DOI:10.11918/201809058

一种2R1T类球面并联机构的瞬时速度分析

张国英[1,2], 刘冠峰[2], 管贻生[1]

(1.广东工业大学 机电工程学院, 广州 510006; 2.广东技术师范大学 机电学院, 广州 510665)

摘　要: 对一种2R1T(R表示旋转,T表示平移)的类球面并联机构进行了瞬时速度分析. 由于机构的动平台中心与基座中心始终关于过3个球关节的平面对称,利用几何法很容易获得动平台的位置解,然而机构的瞬时速度的计算则相对复杂,尤其是角速度的计算严重依赖姿态矩阵或完整雅克比矩阵的正确求解,并且计算效率低、容易出错. 为此,采用Riemann对称空间理论方法,从机构子链旋量系的对称性出发,建立各子链关节运动的约束,从而简化机构动平台瞬时速度的计算,机构所有可能的瞬时速度组成了一个线性空间,这个空间的基正好解释了机构的瞬时自由度. 最后,给出算例验证了该方法的正确性和有效性. 通过ADAMS(Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems,机械系统动力学)软件仿真与理论计算对比,角速度误差控制在−0.004~0.006 rad/s以内,线速度误差控制在−0.01~0.015 mm/s以内,采用对称空间理论方法计算瞬时速度用时5.187 s.

关键词: 并联机构;刚体运动;旋量系;对称子空间;对称映射

中图分类号: TH112　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 0367-6234(2020)01-0113-05

Instantaneous velocity analysis of a 2R1T spheroid parallel mechanism

ZHANG Guoying[1,2], LIU Guanfeng[2], GUAN Yisheng[1]

(1.School of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;
2. School of Mechatronic Engineering, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510641, China)

Abstract: The instantaneous velocity analysis of a 2R1T (R denotes rotation, T denotes translation) spherical parallel mechanism was performed. As the center of the moving platform of the mechanism and the center of the base are plane-symmetric about the three spherical joints, the position solution of the moving platform can be easily obtained by using geometric method, but the calculation of instantaneous velocity is relatively complicated. In particularly, the calculation of angular velocity is heavily dependent on the correct solution of the rotation matrix or the complete Jacobian matrix, and the calculation efficiency is low and error-prone. For this reason, the Riemann symmetric space theory method is used in this paper. Starting from the symmetry of the subchain screw system, the constraints on joint movement of each subchain are established and the calculation of instantaneous velocity is simplified. Instantaneous velocity forms a linear space of which the base just explains the instantaneous degree of freedom of the mechanism. Finally, an example is given to verify the correctness and effectiveness of the method. By comparing ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems) software simulation with theoretical calculation, the angular velocity calculation error is within a range of −0.004 rad/s~0.006 rad/s; and the linear velocity calculation error is within a range of −0.01 mm/s~0.015 mm/s, the calculation time is 5.187 seconds by using the symmetric space theory.

Keywords: parallel mechanism; rigid body motions; screw system; symmetric subspaces; reflective symmetry

两转一移(2R1T)并联机构因其自由度少、结构简单、制造成本低、适用于多种场合等优势,已引起国内外学者的广泛关注. 自Hunt[1]于1983年提出一种构型为3-RPS并联机构以来,2R1T并联机构的构型综合近年来在国内也掀起一股研究热潮[2-9]. 这类机构目前已成功应用于五轴混联机床的转动中心[10]、姿态调整装置[11]以及坐标测量机[12]等.

速度分析是并联机构运动性能分析和动力学分析的基础,属于微分运动的范畴,常用的分析方法有闭环矢量法、旋量法、影响系数法[13-14]和网络分析法[15]等. 前三种方法实质是求解速度映射即雅克比矩阵,一般通过对位置约束方程求导来获得速度映射关系,但在位置约束方程本身就很复杂的情况下,对其进行一阶求导就更加困难. 网络分析法以图论为基础,适合多环强耦合并联机构的速度和力

收稿日期: 2018-09-07
基金项目: 国家自然科学基金(51375095);广东省人民政府联合基金重点项目(U1401240);国家国际科技合作专项(2015DFA11700)
作者简介: 张国英(1980—),女,博士研究生;讲师;
刘冠峰(1975—),男,教授,博士生导师;
管贻生(1966—),男,教授,博士生导师
通信作者: 管贻生,ysguan@gdut.edu.cn

分析,对于少自由度并联机构的速度分析通用性不强.

为避开雅克比矩阵和位置导数的求解,本文在文献[9]的基础上,利用 Riemann 对称空间理论对一种自由度类球面并联机构进行了瞬时速度分析.从机构子链旋量系的对称性出发,建立各子链关节运动的约束,从而简化机构动平台瞬时速度的计算.根据计算和仿真的对比结果来看,角速度误差控制在 $-0.004\sim0.006$ rad/s 以内,线速度误差控制在 $-0.01\sim0.015$ mm/s 以内.采用对称空间理论方法计算瞬时速度用时 5.187 s.

1　机构描述及其坐标系建立

机构由等半径的动平台和基座以及 3 个相同的支链组成.在初始位形下,机构的几何简图如图 1 所示.3 个支链呈 120°均匀分布于基座和动平台之间.与基座相连的转动副记为 $B_i(i=1,2,3)$,它们的轴线相交于基座中心 O_B,与动平台相连的转动副记为 $D_i(i=1,2,3)$,它们的轴线相交于动平台中心 O_D;每条支链上的球副记为 $S_i(i=1,2,3)$,其空间布置为 $S_iO_B\perp O_BB_i, S_iO_D\perp O_DD_i$, $\|S_iO_D\|=\|S_iO_B\|$.任意位形下,动平台和基座关于 3 个球副所组成的平面 $S_1S_2S_3$ 对称,动平台可以绕对称面内的任意直线发生连续转动,也可以沿两平台中心连线方向进行连续平移.$O_DS_1S_2S_3O_B$ 为一个六面体,平面 $S_1S_2S_3$ 将此六面体分为上下对称的两部分,O_B 和 O_D 始终关于 S_1,S_2,S_3 组成的平面对称.

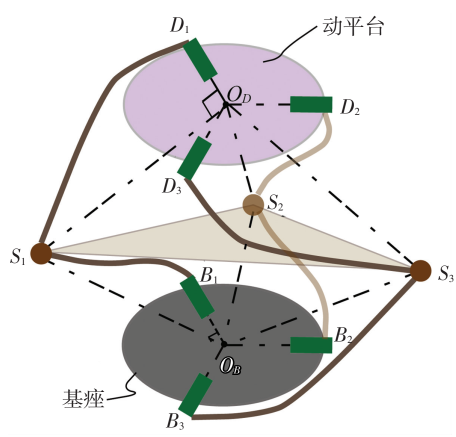


图 1　并联机构的几何简图

Fig.1　Geometric sketch of the parallel mechanism

建立基坐标系 O_Bxyz(记为 $\{F_W\}$)和动坐标系 O_Duvw(记为 $\{F_T\}$),如图 2 所示.初始位形下,基座与动平台平行,各转动副轴线也相互平行.$O_BO_D\perp S_1S_2S_3$ 交 $S_1S_2S_3$ 于点 M,$\|O_BM\|=\|O_DM\|$,$\|O_BS_i\|=\|O_DS_i\|=l$.

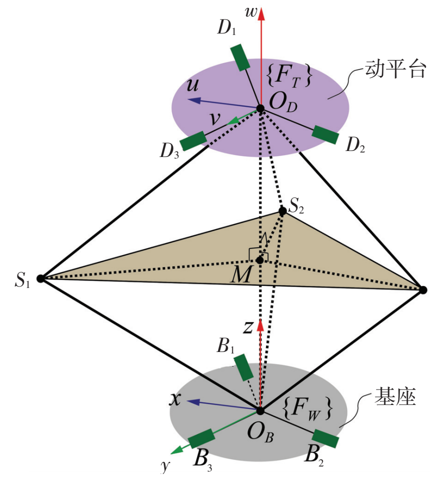


图 2　机构坐标系

Fig.2　Frames of the mechanism

2　位置正解

在基坐标系 $\{F_W\}$ 中,S_1,S_2,S_3 的位置由驱动副 B_i 的转角 $\alpha_{ia}(i=1,2,3)$ 和 l 决定,可写为

$$S_i=\boldsymbol{R}_i\ [-lc\alpha_{ia},0,ls\alpha_{ia}]^{\mathrm{T}},\tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix}c\beta_i & -s\beta_i & 0\\ s\beta_i & c\beta_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\beta_i=\frac{(6-2i)\pi}{3},(i=1,2,3).$$

对称平面方程 $ax+by+cz+d=0$ 由各球副的位置坐标确定,满足下式:

$$\begin{bmatrix}S_1(x) & S_1(y) & S_1(z) & 1\\ S_2(x) & S_2(y) & S_2(z) & 1\\ S_3(x) & S_3(y) & S_3(z) & 1\\ x & y & z & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}=0.\tag{2}$$

根据点关于平面对称点的求解原理,容易得到动平台中心 O_D 在 $\{F_W\}$ 下的位置坐标:

$$\begin{cases}x_{O_D}=-2ad/A,\\ y_{O_D}=-2bd/A,\\ z_{O_D}=-2cd/A.\end{cases}\tag{3}$$

其中,$A=a^2+b^2+c^2$.展开式(3)即可求得机构的位置正解为

$$\begin{cases}x_{O_D}=\dfrac{-6lm_1m_4}{m_2{}^2+3m_3{}^2+3m_4{}^2},\\ y_{O_D}=\dfrac{-2\sqrt{3}lm_1m_2}{m_2{}^2+3m_3{}^2+3m_4{}^2},\\ z_{O_D}=\dfrac{-6lm_1m_3}{m_2{}^2+3m_3{}^2+3m_4{}^2}.\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} m_1 = c_1c_3s_2 + c_2s_{13}, \\ m_2 = 2c_3(s_1 - s_2) + c_2(s_1 - s_3) + c_1(s_3 - s_2), \\ m_3 = c_2c_3 + c_1(c_2 + c_3), \\ m_4 = s_{12} - s_3(c_1 + c_2). \end{cases}$$

s_i 表示 $\sin\alpha_{ia}$，c_i 表示 $\cos\alpha_{ia}$，s_{12} 表示 $\sin(\alpha_{1a} + \alpha_{2a})$，$s_{13}$ 表示 $\sin(\alpha_{1a} + \alpha_{3a})$.

3　瞬时速度分析

3.1　Riemann 对称空间理论

定义 1[16]　设 p 是 Riemann 流形 M 中的一点，如果存在 M 的一个变换 $\sigma_p: M \to M$ 满足下面 3 个条件：

1）σ_p 是对合的，即 ${\sigma_p}^2 = \mathrm{id}$（id 表示恒等变换）但 $\sigma_p \neq \mathrm{id}$；

2）σ_p 是保长变换（即等距变换）；

3）p 是 σ_p 的孤立不动点，即有 p 的邻域 U，使得 $\forall q \in U, \sigma_p(q) = pq^{-1}p$.

则称 M 对于 p 成中心对称，σ_p 叫作关于 p 的中心对称.

定义 2　如果一个 Riemann 流形 M 对于 M 中任意一点 p,q 都成中心对称，则称 M 为 Riemann 对称空间（简称对称空间）.

Riemann 对称空间的 2 个典型例子就是欧几里德空间和球体[17]. 在机构学中存在一种符合 Riemann 对称的并联机构，它是一类具有对称几何结构支链的并联机构. 每条支链可分为相连的两个子支链（C_+，C_-），如图 3 所示. 它们的运动副的空间分布满足一种特殊的对称，即可以通过符号相反的一对运动 $\{\varphi, -\varphi\}$ 使得两个子链重合为一个子链.

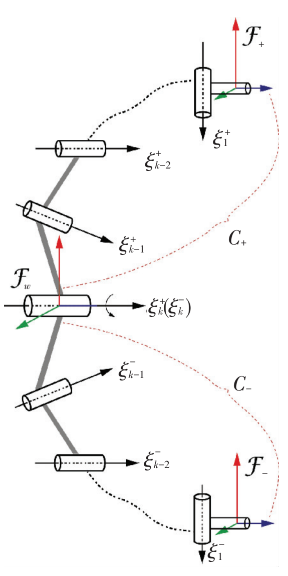


图 3　对称并联机构的子支链图

Fig.3　Riemann symmetric space and equivalent subchains

如果重合子链的旋量系为 $\xi_k, \cdots, \xi_1$，则原有支链的 2 个子支链的旋量系为

$$\xi_k(\varphi), \cdots, \xi_1(\varphi), \xi_k(-\varphi), \cdots, \xi_1(-\varphi).$$

容易得到子链 $\{C_+ + C_-\}$ 的运动学正解为

$$f(\alpha) = e^{\xi_1(\alpha_1+\varphi_1)} \cdots e^{\xi_k(\alpha_k+\varphi_k)}\ e^{\xi_k(\alpha_k+\varphi_k)} \cdots e^{\xi_1(\alpha_1+\varphi_1)}$$

如果在刚体运动群 SE(3) 上定义一个反射映射：$\sigma_p(q) = pq^{-1}p$，则上述子链的正向运动学可以写为

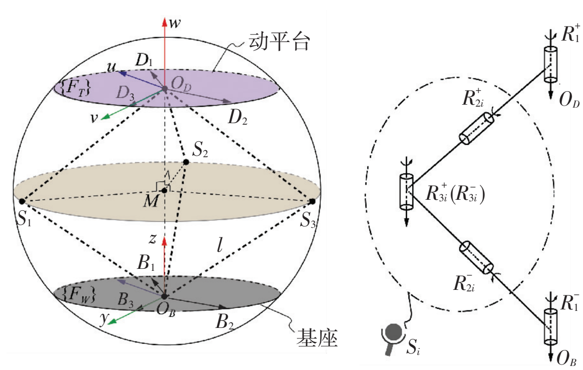
$$f(\alpha) = \sigma_{e^{\xi_1(\alpha_1+\varphi_1)}}(\sigma_{e^{\xi_2(\alpha_2+\varphi_2)}})(\cdots\sigma_{e^{\xi_k(\alpha_k+\varphi_k)}}(e)\cdots).$$

考虑与 f 像空间对应的 SE(3) 的子流形 Q. 由于 f 是多个反射的组合，Q 必须是 SE(3) 的对称子空间.

定理 1　如果 $T_eQ = \xi_k, \cdots, \xi_1 \subset \mathrm{SE}(3)$，则 f 的像空间包含 Q 的关于 e 的一个邻域.

定理 2　如果并联机构的所有支链的约束空间的和正好是 T_eQ 的正交补，则并联机构的任务空间包含 Q 的关于 e 的一个邻域. 并且每条子链的 C_+，C_- 转过的角度正好相反.

本机构任意时刻的运动都可以想象为在一个球体（或椭球体）内进行. 动平台与基座始终对称，对称面为过 S_1, S_2, S_3 的圆面（或椭圆面），如图 4(a) 所示. 由于球副 S 可以等效 3 个转动副 R 串联，各等效转动副的交点为球副的中心，故将本机构中各支链的球副 $S_i(i=1,2,3)$ 局部等效为 3 个轴线相交于球副中心的转动副 $R_2^-, R_2^+, R_3^+(R_3^-)$，如图 4(b) 所示，$R_2^-$ 的轴线沿 S_iO_B 方向，R_2^+ 的轴线沿 S_iO_D 方向，$R_3^-(R_3^+)$ 的轴线位于对称面 $S_1S_2S_3$ 内且与连接两平台的转动副轴线同向. 这样，机构的每条支链上下两部分可以相互折叠后重合，成为在对称平面里的同一个 RRR 结构.



（a）　　（b）

图 4　Riemann 对称空间及支链等效图

Fig.4　Riemann symmetric mechanism and equivalent subchains

至此可以得出结论：本机构是一个具有 Riemann 对称空间性质的机构，其每条支链经过等效处理后，支链的上下 2 条子链也是对称的，因此，上子链与动平台的夹角和下子链与基座的夹角相互

为负. 即转动副 B_i, D_i 的转角关系为: $\alpha_{ip} = -\alpha_{ia}(i = 1,2,3)$, 其中 α_{ia} 为平面 $O_B B_i S_i$ 与基座的夹角, α_{ip} 为平面 $O_D D_i S_i$ 与动平台的夹角. 以 B_3, D_3 的转角关系 $\alpha_{3p} = -\alpha_{3a}$ 为例,如图 5 所示.

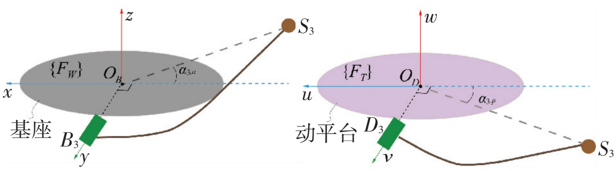


图 5 转动副 B_3, D_3 的转角

Fig.5 Angles of revolute joint B_3 and D_3

3.2 等效瞬时速度空间

构造运动旋量 $\xi_i(i = 1,2,3)$ 与每个关节对应,它表示第 i 个关节的旋量运动,此时除第 i 个关节外其他所有关节均固定于 $\alpha_{ja} = 0$ 的位置. 在研究转动关节时,其运动旋量 ξ_i 可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_i \\ \boldsymbol{w}_i \times \boldsymbol{q}_i \end{bmatrix}_{6\times 1}. \tag{5}$$

其中, $w_i \in R^3$ 表示旋转轴线上单位矢量, $q_i \in R^3$ 表示轴线上任一点. 对移动关节有

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix}_{6\times 1}. \tag{6}$$

下面分别以机构的 3 种特殊运动为例,推导其运动旋量表达式.

1)第一种特殊运动:固定 S_1,S_2, 让 S_3 自由运动(即锁定 α_{1a},α_{2a}, 让 α_{3a} 做有限转动). 此时,机构在初始位形下非奇异,如图 6 所示,由于 α_{1a} 和 α_{2a} 固定,所以 α_{1p} 和 α_{2p} 固定,根据对称性知 $\alpha_{1p} = -\alpha_{1a},\alpha_{2p} = -\alpha_{2a}$. 那么动平台、平面 $S_1D_1O_D$ 和平面 $S_2D_2O_D$ 形成一个刚体,动平台将只能绕 $\overrightarrow{S_1S_2}$ 作旋转运动.

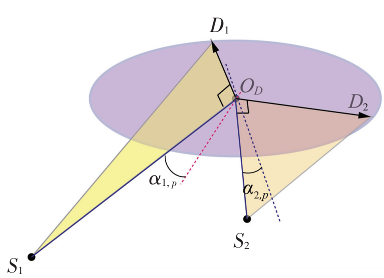


图 6 第一种运动:固定 S_1, S_2,让 S_3 自由运动

Fig.6 Motion pattern Ⅰ: fix S_1,S_2 and free S_3

该运动情形下的运动旋量为

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \left[\left(\frac{S_1 - S_2}{\| S_1 - S_2 \|}\right)^{\mathrm{T}}, \left(O_D S_1 \times \frac{S_1 - S_2}{\| S_1 - S_2 \|}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

2)第二种特殊运动:固定 S_1,S_3,让 S_2 自由运动(即锁定 α_{1a},α_{3a}, 让 α_{2a} 自由变化). 同上面的第一种运动模式类似,由于 α_{1a} 和 α_{3a} 固定,则 α_{1p} 和 α_{3p} 固定, $\alpha_{1p} = -\alpha_{1a},\alpha_{3p} = -\alpha_{3a}$. 同理,动平台、平面 $S_1D_1O_D$ 和平面 $S_3D_3O_D$ 形成一个刚体,动平台将只能绕 $\overrightarrow{S_1S_3}$ 作旋转运动. 该情形下的运动旋量为

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \left[\left(\frac{S_3 - S_1}{\| S_1 - S_3 \|}\right)^{\mathrm{T}}, \left(O_D S_3 \times \frac{S_3 - S_1}{\| S_1 - S_3 \|}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

3)第三种特殊运动:固定 S_2,S_3, 让 S_1 自由运动(即锁定 α_{2a},α_{3a}, 让 α_{1a} 自由变化). 同理 $\alpha_{2p} = -\alpha_{2a},\alpha_{3p} = -\alpha_{3a}$. 动平台、平面 $S_2D_2O_D$ 和平面 $S_3D_3O_D$ 形成一个刚体,动平台将只能绕 $\overrightarrow{S_2S_3}$ 作旋转运动. 该情形下的运动旋量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left[\left(\frac{S_2 - S_3}{\| S_3 - S_2 \|}\right)^{\mathrm{T}}, \left(O_D S_2 \times \frac{S_2 - S_3}{\| S_3 - S_2 \|}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

运动旋量系 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\}$ 等效为绕对称面 $S_1S_2S_3$ 内任意一条直线的转动(2 个旋转自由度),以及沿对称面法线方向的平移(1 个平移自由度),其维数等于机构的自由度数,很好地解释了类球面并联机构 2R1T 的自由度性质,物理意义明确.

由于动平台的运动是由 3 个驱动关节共同作用引起,其运动可以由旋距为零的速度旋量来描述:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} s \\ r \times s \end{pmatrix}. \tag{10}$$

其中, $\dot{\theta}$ 为驱动关节的角速度. 因此本文并联机构的瞬时速度可以写成运动旋量系 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\}$ 与驱动关节速度 $\dot{\alpha}_{1a},\dot{\alpha}_{2a},\dot{\alpha}_{3a}$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{\xi} = \dot{\alpha}_{1a}\boldsymbol{\xi}_1 + \dot{\alpha}_{2a}\boldsymbol{\xi}_2 + \dot{\alpha}_{3a}\boldsymbol{\xi}_3. \tag{11}$$

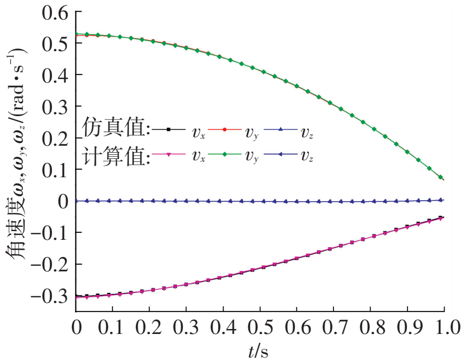
式中, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 分别为驱动关节 B_1,B_2,B_3 在基坐标系下的等效运动旋量, $\boldsymbol{\xi}$ 的集合就构成了机构末端在基坐标系下的速度空间.

4 计算与仿真

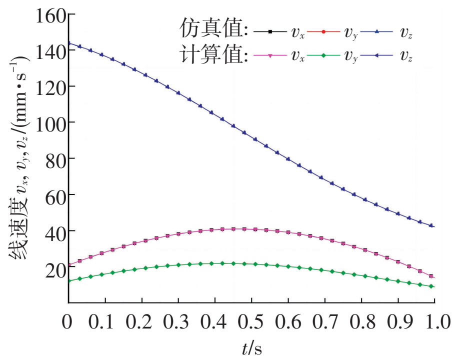
选取机构主要参数为: $l = 100$ mm. 不失一般性,令驱动关节的角位移分别为

$$\begin{cases} \alpha_{1a} = \sin(\pi t/6), \\ \alpha_{2a} = \sin(\pi t/4), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \alpha_{3a} = \sin(\pi t/3). \end{cases} \tag{12}$$

根据式(1)~(11)对动平台的瞬时速度(包括角速度和线速度)进行 ADAMS 仿真并与 Mathematica 计算结果进行对比,结果如图 7 所示. 由图 7 可知,仿真结果与理论计算几乎完全吻合,说明采用对称空间理论分析机构的瞬时速度是正确、可行的.



(a) 角速度的仿真值与计算值对比



(b) 线速度的仿真值与计算值对比

图 7　基于对称空间理论的瞬时速度计算与仿真

Fig. 7　Instantaneous velocity computed and simulated by symmetric space theory

5　结　论

对一种对称结构的 3 自由度类球面并联机构进行了位置分析. 由于位置解析式较为复杂,若通过对其进行一阶求导或推导其雅克比矩阵的方式来获得机构的瞬时速度将是十分困难的事情. 为简化计算,利用对称空间理论,从机构子链旋量系的对称性出发,建立各子链关节运动的约束. 由于机构有三个驱动关节,每次锁定 2 个驱动关节,只让 1 个关节运动,这样就可以得到 3 种特殊的运动及其运动旋量,这些运动旋量和对应的驱动关节速度的线性组合构成了机构的瞬时速度空间. 这个空间的基正好解释了机构的自由度性质为两旋转一平移,物理意义明确,计算方法简单.

参考文献

[1] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, 105(4): 705

[2] 汪满新, 黄田. 1T2R3 自由度并联机构拓扑结构综合[J]. 机械工程学报, 2015, 51(17): 1
WANG M X, HUANG T. Type synthesis of 1T2R 3-DOF parallel mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(17): 1

[3] 杨启志, 訾鹏飞, 曹电锋, 等. 一种基于并联机构的 2R-1T 运动平台设计[J]. 机械设计与研究, 2012, 28(5): 15
YANG Q Z, ZI P F, CAO D F, et al. Study on a 2R-1T moving platform based on parallel mechanism[J]. Machine Design and Research, 2012, 28(5): 15

[4] 王飞博, 吴伟峰, 陈祥, 等. 基于运动/力传递特性的 1T2R 并联机构构型优选[J]. 机械工程学报, 2014, 50(23): 20
WANG F B, WU W F, CHEN X, et al. Optimal type selection of 1T2R parallel mechanisms based on motion/force transmissibility [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(23): 20

[5] 付铁, 韩信, 朱涯涯, 等. 基于李群理论的 2R1T 并联机构构型综合[J]. 北京理工大学学报, 2014, 34(11): 1106
FU T, HAN X, ZHU Y Y, et al. Type synthesis of 2R1T parallel mechanism based on Lie group theory [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014, 34(11): 1106

[6] FAN Caixia, LIU Hongzhao, ZHANG Yanbin. Type synthesis of 2T2R, 1T2R and 2R parallel mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 61: 184

[7] DUAN Zhixiang, YU Jingjun, QU Yufeng, et al. Type synthesis and axodes analysis of a class of special 2R1T parallel mechanisms [C]//Iftomm World Congress. Taiwan: Industrial Technology Research Institute, 2015: 299

[8] 陈子明, 张扬, 黄坤, 等. 一种无伴随运动的对称两转一移并联机构[J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 9
CHEN Z M, ZHANG Y, HUANG K, et al. Symmetrical 2R1T parallel mechanism without parasitic motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 9

[9] 张国英, 廖亚军, 梁峰, 等. 一种类球面并联腕部机构及其运动学分析[J]. 机器人, 2017, 39(2): 167
ZHANG Guoying, LIAO Yajun, LIANG Feng, et al. A spheroid parallel wrist mechanism and its Kinematic analysis [J]. Robot, 2017, 39(2): 167

[10] 于靖军, 裴旭, 宗光华. 机械装置的图谱化创新设计[M]. 北京:科学出版社, 2014

[11] 王永, 姚太克, 周烽, 等. 望远镜副镜的三自由度并联支撑构型研究与运动分析[J]. 光学精密工程, 2013, 21(11): 2860
WANG Yong, YAO Taike, ZHOU Feng, et al. Type synthesis of 3-DOF parallel support system for telescope secondary mirror [J]. Optics and Precision Engineering, 2013, 21(11): 2860

[12] LIU Dejun, CHE Rensheng, LI Zifang, et al. Research on the theory and the virtual prototype of 3-DOF parallel-link coordinate-measuring machine [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2003, 52(1): 119

[13] LI Shihua, ZHEN Huang. Instantaneous kinematic characteristics of aspecial 3-UPU parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 18(3): 376

[14] 淡卜绸, 鲁开讲, 郭旭侠, 等. 基于影响系数法的平面 3RRR 并联机构运动求解研究[J]. 机械设计与制造, 2016 (8): 90
DAN Bochou, LU Kaijiang, GUO Xuxia, et al. Analysis on motion-solving and simulation for planar 3RRR parallel mechanism based on influence coefficient method[J]. Machinery Design & Manufacture, 2016 (8): 90

[15] 黄田, 李江, 曾子平, 等. 空间机构运动学的网络分析方法[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 1995 (1): 1
HUANG Tian, LI Jiang, ZENG Ziping, et al. Kinematics of multi-loop spatial kinematic chains using network analysis[J]. Journal of Tianjin University(Natural Science and Engineering Technology Edition), 1995 (1): 1

[16] 孟道骥, 史毅茜. Riemann 对称空间[M]. 天津: 南开大学出版社, 2005

[17] OSIPOVA D. Symmetric submanifolds in symmetric spaces[J]. Differential Geometry & Its Applications, 2002, 16(3): 199

（编辑　王小唯）