

DOI:10.11918/201901184

# 一类非线性 MIMO 系统的自解耦控制

肖友刚<sup>1,2</sup>, 卢 浩<sup>1,2</sup>, 王辉堤<sup>1,2</sup>, 韩 锐<sup>1,2</sup>

(1.中南大学 交通运输工程学院,长沙 410075;2.轨道交通安全技术国际合作联合实验室(中南大学),长沙 410075)

**摘 要:**为解决传统解耦算法在非线性  $m$  输入  $m$  输出(MIMO)系统中参数整定工作量非常大、整体控制性能不佳的问题,提出非线性 MIMO 系统的自解耦(self-decoupling control,SDC)法. SDC 法利用统一的线性扩张状态观测器(LESO)对系统中的耦合部分、非线性部分及扰动部分进行估计并补偿,通过设计合适的控制律实现系统各环节的自解耦,且将系统待整定的参数减少为一个,并应用 Lyapunov 方法证明了 SDC 法的稳定性. 两个算例的仿真结果表明:SDC 法不仅减少了 MIMO 系统的待整定参数,而且获得了比传统自抗扰解耦法更好的控制效果.

**关键词:** MIMO 系统;自解耦控制;线性扩张状态观测器;Lyapunov 方法

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

**文章编号:** 0367-6234(2020)09-0129-08

## Self-decoupling control for a class of nonlinear MIMO systems

XIAO Yougang<sup>1,2</sup>, LU Hao<sup>1,2</sup>, WANG Huidi<sup>1,2</sup>, HAN Kun<sup>1,2</sup>

(1. School of Traffic and Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. Joint International Research Laboratory of Key Technology for Rail Traffic Safety (Central South University), Changsha 410075, China)

**Abstract:** It is laborious and difficult to tune control gains in  $m$ -input  $m$ -output (MIMO) nonlinear systems using traditional decoupling algorithms, and the overall control performance is not good, so a self-decoupling control (SDC) method was proposed. The method utilized a linear extended state observer (LESO) to estimate and compensate the coupled part, nonlinear part, and disturbance part of the system, and an appropriate control law was designed for self-decoupling the MIMO system. The control gains to be tuned were converted into a parameter, and the convergence of the SDC method was verified by the Lyapunov method. Simulation results of two examples show that the proposed method not only greatly reduced the parameters of the MIMO system to be tuned, but also achieved better control effects than the common active disturbance rejection decoupling control method.

**Keywords:** MIMO system; SDC; LESO; Lyapunov method

实际工业对象大部分为多变量系统,各通道相互耦合,实际被控对象的模型参数通常处于波动状态.设计解耦器,消除系统中各回路间的耦合关系,然后对每组通道逐一进行控制,是多变量系统控制的常用方法.解耦器是通过被控对象的传递函数矩阵设计出来的,当对象传递函数阶数和输入输出变量维数加大时,常规的对角矩阵法、相对增益法、特征曲线法等设计出的解耦器复杂程度大增,当被控对象的数学模型不准确时,系统的解耦性能将受到影响<sup>[1]</sup>.逆系统解耦方法利用反馈思想极大地简化了解耦器设计的复杂程度,结构形式简单,然而系统内外扰动及模型误差会影响系统的跟踪特性和鲁棒性<sup>[2]</sup>.运用神经网络<sup>[3-4]</sup>、模糊方法<sup>[5-6]</sup>、支持向量机<sup>[7-8]</sup>等方法进行解耦优化,成为了解耦控制的一个研究热点.然而,神经网络解耦控制虽然实现了

动态解耦,但需利用大量实际数据进行学习,且网络权值的调整方法存在局限性.模糊控制需要制定复杂的控制规则,支持向量机核函数参数需要适时调整,这些都给解耦优化的实际应用造成了困难.

文献[9]提出的自抗扰控制技术(active disturbance rejection control,ADRC)以积分器串联型作为反馈系统的标准型,采用扩张状态观测器(ESO)对异于标准型的总和扰动进行实时估计,并主动补偿,从而把充满扰动、不确定性和非线性的被控对象转化为标准型进行控制.文献[10]将多输入多输出系统中各个子系统之间的耦合也归结到总扰动中,然后对每一个通道用扩张状态观测器各自独立地进行在线跟踪及补偿,从而实现分散式解耦控制.与常规分散控制算法相比,自抗扰控制具有更强的解耦和抗干扰能力,因而引起了诸多学者的兴趣,并被广泛应用于工业系统的控制中.将逆解耦与ADRC相结合,文献[1]设计了精馏塔过程自抗扰控制器,文献[11]设计了四水箱的液位控制器;针对六极混合磁轴承三自由度之间的耦合性和非线性特

收稿日期:2019-01-25

基金项目:国家自然科学基金面上项目(51275531);

湖南省科技计划资助项目(2013GK3004)

作者简介:肖友刚(1970—),男,教授,博士生导师

通信作者:肖友刚,csuxy@163.com

点,文献[12]采用线性/非线性自抗扰切换控制方法进行了解耦控制;针对制冷系统非线性、强耦合、大时滞等特点,文献[13]设计了一种改进的自抗扰解耦控制器;针对级联 H 桥静止无功发生器,文献[14]基于自抗扰控制设计了多变量解耦控制系统;文献[15]通过引入虚拟控制量,实现了强制循环蒸发系统液位与出料密度的 ADRC 解耦控制;将预测控制 ADRC 相结合,文献[16]设计了兼具信息预估又具扰动补偿的预测自抗扰控制器,并应用于制水行业待滤水浊度过程控制;针对热连轧活套系统多变量、非线性和强耦合特点,文献[17]设计了热连轧电动活套系统的高度和张力自抗扰控制器;针对气体流量装置实验管路流量、压力耦合系统,文献[18]对气体流量装置进行了自抗扰解耦控制。

这种分散式自抗扰解耦控制把各回路间的耦合作用看作扰动进行补偿,在一定程度上降低了回路间的相互影响,但是当回路间有较强耦合时,这种方法的解耦效果有限,而且,在对各个回路进行 ADRC 控制时,需要根据实验结果整定各个回路的控制参数,导致参数整定工作量非常大,所整定的参数也会互相影响,一个参数调到最优后,另一个参数对应的性能又恶化了,最终所得到的只是各个参数折中的结果,整体控制性能大打折扣.针对以上不足,本文提出了一种  $m$  个输入  $m$  个输出 (MIMO) 系统的自解耦控制方法 (self-decoupling control, SDC). 该法利用线性扩张状态观测器 (LESO) 对系统中的耦合部分、非线性部分及扰动部分进行估计并补偿,通过设计合适的控制律实现系统各环节的自解耦,将  $3m$  个 LESO 的增益转化为由系统硬件决定的常量,将  $2m$  个待整定的反馈控制量增益转化为系统误差微分方程的 Hurwitz 稳定矩阵的特征值配置,实现了 MIMO 系统控制的单参数调整,并应用 Lyapunov 方法对 SDC 法的稳定性进行了严格的数学证明。

## 1 问题描述

考虑如下一类  $m$  输入  $m$  输出系统,其控制量增益  $b_{ij}$  是状态变量和时间的函数  $b_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_m, \dot{x}_m) + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \ddot{x}_2 = f_2(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_m, \dot{x}_m) + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ \dots \\ \ddot{x}_m = f_m(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_m, \dot{x}_m) + b_{m1}u_1 + \dots + b_{mm}u_m, \\ y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_m = x_m. \end{cases} \quad (1)$$

假定耦合矩阵

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) & \dots & b_{1m}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) & \dots & b_{mm}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{bmatrix}$$

可逆,并且  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ ,  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ , 同时引入虚拟控制量  $\mathbf{U} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\mathbf{u}$ , 方程(1)变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{U}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (2)$$

则系统第  $i$  个通道的输入输出关系为

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = f_i(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_m, \dot{x}_m, t) + U_i, \\ y_i = x_i. \end{cases} \quad (3)$$

这样每个通道的虚拟控制量  $U_i$  与输出  $y_i$  形成了一种单输入单输出关系,实现了各通道间的解耦,利用虚拟控制量  $U_i$ ,设计  $m$  个自抗扰控制器就能对各通道进行控制.但这也意味着耦合矩阵  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  必须可逆,而且要设计  $m$  个自抗扰控制器.在工程实践中,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$  不一定可逆,对  $m$  个控制器的参数进行整定也很不容易,这就使这种传统的自抗扰解耦控制方法不仅应用受限,而且控制系统设计复杂,参数调整工作量也很大。

## 2 MIMO 系统的自解耦控制器设计

方程(1)所述的 MIMO 系统可表示为

$$\ddot{y}_i = f_i(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_m, \dot{x}_m) + b_{i1}u_1 + \dots + b_{im}u_m, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (4)$$

将方程(4)进一步表示为

$$\ddot{y}_i = R_i + b_{ii}u_i. \quad (5)$$

式中  $R_i$  为状态量  $y_i$  的总和扰动,包括耦合项、外扰等,  $R_i = f_i(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_m, \dot{x}_m) + b_{i1}u_1 + \dots + (b_{i1} - b_{ii})u_i + \dots + b_{im}u_m$ ,  $b_i$  为  $b_{ii}$  的估计值,  $b_i \approx b_{ii}$ .

设总和扰动  $R_i$  有界且可微,则  $\begin{cases} |R_i| \leq \delta_i, \\ |\dot{R}_i| \leq \bar{\delta}_i. \end{cases}$

其中  $\delta_i, \bar{\delta}_i$  是正实数. 令  $x_{i1} = y_i, x_{i2} = \dot{y}_i, x_{i3} = R_i, r_i = \dot{R}_i$ , 则方程(5)可扩张为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_i + b_{ii}u_i\mathbf{B} + r_i\mathbf{D}, \\ y_i = \mathbf{C}\mathbf{X}_i. \end{cases} \quad (6)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix}.$$

根据方程 (6) 设计线性扩张状态观测器 (LESO):

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{Z}}}_i = \mathbf{A}\mathbf{Z}_i + b_i u_i \mathbf{B} + \mathbf{L}(y_i - \hat{y}_i), \\ \hat{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{Z}_i. \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{Z}_i = [z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}]^T$  为向量  $\mathbf{X}_i$  的状态估计,  $\hat{y}_i$  为  $y_i$  的状态估计,  $\mathbf{L} = [\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}]^T$  为观测增益向量。

将  $y_i$  环的反馈控制量设计为

$$u_i = k_{i1} \cdot (v_i - z_{i1}) + k_{i2} \cdot (\dot{v}_i - z_{i2}) - z_{i3}/b_i. \quad (8)$$

式中:  $v_i$  为  $y_i$  的目标值,  $k_{i1}$ 、 $k_{i2}$  为反馈控制量增益。

将方程 (8) 代入方程 (5), 可得

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i &= R_i + b_i(k_{i1} \cdot (v_i - z_{i1}) + k_{i2} \cdot (\dot{v}_i - z_{i2}) - z_{i3}/b_i) = \\ &= b_i[k_{i1} \cdot (v_i - z_{i1}) + k_{i2} \cdot (\dot{v}_i - z_{i2})] + R_i - z_{i3}. \end{aligned} \quad (9)$$

当扩张状态观测器的误差  $e_{i3} = R_{i1} - z_{i3}$  足够小时, 根据方程 (9) 的积分特性可知, 系统的输出量  $y_i$  将不受未知扰动 (包括外部扰动、耦合项、非线性项等) 的影响, 达到了自解耦的目的, 因此这类 MIMO 系统可以采用控制框图来进行控制, 如图 1 所示。在这种控制方式下, 每一个输出量  $y_i$  不再使用虚拟控制量, 而是使用实际控制量进行控制, 物理意义更加明确, 而且不要求系统具有可逆的耦合矩阵, 拓宽了控制系统的使用范围。

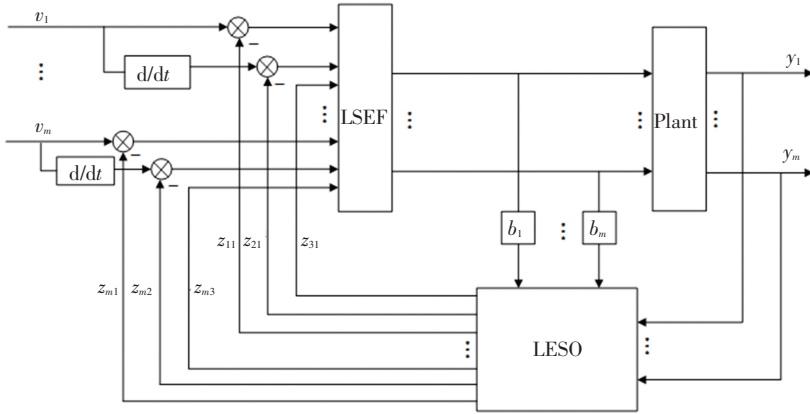


图 1 自解耦控制的结构框图

Fig.1 Block diagram of SDC

### 3 MIMO 系统自解耦控制参数分析

从自解耦控制器的设计过程可以看出, MIMO 系统自解耦控制的待定参数包括线性扩张状态观测器的观测增益向量、各通路的反馈控制量增益及控制量放大系数的估计值  $b_i$ 。对于  $m$  输入  $m$  输出系统, 待确定的  $b_i$  为  $m$  个, 观测向量增益为  $3m$  个, 控制量增益为  $2m$  个, 如果根据实验或仿真结果来进行调整, 将导致参数整定工作量非常大, 技术要求高, 而且所整定的参数互相影响, 一个参数调到最优后, 另一个参数对应的性能又恶化了, 最终所得到的只是各个参数折中的结果, 整体控制性能大打折扣, 因此有必要从 MIMO 系统自解耦控制的要求出发, 尽可能减少待整定参数。考虑到  $b_i$  为  $m$  个控制量放大系数  $b_{ii}$  的估计值, 在控制中可采用实际的  $b_{ii}$ 。

文献 [19] 根据线性扩张状态观测器 (LESO) 带宽构造了 LESO 的观测增益向量:

$$\mathbf{L} = [\beta_{01} \quad \beta_{02} \quad \beta_{03}]^T = [3\omega_0 \quad 3\omega_0^2 \quad \omega_0^3]^T. \quad (10)$$

其中  $\omega_0$  为 LESO 的带宽,  $\omega_0$  越大, 线性扩张状态观测器的稳态误差越小, 收敛速度也越快。带宽受到

数值计算迭代步长的制约, 大带宽需要小迭代步长, 否则会因为迭代步长过大而产生较大的相位滞后, 引起超调或者系统不稳定。在实际控制系统中迭代步长由系统硬件决定, 探讨迭代步长与扩张状态观测器带宽之间的关系, 可以将 MIMO 系统各环节的扰动用统一的线性扩张状态观测器进行集中观测补偿。

由于扩张状态观测器的增益系数与迭代步长联系紧密, 文献 [9] 运用 Fibonacci 数列, 根据迭代步长构建了三阶线性扩张状态观测器的参数序列:

$$\begin{cases} \bar{\beta}_{01} = \frac{1}{h}, \\ \bar{\beta}_{02} = \frac{1}{3h^2}, \\ \bar{\beta}_{03} = \frac{2}{8^2 h^3}. \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $h$  为迭代步长, 由系统硬件决定;  $\beta_{01}$ 、 $\beta_{02}$ 、 $\beta_{03}$  分别为三阶线性扩张状态观测器的参数。

对比方程 (10)、(11) 表示的参数序列关系, 将带宽和步长的迭代关系设计为

$$\omega_0 = k \frac{1}{h}. \quad (12)$$

其中  $k$  为待定系数.

为使方程(10)表示的参数序列与方程(11)表示的参数序列尽可能接近,将方程(10)、(11)作方差运算,并以方差最小化为目标,即

$$\min [(\beta_{01} - \bar{\beta}_{01})^2 + (\beta_{02} - \bar{\beta}_{02})^2 + (\beta_{03} - \bar{\beta}_{03})^2]. \quad (13)$$

将方程(10)~(12)代入方程(13),可得

$$\min \left[ \frac{1}{h^2} (1 - 3k)^2 + \frac{1}{h^4} \left( \frac{1}{3} - 3k^2 \right)^2 + \frac{1}{h^6} \left( \frac{1}{32} - k^3 \right)^2 \right]. \quad (14)$$

解得

$$\omega_0 = \frac{1}{3h}. \quad (15)$$

据此,将线性扩张状态观测器的观测增益向量设计为  $\mathbf{L} = [\frac{1}{h}, \frac{1}{3h^2}, \frac{1}{27h^3}]^T$ .

假定 MIMO 系统的目标值为  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_m, \dot{x}_m) = (v_1, \dot{v}_1, v_2, \dot{v}_2, \dots, v_m, \dot{v}_m)$ , 其误差可定义为

$$\psi_1 = x_1 - v_1, \psi_2 = \dot{x}_1 - \dot{v}_1, \psi_3 = x_2 - v_2, \psi_4 = \dot{x}_2 - \dot{v}_2, \dots, \psi_{2m-1} = x_m - v_m, \psi_{2m} = \dot{x}_m - \dot{v}_m. \quad (16)$$

令  $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{2m-1} \ \psi_{2m}]^T$ , 针对  $\boldsymbol{\psi}(t)$  对时间  $t$  求导,并综合方程(8)、(9),得整个控制系统的误差方程为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{A}_\psi \boldsymbol{\psi}(t) + \sum_{i=1}^{2m} \mathbf{A}_{ei} \mathbf{e}_i(t). \quad (17)$$

其中:

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -b_1 k_{11} & -b_1 k_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -b_m k_{m1} & -b_m k_{m2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{ei} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ b_i k_{i1} & b_i k_{i2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_i(t) = \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ e_{i3} \end{bmatrix}.$$

为扩张状态观测器的观测误差向量,且  $e_{i1} = x_{i1} - z_{i1}$ ,  $e_{i2} = x_{i2} - z_{i2}$ ,  $e_{i3} = x_{i3} - z_{i3}$ .

为使  $\mathbf{A}_\psi$  是 Hurwitz 稳定矩阵,将  $\mathbf{A}_\psi$  的特征值  $\lambda$  都配置在点  $(-\bar{\omega}, 0)$  上,其中  $\bar{\omega} > 0$ ,即

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_\psi| = (\lambda + \bar{\omega})^{2m}. \quad (18)$$

式中  $\mathbf{I}$  为 3 阶单位矩阵.

求解方程(18),可得

$$\begin{cases} k_{i1} = \frac{\bar{\omega}^2}{b_i}, \\ k_{i2} = \frac{2\bar{\omega}}{b_i}. \end{cases} \quad (19)$$

则 SDC 的线性控制量(LSEF)为

$$u_i = \frac{\bar{\omega}^2}{b_i} \cdot (v_i - z_{i1}) + \frac{2\bar{\omega}}{b_i} \cdot (\dot{v}_i - z_{i2}) - \frac{z_{i3}}{b_i}. \quad (20)$$

对于输入输出数目均为  $m$  的 MIMO 系统,方程(20)中的控制量始终只有一个可调参数  $\bar{\omega}$ ,调整  $\bar{\omega}$ ,各环节的控制量增益会随之变化,并自动生成各环节的反馈控制量,因此,在 SDC 中,不需要对每个输出环都设计反馈控制量,通过调整参数  $\bar{\omega}$ ,各环节的控制量会自动调整,使其控制性能达到最优,SDC 大大简化了这类 MIMO 系统的控制过程,也使繁琐复杂的控制量增益调整变得简单容易.

#### 4 MIMO 系统自解耦控制器稳定性证明

**定理 1** 在持续变化的扰动  $R_i$  作用下,扩张状态观测器(7)的观测值存在有界稳态误差;当扰动  $R_i$  保持不变或停止作用时,扩张状态观测器(7)的观测误差  $(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3})$  迅速收敛于  $(0, 0, 0)$ .

**证明** 将式(6)减去式(7),得 LESO 误差的微分方程:

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{E} \mathbf{e}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{F}. \quad (21)$$

$$\text{其中: } \mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -3\omega_0 & 1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 0 & 1 \\ -\omega_0^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

将线性扩张状态观测器的 Lyapunov 函数设计为

$$V_1 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i. \quad (22)$$

其中  $\mathbf{P}$  为假定存在的对称正定矩阵,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}.$$

对  $V_1(t)$  求导,并将方程(21)代入,得

$$\dot{V}_1(t) = \mathbf{e}_i^T (\mathbf{E}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E}) \mathbf{e}_i + 2\mathbf{r}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{F}. \quad (23)$$

其相应的 Lyapunov 方程取为

$$\mathbf{E}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{E} = -\mathbf{I}. \quad (24)$$

将  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}$  代入方程(24),可得

$$\begin{bmatrix} -3\omega_0 & 1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 0 & 1 \\ -\omega_0^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{12} \\ k_{13} & k_{12} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3\omega_0 & 1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & 0 & 1 \\ -\omega_0^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

求解方程(25), 可得

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{3}{16\omega_0} + \frac{3}{4}\omega_0 + \frac{1}{16}\omega_0^3, \\ k_{12} = -\frac{1}{2}, \\ k_{13} = -\left(\frac{3}{4\omega_0} + \frac{3}{16}\omega_0 + \frac{1}{16\omega_0^3}\right), \\ k_{22} = \frac{3}{4\omega_0} + \frac{3}{16}\omega_0 + \frac{1}{16\omega_0^3}, \\ k_{33} = \frac{33}{16\omega_0} + \frac{7}{4\omega_0^3} + \frac{3}{16\omega_0^3}. \end{cases} \quad (26)$$

将方程(26)代入  $\mathbf{P}$  中, 可得: 当  $\omega_0 > 0$  时,

$$|k_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{12} \\ k_{13} & k_{12} & k_{33} \end{bmatrix} > 0,$$

因此矩阵  $\mathbf{P}$  正定, 即式(22)中所假设的正定矩阵  $\mathbf{P}$  存在.

将方程(26)代入方程(23), 可得

$$\dot{V}_1(t) = -e_{i1}^2 - e_{i2}^2 - e_{i3}^2 + 2r_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{F}. \quad (27)$$

定义集合  $\Gamma_1$  包含所有的满足  $\dot{V}_1(t) = 0$  的点, 则在集合  $\Gamma_1$  中, Lyapunov 函数  $V_1(t)$  为常数. 则当扰动  $R_i$  保持不变或停止作用时, 即当  $r_i = 0$  时,

$$\dot{V}_1(t) = -e_{i1}^2 - e_{i2}^2 - e_{i3}^2 = 0. \quad (28)$$

由方程(28), 易得

$$(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}) = (0, 0, 0). \quad (29)$$

即扩张状态观测器(7)的观测误差会迅速收敛于点  $(0, 0, 0)$ .

当扰动  $R_i$  为持续变化的扰动时, 即  $r_i \neq 0$  时, 系统的观测值会出现一定误差. 由式(7)、(17) 可得稳态误差范围为

$$\begin{cases} e_{i1}(t) \leq \delta_i / \omega_0^3, \\ e_{i2}(t) \leq 3\delta_i / \omega_0^2, \\ e_{i3}(t) \leq 3\delta_i / \omega_0. \end{cases} \quad (30)$$

由方程(29)、(30)的结论可知, 定理 1 得证.

**定理 2** 在持续变化的扰动  $R_i$  作用下, MIMO 系统(1)在 SDC 的线性控制律(20)的作用下整个控制系统的误差在零点附近大范围稳定, 存在有界稳态误差; 当扰动  $R_i$  保持不变或停止作用时, 整个控制系统的误差会迅速收敛于零点.

**证明** 将式(17)进一步表示为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{A}_\psi \boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{g}(t), \quad (31)$$

$$\text{其中 } \mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{2m} \mathbf{A}_{\psi i} \mathbf{e}_i(t).$$

矩阵  $\mathbf{A}_\psi$  是 Hurwitz 稳定矩阵, 因此可将  $\mathbf{A}_\psi$  作为式(29)的 Lyapunov 方程:

$$\mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}_\psi \boldsymbol{\psi}. \quad (32)$$

则

$$\dot{V}_2(t) = -\bar{\omega} \sum_{i=1}^{2m} \psi_i^2 + 2\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}_\psi \dot{\boldsymbol{\psi}}(t). \quad (33)$$

定义集合  $\Gamma_2$  包含所有的满足  $\dot{V}_2(t) = 0$  的点, 在集合  $\Gamma_2$  中, Lyapunov 函数  $V_2$  为常数. 当扰动  $R_i$  保持不变或停止作用时, 由定理 1 可知, 此时  $\dot{\mathbf{g}}(t) = 0$ , 由式(33)可知:

$$\dot{V}_2(t) = -\bar{\omega} \sum_{i=1}^{2m} \psi_i^2 = 0. \quad (34)$$

由式(34)易得

$$\psi_{2i-1} = 0, \psi_{2i} = 0. \quad (35)$$

当扰动  $R_i$  为持续变化的扰动时, 则系统存在稳态误差. 当系统稳定时, 系统误差微分方程(17) 的左边全为零, 则根据式(30), 可得

$$g_{2i}(t) \leq \left| b_i k_{i1} \frac{\delta_i}{\omega_0^3} + b_i k_{i2} \frac{3\delta_i}{\omega_0^2} + \frac{3\delta_i}{\omega_0} \right|. \quad (36)$$

将方程(36)代入方程(31), 可得系统的稳态误差范围为

$$\begin{cases} \psi_{2i-1} \leq \left| \frac{b_i k_{i1} \frac{\delta_i}{\omega_0^3} + b_i k_{i2} \frac{3\delta_i}{\omega_0^2} + \frac{3\delta_i}{\omega_0}}{b_i k_{i2}} \right|, \\ \psi_{2i} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

由式(35)和(37)的结论可知, 定理 2 得证.

## 5 MIMO 系统自解耦控制的应用分析

### 5.1 算例一 热连轧活套系统的自解耦控制

热轧机电活套系统控制的优劣直接影响成品带钢的宽度、厚度和板形精度, 辊缝移动、负荷扰动、被控对象变化会使张力出现较大波动, 使得活套控制比较复杂. 参见文献[17], 可知热连轧活套系统模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{cases} \quad (38)$$

式中:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & \frac{6}{J} & -\frac{6}{J} \frac{\partial M_T}{\partial \sigma} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ACR}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{L} \frac{\partial \Delta l_d}{\partial \theta} & 0 & \ell & -\frac{E}{L} (1+f) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{ASR}} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{ACR}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{ASR}} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

其中

$$j = -\frac{6}{J} \left( \frac{\partial M_G}{\partial \theta} + \frac{\partial M_S}{\partial \theta} + \frac{\partial M_T}{\partial \theta} \right),$$
$$\ell = -\frac{E}{L} \left( v_{n+1} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} + v_n \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right).$$

采用本文提出的自解耦控制方法,根据方程(20)设计高度回路和张力的反馈控制律为

$$\begin{cases} u_1 = 0.01 \bar{\omega}^2 \cdot (v_i - z_{i1}) + 0.02 \bar{\omega} \cdot (\dot{v}_i - z_{i2}) - 0.01 \cdot z_{i3}, \\ u_2 = 0.04 \bar{\omega}^2 \cdot (v_i - z_{i1}) + 0.08 \bar{\omega} \cdot (\dot{v}_i - z_{i2}) - 0.04 \cdot z_{i3}. \end{cases} \quad (39)$$

仿真实验迭代步长取  $h = 0.001 \text{ s}$ ,经过充分整定后,  $\bar{\omega}$  选为 4. 与文献[17]一样,将热连轧电动活套系统的高度回路和张力的回路分别施加单位阶跃信号,系统稳定后分别给高度回路和张力的回路施加相同的阶跃扰动.应用 SDC 法对活套系统进行控制,所得实验结果见图 2 和表 1,相比文献[17]中的自抗扰控制方法(需整定的参数为 6 个),SDC 法的各项控制性能都有一定的改善,且在受扰动之后,可快

速恢复到稳定状态,且摆角和张力的恢复时间比文献[17]中的结果更短.

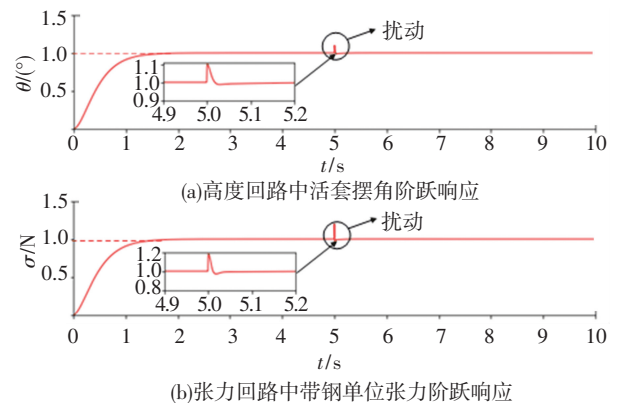


图 2 扰动作用下热连轧活套系统的自解耦控制

Fig.2 Step response curve of hot strip rolling looper system by SDC under disturbance

**5.2 算例二 气体流量装置的自解耦控制分析**

气体流量和压力对气体流量装置的计量性能影响很大,参见文献[18],可得气体流量装置的双输入双输出模型:

$$\begin{bmatrix} Q_m(s) \\ p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{48.252}{0.36s^2 + 0.916s + 1} & \frac{55.913}{0.348s^2 + 0.905s + 1} \\ \frac{54.55}{0.894s^2 + 0.428s + 1} & \frac{-70.429}{0.084s^2 + 0.905s + 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

其中:  $I_1$ 、 $I_2$  分别为调节阀 1、调节阀 2 的给定电流值, mA;  $Q_m$  为管路的流量, kg/h;  $p$  为管路的压力, kPa.

将式(40)改成式(4)的形式:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(Q_m, \dot{Q}_m, p, \dot{p}) + (b_{11} - b_1) I_1 + b_{12} I_2 + b_1 I_1, \\ \dot{y}_2 = f_2(Q_m, \dot{Q}_m, p, \dot{p}) + b_{21} I_1 + (b_{22} - b_2) I_2 + b_2 I_2, \\ y_1 = Q_m, y_2 = p. \end{cases} \quad (41)$$

采用本文提出的 SDC 法,根据式(20)设计气体流量装置的反馈控制量式(42),  $b_1$ 、 $b_2$  分别采用控制量  $u_1$ 、 $u_2$  增益的实际值.

表 1 高度和张力的控制性能指标

| 控制方法 | 高度回路  | 高度回路   | 张力回路  | 张力回路   | 扰动后高度    | 扰动后高度回路 | 扰动后张力  | 扰动后张力回路 |
|------|-------|--------|-------|--------|----------|---------|--------|---------|
|      | 超调量/% | 调整时间/s | 超调量/% | 调整时间/s | 回路幅值/(°) | 恢复时间/s  | 回路幅值/N | 恢复时间/s  |
| SDC  | 0.3   | 2.0    | 0.2   | 1.9    | 1.10     | 0.1     | 1.18   | 0.10    |
| ADRC | 4.9   | 10.1   | 3.3   | 2.2    | 1.08     | 5.2     | 1.16   | 1.65    |

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\bar{\omega}^2}{134.8} \cdot (v_1 - z_{11}) + \frac{2\bar{\omega}}{134.8} \cdot (\dot{v}_1 - z_{12}) - \\ \quad \frac{z_{13}}{134.8}, \\ I_2 = -\frac{\bar{\omega}^2}{838.4} \cdot (v_2 - z_{21}) - \frac{2\bar{\omega}}{838.4} \cdot (\dot{v}_2 - z_{22}) + \\ \quad \frac{z_{23}}{838.4}. \end{cases} \quad (42)$$

和文献[18]一样,在  $t = 0$  时,给流量控制回路加入幅值为 1 的阶跃信号,在  $t = 15\text{ s}$  时,给压力控

制回路加入幅值为 1 的阶跃信号,在 30 s 和 50 s 时分别对流量和压力施加与文献[18]相同的阶跃扰动.迭代步长取  $h = 0.001\text{ s}$ ,经过充分整定后, $\bar{\omega}$  取 8,应用 SDC 法对气流装置进行控制,所得实验结果见图 3 及表 2,相比文献[18]中的 ADRC 方法(需整定的参数为 6 个),采用 SDC 法,在 15 s 时在压力控制回路加入的阶跃信号对流量的影响更小,最大变化量仅 0.002 kg/h,而采用 ADRC 法流量的最大变化量是 0.05 kg/h,说明 SDC 法的解耦能力优于 ADRC 法,各项控制性能指标也大幅占优(见表 2),且在扰动作用下,由 SDC 法控制的流量和压力恢复稳定的时间均小于 0.1 s,远小于 ADRC 法.

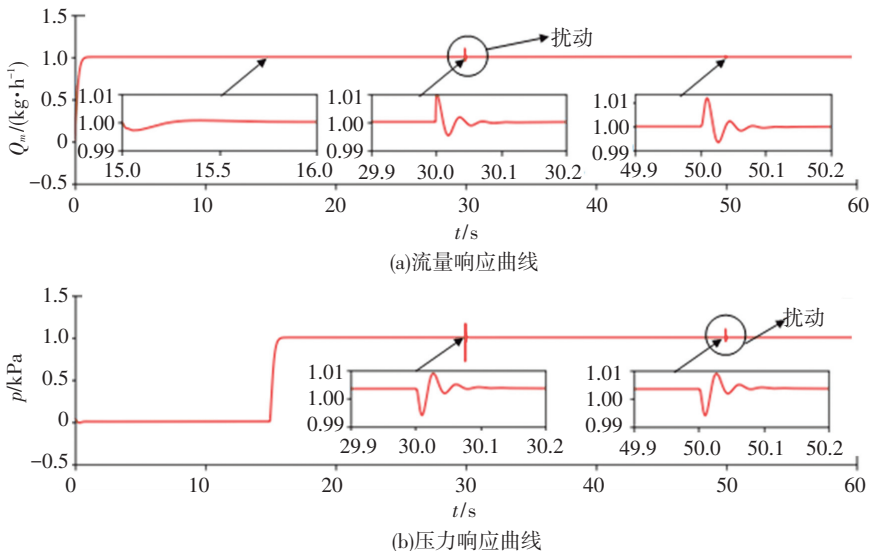


图 3 阶跃与扰动信号作用下气体流量装置的自解耦控制曲线  
Fig.3 Step response curve of gas flow equipment by SDC under disturbance

表 2 流量和压力控制性能指标  
Tab.2 Control performance indices of flow and pressure

| 控制方法 | 流量控制上升时间/s | 流量超调量/% | 流量调整时间/s | 压力上升时间/s | 压力超调量/% | 压力调整时间/s |
|------|------------|---------|----------|----------|---------|----------|
| SDC  | 1.47       | 0.15    | 1.9      | 1.3      | 0.19    | 2.1      |
| ADRC | 2.65       | 0.86    | 12.1     | 2.05     | 0.43    | 11.1     |

## 6 结 论

1) 利用统一的线性扩张状态观测器(LESO)对系统中的耦合部分、非线性部分及扰动部分进行估计并补偿,通过设计合适的控制律实现了系统各环节的自解耦,整个 SDC 控制系统结构简单、紧凑,并用 Lyapunov 方法证明了其稳定性.

2) 采用由系统硬件决定的迭代步长确定  $3m$  个 LESO 的增益,通过 Hurwitz 稳定矩阵特征值配置将  $2m$  个待整定的反馈控制量增益转化为一个待整定参数,极大地减少了 MIMO 系统待整定的参数和调参难度.

3) 在 SDC 控制方式下不再使用虚拟控制量,使用实际控制量对每一个输出量进行控制,物理意义明确,而且不要求系统具有可逆的耦合矩阵,拓宽了控制系统的使用范围.

4) 算例说明 SDC 不仅最大限度地减少了 MIMO 系统的待整定参数,而且获得了比传统自抗扰解耦控制法更好的控制效果.

## 参考文献

[1] 程贇,陈增强,孙明伟,等. 多变量逆解耦自抗扰控制及其在精馏塔过程中的应用[J]. 自动化学报, 2017, 43(6): 1080  
CHENG Yun, CHEN Zengqiang, SUN Mingwei, et al. Multivari-

- able inverted decoupling active disturbance rejection control and its application to a distillation column process [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(6): 1080
- [2] 陈亮亮, 祝长生, 王忠博. 基于逆系统解耦的电磁轴承飞轮转子系统二自由度控制[J]. *电工技术学报*, 2017, 32(23): 100  
CHEN Liangliang, ZHU Changsheng, WANG Zhongbo. Two-degree-of-freedom control for active magnetic bearing flywheel rotor system based on inverse system decoupling [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2017, 32(23): 100
- [3] 万军, 赵不贿. 基于 Petri 网的非线性多变量系统解耦控制[J]. *控制与决策*, 2018, 33(9): 1713  
WAN Jun, ZHAO Buhui. Decoupling control of nonlinear multivariable systems based on Petri nets [J]. *Control and Decision*, 2018, 33(9): 1713
- [4] 梅从立, 殷开婷, 黄文涛, 等. 基于数据驱动的感应电机多模型逆自适应解耦控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(6): 1037  
MEI Congli, YIN Kaiting, HUANG Wentao, et al. Data-driven adaptive decoupling control of induction motors using multi-model inversion [J]. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1037
- [5] LI C Y, WANG W. Fuzzy almost disturbance decoupling for MIMO nonlinear uncertain systems based on high-gain observer [J]. *Neurocomputing*, 2013, 111(2): 104
- [6] ZHANG W, MA H, YANG S X, et al. A neuro-fuzzy decoupling approach for real-time drying room control in meat manufacturing [J]. *Expert Systems with Applications*, 2015, 42(3): 1039
- [7] 何延昭, 王贞艳, 郑世强. 基于在线最小二乘支持向量机逆系统的高速永磁同步电机解耦控制[J]. *中国电机工程学报*, 2016, 36(20): 5039  
HE Yanzhao, WANG Zhenyan, ZHENG Shiqiang. Decoupling control of high speed permanent magnet synchronous motor based on on-line least squares support vector machine inverse system method [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2016, 36(20): 5039
- [8] 朱熁秋, 曹莉, 李衍超, 等. 基于最小二乘支持向量机逆系统的五自由度无轴承同步磁阻电机解耦控制[J]. *中国电机工程学报*, 2013, 33(15): 99  
ZHU Huangqiu, CAO Li, LI Yanchao, et al. Decoupling control of 5-degree of freedom bearingless synchronous reluctance motor based on least square support vector machine inverse system [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2013, 33(15): 99
- [9] 韩京清. 自抗扰控制技术—估计补偿不确定因素的控制技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008  
HAN Jingqing. Active disturbance rejection control technique: the technique for estimating and compensating the uncertainties [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008
- [10] ZHENG Q, CHEN Z Z, GAO Z Q. A practical approach to disturbance decoupling control [J]. *Control Engineering Practice*, 2009, 17(9): 1016
- [11] SUN L, DONG J Y, LI D H, et al. A practical multivariable control approach based on inverted decoupling and decentralized active disturbance rejection control [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2016, 55(7): 2008
- [12] 朱熁秋, 赵泽龙. 三自由度六极混合磁轴承线性/非线性自抗扰切换解耦控制[J]. *中国电机工程学报*, 2018, 38(10): 3078  
ZHU Huangqiu, ZHAO Zelong. Decoupling control based on linear/nonlinear active disturbance rejection switching for 3-degree-of-freedom 6-pole hybrid magnetic bearing [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2018, 38(10): 3078
- [13] 薛洪武, 吴爱国, 董娜. 制冷系统自抗扰解耦控制[J]. *西安交通大学学报*, 2016, 50(9): 85  
XUE Hongwu, WU Aiguo, DONG Na. Active disturbance rejection decoupling control for refrigeration systems [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2016, 50(9): 85
- [14] 于雁南, 杨荣峰, 严继池, 等. 级联 H 桥静止无功发生器的多变量自抗扰解耦控制[J]. *中国电机工程学报*, 2016, 36(8): 2233  
YU Yannan, YANG Rongfeng, YAN Jichi, et al. Multiple-input multiple-output decoupling control schemes of static var generator with cascaded H-bridge based on active disturbance rejection control [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2016, 36(8): 2233. DOI: 10.13334/j.0258-8013.pcsee.2016.08.024
- [15] 张园, 孙明玮, 陈增强. 强制循环蒸发系统线性自抗扰解耦控制的鲁棒设计[J]. *化工学报*, 2015, 66(增刊 2): 263  
ZHANG Yuan, SUN Mingwei, CHEN Zengqiang. Robust design of linear active disturbance rejection decoupling control for forced-circulation evaporation system [J]. *CIESC Journal*, 2015, 66(S2): 263
- [16] 唐德翠, 高志强, 张绪红. 浊度大时滞过程的预测自抗扰控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2017, 34(1): 102  
TANG Decui, GAO Zhiqiang, ZHANG Xuhong. Design of predictive active disturbance rejection controller for turbidity [J]. *Control Theory & Applications*, 2017, 34(1): 102
- [17] 王丽君, 余苗, 李擎, 等. 热连轧活套系统的自抗扰控制[J]. *控制理论与应用*, 2018, 35(3): 407  
WANG Lijun, YU Miao, LI Qing, et al. Active disturbances rejection control of hot strip rolling looper systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(3): 407
- [18] 赵越, 孙立军, 吴瑕, 等. 多变量解耦自抗扰控制在气体流量装置中的应用[J]. *化工学报*, 2017, 68(9): 3482  
ZHAO Yue, SUN Lijun, WU Xia, et al. Active disturbance rejection control on gas flow equipment by multivariable decoupling algorithm [J]. *CIESC Journal*, 2017, 68(9): 3482
- [19] GAO Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning [C]//*Proceedings of the American Control Conference*. Denver, CO: IEEE, 2003: 4989. DOI: 10.1109/ACC.2003.1242516

(编辑 魏希柱)