程学报, 2011, 47(11):23 TANG Jinyuan, PU Taiping. Spiral bevel gear meshing stiffness calculations based on the finite element method[J].Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11):23
- [7] 唐进元,卢延峰,周超.螺旋锥齿轮齿面接触分析改进算法研究
 [J]. 航空动力学报, 2009, 24(1):189
 TANG Jinyuan, LU Yanfeng, ZHOU Chao. Research on improved tooth contact analysis algorithm of spiral bevel gears [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(1):189
- [8] DING Han, TANG Jinyuan, SHAO Wen, et al. Optimal modification of tooth flank form error considering measurement and compensation of cutter geometric errors for spiral bevel and hypoid gears [J]. Mechanism & Machine Theory, 2017, 118:14
- [9] DING Han, TANG Jinyuan, ZHONG Jue, et al. A hybrid modification approach of machine-tool setting considering high tooth contact performance in spiral bevel and hypoid gears[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2016, 41:228

- [10] DING Han, ZHOU Yuansheng, TANG Jinyuan, et al. A novel operation approach to determine initial contact point for tooth contact analysis with errors of spiral bevel and hypoid gears [J]. Mechanism & Machine Theory, 2017, 109:155
- [11]苏进展,方宗德,蔡香伟. 弧齿锥齿轮四阶传动误差的设计
 [J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2014,42(1):29
 SU Jinzhan, FANG Zongde, CAI Xiangwei. Design of fourth-order transmission error of spiral bevel gear[J]. Journal of South China U-
- niversity of Technology(Natural Science Edition), 2014,42(1):29
 [12] 彭方进. 基于接触动力学的螺旋锥齿轮动态啮合性能有限元分
- [12] 57 近. 基] 按触动力学的感觉能因化动态喝自性能有限力分析研究[D]. 长沙:中南大学, 2010 PENG Fangjin. Finite element analysis of dynamic meshing perform-

ance of spiral bevel gears based on contact dynamics [D]. Chang-sha:Central South University, 2010

[13] 唐进元, 彭方进. 惯性载荷对螺旋锥齿轮动态啮合特性的影响 研究[J]. 振动与冲击, 2011, 30(3):161

TANG Jinyuan, PENG Fangjin. Influence of inertial load in dynamic meshing analysis of spiral bevel gears [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(3); 161

[14] 刘光磊,张瑞庭,赵宁,等.安装误差对航空弧齿锥齿轮传动误 差曲线的影响分析[J].航空发动机,2012,38(2):32

LIU Guanglei, ZHANG Ruiting, ZHAO Ning, et al. Analysis of influence of installation error on error curve of aeronautical spiral bevel gear transmission[J]. Aero Engine, 2012, 38(2): 32

 [15] 樊大伟,王殿秋,姚庆芬.弧齿锥齿轮设计中 TE 值影响因素及 控制方法[J].汽车工艺师,2017(5):56
 FAN Dawei, WANG Diangiu, YAO Oingfen. Influencing factors and

control methods of te value in spiral bevel gear design[J]. Automobile Technologist, 2017(5): 56

[16]何渠,贺敬良,何畅然,等.弧齿锥齿轮传动仿真分析及修形优化[J].北京信息科技大学学报(自然科学版),2014(6):37
HE Qu, HE Jingliang, HE Changran, et al. Simulation analysis and modification optimization of spiral bevel gear transmission[J]. Journal of Beijing University of Information Science and Technology (Natural Science), 2014(6): 37

[17] LITVIN F L, FUENTES A, HAYASAKA K. Design, manufacture,

stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears [J] . Mechanism & Machine Theory, 2006 , $41(1)\colon 83$

- [18] LITVIN F L, ZHANG Y. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears [J]. Forum, 1991,1(2):1
- [19] GAMEZ-MONTERO P J, CASTILL A R, KHARMASHTA M. Contact problem of a trochoidal-gear pump [J]. Interational Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48(12):1471
- [20]SIMON V. Influence of tooth errors and misalignments on tooth contact in spiral bevel gears[J]. Mechanism & Machine Theory, 2008, 43(10):1253
- [21] VOGEL O, GRIEWANK A, BÄR G. Direct gear tooth contact analysis for hypoid bevel gears [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2002, 191(36):3965
- [22]常乐浩,刘更,吴立言.齿轮综合啮合误差计算方法及对系统振动的影响[J].机械工程学报,2015,51(1):123
 CHANG Lehao, LIU Geng, WU Liyan. Determination of composite meshing errors and its influence on the vibration of gear system[J].
 Chinese Journal of Mechanical Engineering,2015,51(1):123
- [23] RINCON A F D, VIADERO F, IGLESIAS M, et al. A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions[J]. Mechanism & Machine Theory, 2013, 61(61):30
- [24] 丁长安,张雷,周福章,等. 线接触弹性接触变形的解析算法
 [J]. 摩擦学学报,2001,21(2):135
 DING Changan, ZHANG Lei, ZHOU Fuzhang, et al. Theoretical formula for calculation of line contact elastic contact deformation
 [J]. Tribology,2001,21(2):135
- [25] MOHAMAD E N, KOMORI M, MURAKAMI H, et al. Analysis of general characteristics of transmission error of gears with convex modification of tooth flank form considering elastic deformation under load[J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(6):2751
- [26] 曾攀. 有限元分析及应用(附光盘)[M]. 北京:清华大学出版 社, 2004

ZENG Pan. Finite element analysis and application (with CD) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004

(编辑 王小唯)