

DOI:10.11918/j.issn.0367-6234.201904021

实值闭式求根快速阵列测向算法

孟祥天,李 享,闫锋刚,薛敬宏

(哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院,山东 威海 264209)

摘 要: 谱峰搜索类多重信号分类 MUSIC(multiple signal classification,MUSIC)算法作为测向算法中的经典算法,由于具有良好的参数估计性能,因此被广泛使用.但由于庞大的计算量,提高了测向系统的复杂度以及研发成本.相比之下,利用多项式求根获取目标信源方位信息的求根 MUSIC(root multiple signal classification,root-MUSIC)算法降低了测向的计算复杂度.但由于 root-MUSIC 算法涉及复系数多项式求根运算,因此其计算量依然很大.为进一步有效降低算法的计算量,本文基于空间谱函数的极值处导数为零这一性质,提出一种基于实系数多项式闭式求根的快速阵列测向算法.所提算法利用坐标映射关系,在新的坐标系 u 域内构造一个与传统 z 域 root-MUSIC 算法同阶次的实系数求根多项式.同时,由于多项式的根关于实轴对称,利用 Bairstow 算法进一步将该实系数多项式分解为若干个二次多项式,最后利用一元二次方程求根公式直接给出对目标信源方位信息的估计结果.理论分析和仿真实验表明:新算法相比于传统 root-MUSIC 算法极大降低了计算量,提高了测向速度,同时保持了相同的估计精度.

关键词: DOA 估计;实系数多项式;坐标映射;Bairstow 算法

中图分类号: X703.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0367-6234(2019)11-0040-07

Fast array direction finding algorithm based on real-valued closed-form rooting

MENG Xiangtian, LI Xiang, YAN Fenggang, XUE Jinghong

(School of Information Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Weihai, Weihai 264209, Shandong, China)

Abstract: Multiple signal classification (MUSIC) algorithm by peak searching is a classical algorithm in direction finding algorithm, which has been widely used because of its good parameter estimation performance, while it needs huge amounts of calculation, which increases the complexity of the direction finding system and the development cost. In contrast, root-MUSIC algorithm that utilizes polynomial rooting to obtain the target source direction information can reduce the computational complexity of the direction finding. However, root-MUSIC algorithm involves complex-valued coefficient polynomial rooting operation, and its complexity is still high. To further effectively reduce complexity, a novel fast array direction finding algorithm based on the real-valued coefficient polynomial closed root finding was proposed. By utilizing coordinate mapping technique as well as the fact that the derivatives with respect to the extreme values of the MUSIC spectrum equal to zero, a new polynomial in the domain with the same order as root-MUSIC in the domain was constructed. Since roots of the polynomial were found symmetric about the real axis, the new polynomial could be further decomposed into several quadratic polynomials by exploiting Bairstow's method. Consequently, the target source direction information could be estimated by finding the roots of those quadratic polynomials with closed forms. Theoretical analysis and numerical simulation results show that the calculation complexity of the proposed method was significantly reduced compared with the standard root-MUSIC, and the direction finding speed was improved as the estimate accuracy remained the same.

Keywords: DOA estimation; real coefficient polynomial; coordinate mapping technique; Bairstow's method

多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)是应用于测向系统中信号波达方向(direction-of-arrival, DOA)估计的著名算法^[1-2],该算法基于已知的信号源个数,利用噪声与信号子空

间的正交性构造具有“超分辨力”的空间谱函数^[3-4],并通过谱峰搜索获取 DOA.通常,谱峰搜索的计算量异常庞大^[5],因此 MUSIC 算法的工程应用效果并不是十分理想^[6-8].为降低计算量,学者提出了求根 MUSIC(root-MUSIC)算法^[9],该算法是高效派生算法的典型代表^[10-11],具有良好的分辨性能.后来,一种利用酉变换对协方差矩阵进行实值分解的方法被提出^[12].此方法在实值 DOA 估计中被广泛采用,但由于算法所构造的是复系数多项式,在阶次较高的情况下,获取信源 DOA 的求根过程中涉及

收稿日期:2019-04-02

基金项目:国家自然科学基金(61501142);哈尔滨工业大学(威海)学科建设引导基金(WH20160107)和威海市科技发展计划项目

作者简介:孟祥天(1994—),男,硕士研究生

通信作者:闫锋刚,yfglion@163.com

复数运算, 计算复杂度较高^[13-14]. 在 root-MUSIC 算法的基础之上, 文献[15]基于阵列的范德蒙结构, 提出了一种利用接收数据构造多项式并求根的方法, 保证了在快拍数较少的情况下也能正常工作.

本文提出的基于实系数多项式闭式求根的 DOA 估计 (Real-Coefficient root-MUSIC, RC-root-MUSIC) 算法则利用变换域的思想, 进一步将复系数的求根多项式转化为同阶次的实系数求根多项式, 降低了计算复杂度. 最后在利用实值运算进行信源 DOA 的求解时, 运用了 Bairstow 快速算法^[16], 在保证计算精度的前提下提高了计算效率, 从而为 root-MUSIC 算法的工程化推进提供了理论依据.

1 信号模型及相关算法

1.1 信号模型

假设 XOY 平面存在 M 个相互独立的阵元, 以半波长等间距放置并组成均匀线阵 (uniform linear array, ULA) 模型. 考虑空间中存在 N 个远场窄带信号并且通道附加高斯白噪声, 定义 DOA 为信号与阵列法线的夹角^[2], 如图 1 所示. 则阵列接收数据为

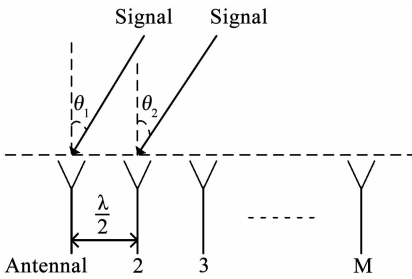


图 1 阵列模型

Fig. 1 Array model

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t),$$

式中: $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 为数据接收矢量, $\mathbf{S}(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 是空间信号矢量, $\mathbf{N}(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 为噪声信号矢量, $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 为空间导向矢量矩阵并且每一列的导向矢量可定义为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\tau_{i1}}, \dots, e^{-j\tau_{iM}}]^T, i \in [1, N].$$

式中 $j \triangleq \sqrt{-1}$ 为复数运算标志, τ_{ki} 为时延. 它的表达式为

$$\tau_{ki} = \frac{2\pi(k-1)d \sin \theta_i}{\lambda}.$$

式中: $d = \lambda/2$, λ 为入射信号的波长.

阵列接收数据协方差矩阵定义为^[1-2]

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}.$$

式中: $\mathbf{R}_s$ 为信号协方差矩阵, σ_n^2 为高斯白噪声功率. 对 $\mathbf{R}$ 进行特征值分解, 可得

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sum_{j=N+1}^M \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^H.$$

式中: $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ 为矩阵 $\mathbf{R}$ 的 N 个大特征值, $\lambda_j, j = N+1, \dots, M$ 为 $(M-N)$ 个小特征值, 由 λ_i 和 λ_j 分别对应的特征向量 $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{e}_j$ 构成了矩阵

$$\begin{cases} \mathbf{U}_s \triangleq [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N], \\ \mathbf{U}_n \triangleq [\mathbf{e}_{N+1}, \mathbf{e}_{N+2}, \dots, \mathbf{e}_M]. \end{cases}$$

则 $\mathbf{U}_s$ 和 $\mathbf{U}_n$ 的列向量分别张成了信号子空间和噪声子空间, 并且 $\text{span}(\mathbf{U}_s) \perp \text{span}(\mathbf{U}_n)$ 以及 $\text{span}(\mathbf{U}_s) = \text{span}(\mathbf{A})$.

1.2 MUSIC 算法

根据信号与噪声两者子空间的正交性, 在信号 DOA 方向有 $\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_n = 0$, 进一步可以通过 $\|\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_n\|$ 得到 MUSIC 空间谱函数

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta)}. \quad (1)$$

通过在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 进行遍历搜索, 找出式(1)的极大值点 θ 即为信源 DOA.

1.3 root-MUSIC 算法

根据上述阵列和信号模型, root-MUSIC 算法定义如下多项式

$$f_{\text{root}}(z) = \mathbf{p}^H(z)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{p}(z).$$

式中 $z = e^{j\omega}$, 导向矢量 $\mathbf{p}(z)$ 为

$$\mathbf{p}(z) = (1, z, z^2, \dots, z^{M-1})^T,$$

对 $f_{\text{root}}(z)$ 求根即可求得信号 DOA. 考虑到式中含有 z^* 项, 做如下修正

$$f_{\text{root}}(z) = z^{M-1} \mathbf{p}^T(z^{-1})\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{p}(z). \quad (2)$$

此时, 多项式 $f_{\text{root}}(z)$ 的阶数为 $2(M-1)$. 由于具有埃尔米特属性, 则其具有关于单位圆对称的 $M-1$ 对共轭根, 这 $M-1$ 对根中有 N 对根分布在单位圆上. 在实际应用中, 考虑误差的存在, 再得到 N 对靠近单位圆的根后, 可按式(3)求解信号 DOA

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(z_i)\right), i \in [1, N]. \quad (3)$$

root-MUSIC 以多项式求根代替谱峰搜索, 求解过程计算量减小.

2 实系数多项式闭式求根的快速 DOA 估计

2.1 实系数多项式 RC-root-MUSIC 算法

在 root-MUSIC 算法中, 根据式(2)令 $f_{\text{root}}(z) = 0$ 并求根即可获得信号 DOA. 但多项式展开后涉及复数计算, 复杂度较高. 为方便计算, 先对式(2)进行移项处理

$$f_{\text{root}}(z) = \mathbf{p}^H(z)z^{M-1}\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{p}(z).$$

然后令 $\mathbf{p}^H(z)z^{M-1} = \mathbf{p}^T(z)\mathbf{J}$, 其中变换矩阵 $\mathbf{J}$ 为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}. \quad (4)$$

此时, root-MUSIC 算法的表达式可等价为

$$f_{\text{root}}(z) = \mathbf{p}^T(z) \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{p}(z). \quad (5)$$

由于式(5)为复系数表达式, 直接进行求根运算, 计算相当复杂. 考虑到如果能够将复系数表达式实值化, 那么将为降低 root-MUSIC 算法的计算量提供了可能. 基于此分析, 引入新的变量 u 来进行坐标系的转换, 为后续的系数实值化进行预处理. 变量 u 定义如下

$$u(z) = -j \frac{z-j}{z+j}. \quad (6)$$

该变换将 root-MUSIC 谱函数 $f_{\text{root}}(z)$ 从传统的 z 域转换到 u 域, 其反变换为

$$z(u) = -j \frac{u-j}{u+j}. \quad (7)$$

显然, 对于给定的 z 域 DOA 有唯一的 u 域 DOA 与其对应, 则以 u 域和以 z 域得到的 DOA 具有相同的物理意义.

对于半波长 ULA, $w = \pi \sin(\theta)$. 当 $\theta \in [0, \pi/2]$ 时, 根据 $z = e^{jw}$ 及欧拉公式 $e^{jw} = \cos(w) + j\sin(w)$ 可知, $z \in [1, -1]$, 对应 z 平面的上半圆, 根据式(6)映射到 u 平面实轴上对应 $u \in [-1, 1]$. 同理当 $\theta \in [-\pi/2, 0]$ 时, u 平面上映射区间为 $u \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 如下图 2 所示.

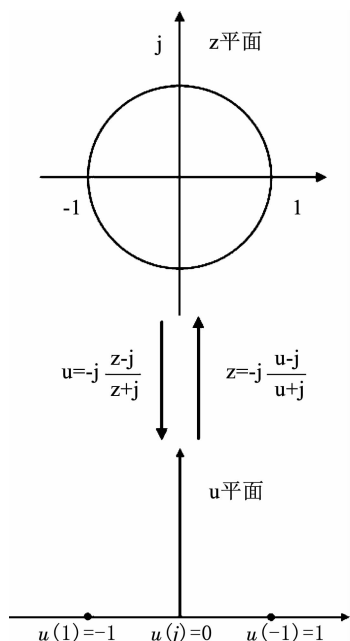


图 2 坐标轴的转换关系

Fig. 2 Coordinate transformation relationship

为进一步将复系数表达式转换为实系数表达式, 将式(7)代入导向矢量 $\mathbf{p}(z)$ 中, 可以得到 u 域中 $\mathbf{p}(u)|_{z(u)}$ 的每一个元素

$$p_m(u) = z^{m-1} = (-j)^{m-1} \left(\frac{u-j}{u+j} \right)^{m-1}, m \in [1, M].$$

定义新的变量 $\varphi(u)$

$$\begin{aligned} \varphi_m(u) &= p_m(u) \times (u+j)^{M-1} = \\ &A \times (u-j)^{m-1} (u+j)^{M-m}. \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $A = (-j)^{m-1}$. 可以看出由 $\varphi_m(u)$, $m \in [1, M]$ 组成的 $\varphi(u)$ 为 $M-1$ 阶多项式, 式(9)将 $\varphi(u)$ 用矩阵简化为

$$\varphi(u) = \mathbf{C} \mathbf{v}(u). \quad (9)$$

式中: $\mathbf{C}$ 为 $M \times N$ 维系数矩阵. 对于半波长 ULA 阵列, $\mathbf{C}$ 可以一次计算获得. $\mathbf{v}(u)$ 为范德蒙向量

$$\mathbf{v}_m(u) = u^{m-1}. \quad (10)$$

根据式(8)中 $\varphi(u)$ 和导向矢量 $\mathbf{p}(u)$ 的关系, $\mathbf{p}(u)$ 可进一步表示为

$$\mathbf{p}(u) = (u+j)^{1-M} \mathbf{C} \mathbf{v}(u). \quad (11)$$

将式(11)代入式(4)中可得 u 域中的 root-MUSIC 谱函数 $f_{\text{RC-root}}(u)$

$$\begin{aligned} f_{\text{RC-root}}(u) &= \mathbf{p}^T(u) \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{p}(u) = \\ &(u+j)^{2(1-M)} \times \mathbf{v}^T(u) \times \mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{C} \mathbf{v}(u). \end{aligned}$$

此时, 当 $u = -j$ 时 $f_{\text{RC-root}}(u) = 0$. 根据式(7)可知 $z = -\infty$, 故舍去. 从而获得修正后的 $f_{\text{RC-root}}(u)$

$$f_{\text{RC-root}}(u) = \mathbf{v}^T(u) \mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{C} \mathbf{v}(u). \quad (12)$$

可以看出式(12)是一个关于 u 的 $2(M-1)$ 阶多项式. 根据多项式求根的性质, 一个 $2(M-1)$ 阶多项式有 $2(M-1)$ 个根, 这些根可能为实根或复根. 如果这个多项式是实系数多项式或虚系数多项式, 那么它的复根将以共轭根对的形式呈现.

而在传统 root-MUSIC 算法中, 多项式的根关于单位圆镜像对称, 根据式(6)中 z 域和 u 域的转换关系可知, z 域的单位圆映射到 u 域后为实轴. 因此, 在 u 域中这些多项式的根关于实轴呈共轭对称, 如图 3 所示. 由此可以推出, 式(12)中 $f_{\text{RC-root}}(u)$ 为实系数多项式或虚系数多项式.

为进一步讨论 $f_{\text{RC-root}}(u)$ 中系数的实虚问题, 根据根的分布情况, 式(12)可做如下变换:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{C}, \\ f_{\text{RC-root}}(u) &= \mathbf{v}^T(u) \mathbf{Y} \mathbf{v}(u). \end{aligned} \quad (13)$$

以下根据 M 的奇偶性, 可分两种情况对式(13)进行化简.

情况 1: 阵元数 M 为奇数时, $\mathbf{Y}$ 为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} + jz_{11} & \cdots & y_{\xi\eta} + jz_{\xi\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\eta\xi} + jz_{\eta\xi} & \cdots & y_{MM} + jz_{MM} \end{bmatrix}_{M \times M}. \quad (14)$$

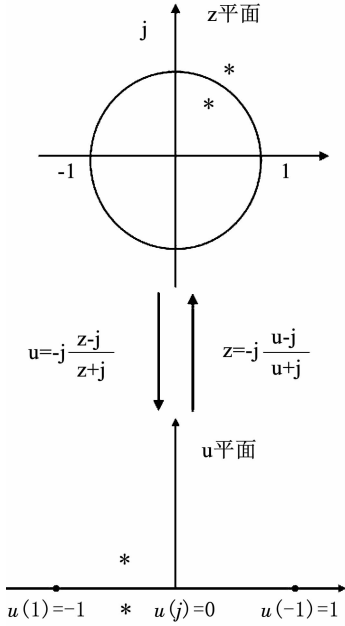


图 3 不同坐标系下根的分布情况

Fig. 3 Roots distribution in different coordinate systems

式中: $z_{\xi\xi} = 0, \xi \in [1, M], y_{\xi\eta} = y_{\eta\xi}, z_{\xi\eta} = -z_{\eta\xi}$. 由于在计算中式(14)的虚部被抵消, $\mathbf{v}(u)$ 为实向量, 此时式(12)中 $f_{\text{RC-root}}(u)$ 为实系数多项式. 为减少计算量, 式(12)可简写为

$$f_{\text{RC-root}}(u) = \mathbf{v}^T(u) \text{Re}\{\mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{C}\} \mathbf{v}(u), \quad (15)$$

情况 2: 阵元数 M 为偶数时, $\mathbf{Y}$ 为

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} + jz_{11} & \cdots & y_{\xi\eta} + jz_{\xi\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\eta\xi} + jz_{\eta\xi} & \cdots & y_{MM} + jz_{MM} \end{pmatrix}_{M \times M}.$$

式中: $y_{\xi\xi} = 0, \xi \in [1, M], y_{\xi\eta} = -y_{\eta\xi}, z_{\xi\eta} = z_{\eta\xi}$. 由上述变换同理可知, 式(12)中 $f_{\text{RC-root}}(u)$ 为虚系数多项式. 对等式两遍取虚部

$$f_{\text{RC-root}}(u) = \mathbf{v}^T(u) \text{Im}\{\mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{C}\} \mathbf{v}(u). \quad (16)$$

此时, 式(16)为实系数多项式, 具有和式(13)相同的解, 并且式(15)和式(16)均为 $2(M-1)$ 阶. 至此, z 域中的复系数多项式在经过坐标轴变换后全部转化为 u 域中实系数多项式. 最后根据式(17)可以得到传统的角度域和 u 域的关系

$$w = (-j) \times \ln(-j \times \frac{u-j}{u+j}). \quad (17)$$

如前文所述, RC-root-MUSIC 的中心思想就是将复数运算转化为同阶次的实数运算, 极大减少了计算量. 而在实际应用中可以继续利用 Bairstow 快速求根法对实系数多项式进行求解.

2.2 实系数多项式求解的 Bairstow 算法

RC-root-MUSIC 算法虽然减少了计算量, 但是所构造的实系数多项式具有和复系数多项式相同的阶数. 当 $2(M-1)$ 较大时, 求根运算依旧十分复杂.

考虑到实系数多项式具有关于实轴对称的根, 而 Bairstow 算法通过利用收敛的二次因子可以对实系数多项式进行快速求根. 由此分析, 假设: $x_1 = \alpha + j\beta$ 和 $x_2 = \alpha - j\beta$ 是 RC-root-MUSIC 中关于实轴对称的共轭根, 则可构造一个二次因子 $x^2 + \mu x + \nu$, 使 x_1, x_2 为二次因子的两个解. 设 n 阶实系数多项式为

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

通常, 实系数多项式除以一个二次因子时余项为一个线性项, 即多项式可以改写为

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = (x^2 + \mu x + \nu) Q(x) + R(x) = (x^2 + \mu x + \nu) \left(\sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k \right) + R(x). \quad (18)$$

式中: $Q(x)$ 为 $P(x)$ 除以二次因子 $x^2 + \mu x + \nu$ 的商, $R(x) = Cx + D$ 为余数. 同时, 式中各系数关系^[16]可通过式(19)至式(22)求出:

$$b_n = b_{n-1} = 0, \quad (19)$$

$$b_k = a_{k+2} - \mu b_{k+1} - \nu b_{k+2}, \quad (20)$$

$$C = a_1 - \mu b_0 - \nu b_1, \quad (21)$$

$$D = a_0 - \nu b_0. \quad (22)$$

从上述公式可以看出, 若给定 μ 和 ν 的值, 则可求得 C 和 D . 因此, 可把 C 和 D 看作 μ 和 ν 的函数, 即定义 $C = C(\mu, \nu), D = D(\mu, \nu)$. Bairstow 法就是利用牛顿法求解 μ 和 ν , 即构造雅克比矩阵求解其偏导数. 为得到 μ 和 ν 中偏导数项, 对 $P(x)$ 关于变量 μ 求导, 有

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = (x^2 + \mu x + \nu) \frac{\partial Q}{\partial \mu} + xQ + \frac{\partial C}{\partial \mu} x + \frac{\partial D}{\partial \mu} = 0.$$

为方便化简进行移项, 可得

$$-xQ = (x^2 + \mu x + \nu) \frac{\partial Q}{\partial \mu} + \frac{\partial C}{\partial \mu} x + \frac{\partial D}{\partial \mu}. \quad (23)$$

同理对 $P(x)$ 关于变量 ν 求导

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = (x^2 + \mu x + \nu) \frac{\partial Q}{\partial \nu} + Q + \frac{\partial C}{\partial \nu} x + \frac{\partial D}{\partial \nu} = 0.$$

并进行移项, 可得

$$-Q = (x^2 + \mu x + \nu) \frac{\partial Q}{\partial \nu} + \frac{\partial C}{\partial \nu} x + \frac{\partial D}{\partial \nu}. \quad (24)$$

为求解出系数再次用 $Q(x)$ 除以二次因子 $x^2 + \mu x + \nu$

$$Q(x) = (x^2 + \mu x + \nu) \left(\sum_{i=0}^{n-4} f_i x^i \right) + (Gx + H). \quad (25)$$

利用待定系数法将式(24)与式(25)联立, 可得其系数的内部关系如下:

$$\frac{\partial C}{\partial \nu} = -G,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \nu} = -H.$$

由假设可知, x_1, x_2 是 $x^2 + \mu x + \nu = 0$ 的两个解, 将其带入式(25)可进一步化简为

$$Q(x_{1,2}) = Gx_{1,2} + H.$$

(26)

将式(26)代入式(23)中得:

$$-x_1(Gx_1 + H) = \frac{\partial C}{\partial \mu}x_1 + \frac{\partial D}{\partial \mu}.$$

(27)

$$-x_2(Gx_2 + H) = \frac{\partial C}{\partial \mu}x_2 + \frac{\partial D}{\partial \mu}.$$

(28)

由二次多项式根与系数的性质, 得知:

$$x_1 + x_2 = -\mu,$$

(29)

$$x_1x_2 = \nu.$$

(30)

将式(27)至式(30)联立并求解方程组, 可将 C 和 D 中所有关于 μ 和 ν 的偏导数全部求出, 结论如下:

$$\frac{\partial C}{\partial \mu} = \mu G - H,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \mu} = \nu G.$$

由于 Bairstow 法仅限于实值运算并且每次仅求解多项式的一对共轭根, 因此将其应用于 RC-root-MUSIC 算法中将具有重要的工程意义. 根据上述性质, 借助实系数多项式求根的方法可以快速估计信号 DOA, 这就是本文提出的 RC-root-MUSIC 算法, 具体实施步骤如下

步骤一: 对阵列协方差矩阵 R 进行特征值分解, 得到信号子空间和噪声子空间;

步骤二: 根据式(5)构造矩阵 J , 并根据式(9)至式(10)构造矩阵 C 以及范德蒙向量 v ;

步骤三: 根据式(15)或(16)构造实系数多项式并利用 Bairstow 算法对其求根;

步骤四: 从所有根中找出接近实轴的 N 对共轭对称根, 根据式(17)求解出对应 w 的值;

步骤五: 根据 w 与 θ 的对应关系, 求解信号的波达角;

3 计算量分析

首先分析经典 MUSIC 和 root-MUSIC 算法的计算量. 由于这两种算法均包含协方差矩阵计算和特征值分解的步骤, 两者的实值总计算量共为 $4 \times M^2(N + M)^{[4]}$, 其中 $o(\cdot)$ 为实数运算. 通过文献[5]可知, 复数的运算量通常是实数的 4 倍, 因此, 总计算量为 $4 \times M^2(N + M)$. 再分别考虑不同经典算法进行求解 DOA 时的不同计算量, MUSIC 算法是通过谱峰搜索获得信源 DOA, 其计算量与在角度范围 $[-\pi/2, \pi/2]$ 内的搜索总点数 J 成正比(一般情况下, $J \gg M^3$). 而 root-MUSIC 则是通过多项式求根代替谱峰搜索, 计算量与多项式的阶数成正比.

接下来考虑所提出的 RC-root-MUSIC, 协方差矩

阵的计算和特征值分解均已考虑, 这里不再详细赘述. RC-root-MUSIC 的计算量主要体现在求根多项式的构建上, 以奇阵元为例. 式(24)中 J 和 C 可以通过离线求得, 单元 $o(6M^3 - 6NM^2)$ 给出了构造 RC-root-MUSIC 算法中的实系数多项式的计算量. 对算法所构造的 $2(M - 1)$ 阶多项式进行求根, 其计算量为 $o((2M - 2)^3)$. 可以得出结论见表 1.

表 1 不同算法的计算量分析

Tab. 1 Computational complexity analysis of different algorithms

算法名称	计算量
MUSIC	$o(4 \times M^2(N + M) + 4 \times J(M + 1)(M - N))$
root-MUSIC	$o(4 \times M^2(M + N) + 4 \times (2(M - 1))^3)$
RC-root-MUSIC	$o(4 \times M^2(N + M) + 6M^3 + 6NM^2 + (2(M - 1))^3)$

通过 RC-root-MUSIC 与 root-MUSIC 的计算量分析可以看出, RC-root-MUSIC 的计算量远小于 root-MUSIC. 当阵元数 M 较大时, RC-root-MUSIC 计算量的优势更加突出.

4 仿真及分析

4.1 root-MUSIC 和 RC-root-MUSIC 效率对比

为进一步确认 RC-root-MUSIC 相比于 root-MUSIC 性能的优越性, 本实验主要比较不同阵元数下两种算法的仿真时间. 假设采用 ULA 阵型, 两个入射信号的方向为 10° 和 45° , 信噪比 SNR 为 15 dB, 快拍数为 300.

root-MUSIC 与 RC-root-MUSIC 的 200 次蒙特卡洛实验运行总时长的对比如下表 2 所示. 为准确比较算法的运算速度, 两种算法中均包含的协方差矩阵 R 以及特征分解不在考虑范围之内. 由表 2 可以看出, RC-root-MUSIC 算法运算速度在大阵元情况下明显优于 root-MUSIC 算法.

表 2 运算速度对比表

Tab. 2 Comparison of calculation speed

阵元数/个	root-MUSIC/s	RC-root-MUSIC/s
8	11.157 0	4.535 1
16	64.573 0	16.018 5
24	184.995 4	25.045 9
32	328.254 7	54.482 1
40	709.807 6	73.452 9
56	1 823.250 3	123.813 0

4.2 root-MUSIC 和 RC-root-MUSIC 算法中根的分布情况

本实验主要验证 root-MUSIC 和 RC-root-MUSIC 在不同坐标系下根的分布情况. 假设采用 8 阵元的

ULA 阵型, 两个入射信号的方向为 10° 和 45° , SNR 为 15 dB, 快拍数为 300.

图 4 为 z 域中 root-MUSIC 所构造多项式的根分布情况. 由式 (10) 可知阵元数为 8 的情况下应拥有 $M-1=7$ 对根, 并且每对共轭根关于单位圆呈镜像对称, 含有 DOA 信息的根位于单位圆附近.

图 5 为 u 域中 RC-root-MUSIC 所构造多项式的根分布情况. 由式 (31) 可知有 $M-1=7$ 对关于实轴对称的根, 含有 DOA 信息的根位于实轴附近, 因此 RC-root-MUSIC 算法可以准确估计信号源的个数.

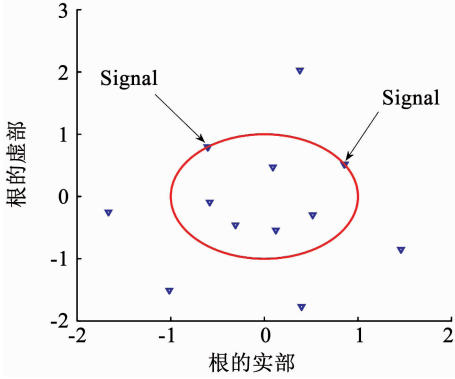


图 4 z 域中 root-MUSIC 根的分布

Fig. 4 Roots distribution map for root-MUSIC in the z domain

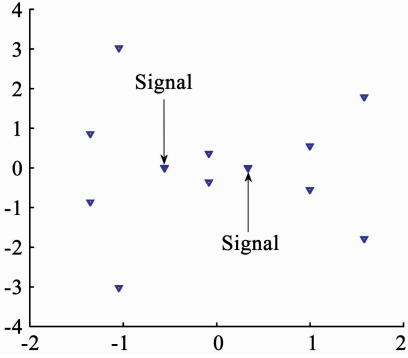


图 5 u 域中 RC-root-MUSIC 根的分布

Fig. 5 Roots distribution map for RC-root-MUSIC in the u domain

4.2 root-MUSIC 和 RC-root-MUSIC 精度对比

本实验用于分析信噪比和快拍数在不同范围内对估计精度的影响. 假设采用 8 阵元的 ULA 阵列, 两个入射信号的方向为 10° 和 45° , 蒙特卡洛试验次数为 200 次. 实验中采用均方根误差 RMSE 来描述角度估计的精度 R_{RMSE} 为

$$R_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\theta_i - \theta)^2}.$$

式中 θ_i 代表第 i 次蒙特卡洛实验得到的角度估计值. 同时, 引入 MUSIC 算法、求根 MUSIC 算法、酉求根 MUSIC 算法、ESPRIT 算法^[18]、实值求根 MUSIC 算法 (RV-root-MUSIC)^[19] 以及非限制克拉美罗下界

(Unconditional Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)^[17] 来衡量估计的性能. 其中, RV-root-MUSIC 算法利用协方差矩阵实虚部分离原理, 构建了一个 $2(M-1)$ 阶实系数求根多项式, 由于和本文所提出的 RC-root-MUSIC 算法具有相似性, 因此作为性能仿真中的对比算法.

由图 6 和图 7 可见, 本文提出的 RC-root-MUSIC 和经典的 root-MUSIC 算法具有相同的估计精度. 原因在于 RC-root-MUSIC 算法采用的是坐标系变换的方法, 其核心是坐标映射的关系. 将式 (15) 改写为 $u=f(z)$, 即 u 可以看作是 z 的函数. 在 RC-root-MUSIC 算法中, 先对 u 进行求解, 然后将结果反带回 z , 因此可以得出 RC-root-MUSIC 和 root-MUSIC 具有相同的解的结论, 从而两者具有相同的估计精度.

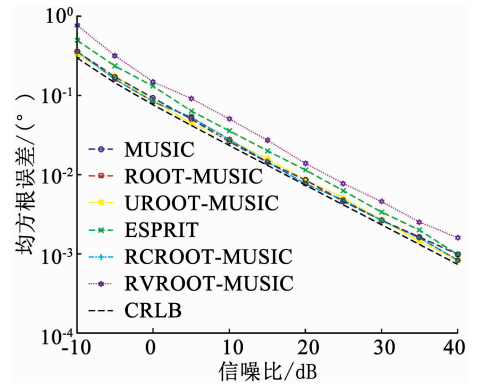


图 6 θ_1 信噪比对估计精度的影响

Fig. 6 Influence of SNR θ_1 on estimate accuracy

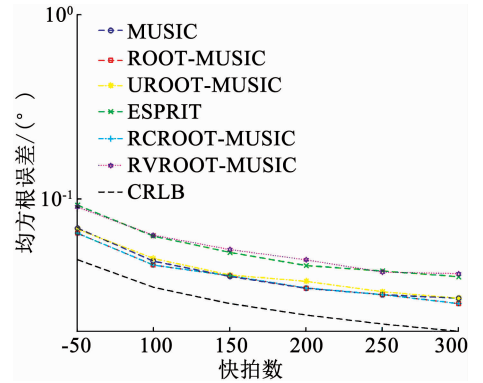


图 7 θ_1 快拍数对估计精度的影响

Fig. 7 Influence of snapshots number θ_1 on estimate accuracy

图 6 中当信噪比在 20 dB ~ 40 dB 的时候, root-MUSIC、RC-root-MUSIC、U-root-MUSIC 和 MUSIC 的 RMSE 呈直线下滑的趋势 4 种算法的 RMSE 优于 ESPRIT 算法和 RV-root-MUSIC 算法并且均逐渐趋近于 CRLB. 而图 7 中可以得到相同的结论, root-MUSIC 和 RC-root-MUSIC 两种算法的 RMSE 相同并趋近于 CRLB. 从性能图中可以看出, 本文所提出的

RC-root-MUSIC 算法具有和传统求根类算法相同的估计精度,同时优于新颖的 RV-root-MUSIC 算法。

5 结 语

本文在分析了高效超分辨算法中典型代表 root-MUSIC 算法的优缺点之后,先提出实系数多项式 root-MUSIC 算法,即 RC-root-MUSIC 算法,利用变换矩阵以及坐标系之间的映射,将复系数求根多项式转化为实系数求根多项式进行求解。再利用 Bairstow 算法,把一个复杂的实系数多项式逐步分解为多个一元二次多项式,实现了降次从而加快了求根的效率。最后通过计算机仿真,证明了所提出的算法保持了相同的 DOA 估计精度,降低了计算复杂度,并极大减少了计算时间,为 root-MUSIC 算法在工程应用中提供了强有力的理论依据。

参考文献

- [1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 243. DOI: 10.1109/TAP.1986.1143830
- [2] 王永良. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 18
WANG Yongliang. Theory and algorithm of spatial spectrum estimation[M]. Peking. Tsinghua University Press, 2004: 18
- [3] YAN Fenggang, JIN Ming, QIAO Xiaolin. Low-complexity DOA estimation based on compressed MUSIC and its performance analysis [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2013, 61(8): 1915. DOI: 10.1109/TSP.2013.2243442
- [4] YAN Fenggang, LIU Shuai, WANG Jun, et al. Real-valued root-MUSIC for DOA estimation with reduced-dimension EVD/SVD computation[J]. Signal Processing, 2018, 152:1. DOI: 10.1016/j.sigpro.2018.05.009
- [5] YAN Fenggang, CAO Bin, LIU Shuai, et al. Reduced-complexity direction of arrival estimation with centro-symmetrical arrays and its performance analysis [J]. Signal Processing, 2018, 142: 388. DOI: 10.1109/TSP.2013.2243442
- [6] 徐丽琴, 李勇. 单基 MIMO 雷达低复杂度求根 MUSIC 角度估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2017, 39(11): 2434
XU Liqin, LI Yong. Low-complexity root-MUSIC algorithm for angle estimation in monostatic MIMO radar[J]. Systems Engineering and Electronics, 2017, 39(11): 2434. DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2017.11.07
- [7] LIU Mingqian, ZHANG Junlin, TANG Jie, et al. 2-D DOA robust estimation of echo signals based on multiple satellites passive radar in the presence of alpha stable distribution noise[J]. IEEE Access, 2019, 7: 16032. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2894997
- [8] 闫锋刚, 沈毅, 刘帅, 等. 高效超分辨波达方向估计算法综述[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(7): 1465
YAN Fenggang, SHEN Yi, LIU Shuai, et al. Overview of efficient algorithms for super-resolution DOA estimation [J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(7): 1465. DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2015.07.01
- [9] BARABELL A. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction finding algorithms [C]. IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Boston, 1983: 336. DOI: 10.1109/ICASSP.1983.1172124
- [10] JENS S, FLORIAN R, MARTIN H, et al. Performance analysis of multi-dimensional ESPRIT-type algorithms for arbitrary and strictly non-circular sources with spatial smoothing [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2017, 65(9): 2262. DOI: 10.1109/TSP.2017.2652388
- [11] SHU Feng, QIN Yaolu, LIU Tingting, et al. Low-complexity and high-resolution DOA estimation for hybrid analog and digital massive MIMO receive array[J]. IEEE Trans. on Communications, 2018, 66(6): 2487. DOI: 10.1109/TCOMM.2018.2805803
- [12] MARIUS P, ALEX B, MARTIN H. Unitary root-MUSIC with a real-valued eigen-decomposition: A theoretical and experimental performance study[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2000, 5(48): 1306. DOI: 10.1109/78.839978
- [13] QIAN Cheng, HUANG Lei. Improved unitary root-MUSIC for DOA estimation based on pseudo-noise resampling [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(2): 140. DOI: 10.1109/LSP.2013.2294676
- [14] LI Jianfeng, LI Dong, JIANG Defu, et al. Extended-aperture unitary root-MUSIC based DOA estimation for coprime array[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(4): 752. DOI: 10.1109/LCOMM.2018.2802491
- [15] 何子远, 龚耀寰, 杨峰. 多项式求根法估计来波 DOA[J]. 电波科学学报, 2008, 23(3): 407
HE Ziyuan, GONG Yaohuan, YANG Feng. DOA estimation based on polynomial rooting method[J]. Journal of Radio Science, 2008, 23(3): 407. DOI: 10.3969/j.issn.1005-0388.2008.03.004
- [16] 郑士明. 同时求解多项式所有二次因子的迭代法[J]. 计算数学, 1980, 2(3): 229
ZHENG Shiming. An iteration method for finding all quadratic factors of polynomial simultaneously [J]. Journal of Computational Mathematics, 1980, 2(3): 229
- [17] Stoica P, Nehorai A. Performance study of array signal processing research: the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13: 67
- [18] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1989, 37(7): 984. DOI: 10.1109/29.32276
- [19] YAN Fenggang, SHEN Yi, JIN Ming. Fast DOA estimation based on a split subspace decomposition on the array covariance matrix [J]. Signal Processing, 2015, 115:1. DOI: 10.1016/j.sigpro.2015.03.008

(编辑 苗秀芝)