

DOI:10.11918/202109123

近地小行星探测任务月球借力逃逸转移混合优化方法

井 泉^{1,2}, 刘靖怡^{1,2}, 李明涛^{1,2}

(1. 中国科学院 国家空间科学中心, 北京 101499; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘 要: 利用月球借力能够提升送入深空的有效载荷的质量。设计月球借力深空逃逸轨道主要有两种方法:正向法将借力轨道参数化后,利用全局优化算法进行优化,该方法思路直观,但优化参数多,导致计算耗时长,收敛稳定性差;反向法先确定日心段最优轨道,再拼接月球借力地心段轨道,该方法计算耗时少,但模型精度差,并且不容易收敛到全局最优解。为了快速求解月球借力深空逃逸轨道,本文在已有方法基础上提出混合优化方法。提出的混合优化方法充分利用反向法收敛速度快和正向法精度高的优点,先以反向法的多目标优化 Pareto 解集为参考轨道,再在参考轨道附近开展局部优化,利用正向法使用全局搜索算法,快速获得最优转移轨道。以探测近地小行星 1989 ML 和 2003 SM84 为例进行了数值仿真,仿真结果显示混合优化求解的收敛稳定性和计算效率相比正向法提升显著,改进后解的收敛稳定性提升至原来的 3~4 倍,计算时间缩短 50%。仿真结果表明混合优化法对解的收敛稳定性和收敛效率提升效果显著。

关键词: 飞行力学;小行星探测;月球借力;多目标优化;全局优化;局部优化;混合优化方法

中图分类号: V412

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2022)11-0031-07

Hybrid optimization method for lunar gravity assist transfer trajectory to near-Earth asteroids

JING Quan^{1,2}, LIU Jingyi^{1,2}, LI Mingtao^{1,2}

(1. National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 101499, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The payload launched to deep space can be increased by using lunar gravity assist (LGA). There are two main methods for designing LGA transfer trajectory. The forward patched method firstly parameterizes the constrained orbit and then optimizes the orbit with the global optimization algorithm. The forward method is intuitive, but has many optimization parameters, which causes time-consuming calculation and poor convergence stability. The backward patched method firstly determines the optimal orbit of the heliocentric segment and then calculates the geocentric LGA. The backward patched method consumes less calculation time, but with poor accuracy, and it is not easy to converge to the global optimal solution. To solve the LGA escape trajectory in a short time, this paper proposes a hybrid optimization method based on the existing methods. The proposed hybrid optimization method makes full use of the advantages of fast convergence speed of backward patched method and high precision of forward patched method. The method takes the trajectory corresponding to the Pareto solution set of the multi-objective optimization of the backward patched method as the reference trajectory, and carries out local optimization near the reference trajectory. Then, the forward method is applied to quickly obtain the optimal transfer trajectory by using the global search algorithm. Numerical simulation was carried out for the detection of near-Earth asteroids 1989 ML and 2003 SM84. The results show that compared with the forward patched method, the hybrid optimization method improved the convergence stability and computational efficiency effectively. The convergence stability of the solution was improved to 3-4 times, and the calculation time was reduced by 50%. The results indicate that the hybrid optimization method excels in convergence stability and computational efficiency.

Keywords: flight dynamics; the asteroid mission; lunar gravity assist; multi-objective optimization; global search optimization; local optimization; hybrid optimization method

收稿日期: 2021-09-27

基金项目: 国家自然科学基金(11672293);

国家空间科学中心 2021 年度青年创新课题(E1PD40016S)

作者简介: 井 泉(1997—),男,博士研究生;

李明涛(1982—),男,研究员,博士生导师

通信作者: 李明涛,limingtao@nssc.ac.cn

小行星作为太阳系形成之初遗留的原始物质,保存着太阳系形成与早期演化信息,对研究太阳系起源与早期演化、地球生命和水的来源等重大科学问题具有重要意义。对小行星的探索在一定程度上

还能牵引深空探测技术的发展。

最早的小行星探测是由美国的 Galileo 木星探测器完成的,探测器借力飞行序列为金星-地球-地球,第一次地球借力后于 1991 年 12 月顺访了小行星 Gaspre,在第二次地球借力后于 1993 年 8 月顺访了小行星 Ida^[1]。此后,美国的 Dawn 探测器是第一个探测小行星带的探测器,采用电推进和一次火星借力,分别于 2012 年 2 月、2015 年 9 月抵达 Vesta、Ceres 进行探测^[2];OSIRIS-Rex 探测器采用深空机动和一次地球借力,于 2018 年 11 月抵达小行星 Bennu,计划完成采样并返回^[3]。日本 Hayabusa 探测器利用地球借力与小推力转移,于 2005 年 9 月 13 日飞抵 Itokawa 进行观测^[4];Hayabusa 2 探测器采用小推力与地球借力的方式实现轨道转移,完成了对小行星 1999 JU3 采样返回^[5]。

对于深空探测,通过月球借力(lunar gravity assist, LGA)逃逸来转移,可以减小发射能量,提升送入深空的有效载荷质量^[6]。月球借力最早可以追溯到美国宇航局的 ISEE-3 任务,1982 年完成任务后飞行器利用月球借力从日地 L1 点转移至 L2 附近探测地球磁尾,并于 1983 年 12 月 22 日再次利用月球借力逃逸前往与彗星交会^[7]。日本航天局 1990 年的 Hiten 任务中,飞行器完成 10 次月球借力^[8];之后的 Planet-A 与 Planet-B 计划中,均利用月球引力,前者用于研究考虑太阳引力影响下月球借力的效果,后者两次月球借力后前往火星^[9]。Gil-Fernandez 等^[10]以美欧探测器 ExoMars 为背景,研究了单次、二次、三次月球借力发射探测器的情况,并且增加脉冲辅助,发现 ExoMars 探测器在脉冲辅助的作用下,入轨质量比单次借力和两次借力分别提升 150 kg 和 270 kg。Casalino 等^[11]以探测近地小行星为背景,研究了两次月球借力的情形。对于多次借力,一般有 Backflip 借力、Coplanar 借力以及共振借力。Backflip 借力指航天器在一次借力后转过 180°的地心角,然后进行第二次借力。Coplanar 借力指第一次借力后的轨道平面与月球轨道共面^[11]。共振借力指一次借力后的轨道周期与借力天体轨道周期比为 $p:q$ (p, q 均为正整数)。He 等^[12]研究了小推力情况下多次月球共振借力的小行星采样返回轨道设计,推导了 $p:q$ 共振借力计算方法;杨洪伟等^[13]解析推导了 $n:1$ (n 为正整数)共振借力轨道的充要条件。

本文考虑化学推进,采用圆锥曲线拼接法^[14]。任务轨道分为两段,第一段为探测器从地球停泊轨道出发,经月球借力转移至地球影响球边界;第二段为日心段,从影响球边界至小行星。单次月球借力

深空逃逸轨道设计方法有两种:正向法,设计顺序与航天器运行顺序相同^[15],缺点是由于优化变量较多,使用全局优化算法优化耗时长;反向法,首先求解最优日心转移轨道,然后根据飞行器在地球影响球边界处的状态求解地心段轨道^[16],缺点是依赖于日心段解,设计时没有考虑月球借力窗口约束,并不一定是全局最优,并且由于模型采取了较多假设,解的精度较差。

本文结合正向法精度高与反向法收敛速度快的优点,提出了混合优化方法。并以交会近地小行星为例开展数值仿真,验证了本文方法的有效性。

1 模型介绍

1.1 正向法模型

正向法的月球借力转移轨道各时刻如下: t_0 时刻从地球停泊轨道出发; $t_0 + \Delta t_1$ 到达月球附近,借力; $t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2$ 时刻到达地球影响球边界,逃逸; $t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \alpha t_f$ 时刻深空机动; $t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2 + t_f$ 时刻到达小行星^[17]。任务时序见图 1。

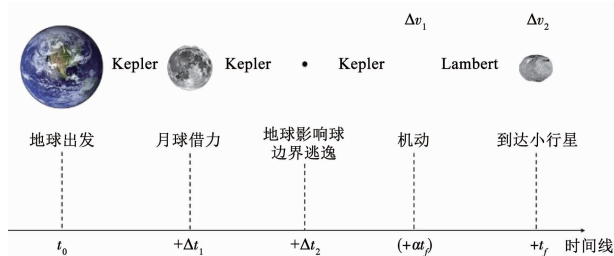


图 1 正向法月球借力逃逸转移示意

Fig. 1 Lunar gravity assist transfer trajectory in forward patched method

飞行器以双曲线轨道逃逸,轨道方程为

$$R = |a|(e \cosh F - 1) \quad (1)$$

式中: R 为探测器到地心的距离, a 为轨道半长轴, F 为偏近点角。偏心率 e 为

$$e = \frac{R_p V_0^2}{\mu_E} - 1 \quad (2)$$

式中: R_p 为逃逸时地心距; V_0 为逃逸速度。 F 与真近点角 f 的关系为

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2} \quad (3)$$

从近地点到偏近点角为 F 的位置用时为 $\Delta t_1 = (-F + e \sinh F)/n$, 式中 $n = \sqrt{\mu_E/|a|^3}$ 。

在计算中,取 R 为 t_0 时刻地月距离,由式(1)~(3)可以求得 F ,进而求得近地点到月球的转移时间 Δt 。

借力时月球的赤经 λ_m 和赤纬 B_m ,需满足 $\omega_0 = U - f, \Omega_0 = \lambda_m - \Delta\Omega_0$,见图 2。

$$v = \frac{(1 + e_1 \cos \nu_1) \cos i_1}{\sqrt{r_p(1 + e_1)}} \tag{8}$$

$$w = i_a \frac{(1 + e_1 \cos \nu_1) \sin i_1}{\sqrt{r_p(1 + e_1)}} \tag{9}$$

式中 ν_1 是和月球相遇时转移轨道的真近点角, r_p 为逃逸时地心距, 整理方程(6) ~ (9) 可得

$$\left(V_\infty^2 + \frac{3}{r_M} \right) + \frac{1 - e_1}{r_p} = -2 \sqrt{\frac{r_p(1 + e_1)}{r_M^3}} \cos i_1 \tag{10}$$

式(10)为关于 e_1 的一元二次方程, 可直接解出 e_1 。进而解出地月转移轨道根数, 可求得借力前的速度矢量和相对月球的双曲超速。借力前后的双曲超速已知, 便可求出转角, 进而解出借力半径。为了尽量充分利用月球引力并保证飞越时飞行器的安全, 本文设置最低借力高度为 100 km。

2 混合法模型

首先利用反向法计算效率高的特点, 采用多目标优化算法, 快速求解出 N 组分布在不同参数空间的参考轨道; 然后将参考轨道参数代入反向法的优化模型, 使用局部优化算法在参考轨道附近搜索; 最后选取速度增量较小的 M 组解 ($M < N$), 代入正向法使用全局搜索进行优化, 获得满足正向法精度要求的月球借力逃逸转移最优轨道解。程序流程见图 5。

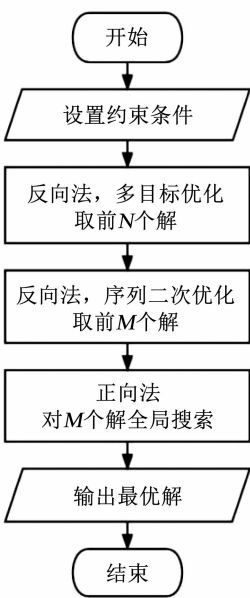


图 5 混合法计算流程图

Fig. 5 Algorithm of hybrid method

本文多目标优化算法采用 NSGA-II 算法^[18], 该算法主要使用 Pareto 前沿 (Pareto front) 机制; 对于一个决策变量, 如果不存在其他决策变量可以支配它, 则称该决策变量为非支配解。非支配解意味着

无法在改进任何目标函数的同时不削弱至少一个其他的目标函数。所以每一个非支配解都是多目标优化问题的一个最优解, 这些解在目标空间可视作在一个超曲面上, 即 Pareto 前沿。并且算法中引入拥挤度的概念, 使得到的解尽量均匀地分布在目标空间内。

通过多目标优化, 可以得到分散的若干个解。这样可以为下一步序列二次优化提供较好的初值。

序列二次优化将非线性问题转化为一系列二次规划子问题来求解^[19]。利用多目标优化得到的初值在初值附近优化, 优化速度快, 并确保优化出的解都达到各自的局部最优 (即从图 6 所示三角形代表的解优化至五角星解)。

最后将上一步中得到的解带入正向法模型。由于正向法的模型比反向法的更精确, 两种模型下的解空间可能有所差异, 见图 6。因局部优化受初值影响较大, 全局搜索算法^[20]会在反向法给出的初始解附近生成若干起始点, 然后基于正向法模型进行局部优化 (即从图 6 中五角星代表的解优化至星号解)。在保证解满足正向法精度的同时, 也提高了收敛到全局最优解的概率。

混合优化方法的好处是: 充分利用多目标优化的多样性、局部优化算法快速收敛性和全局搜索算法对初值的鲁棒性, 可以加强解的稳定性, 并提升计算速度。

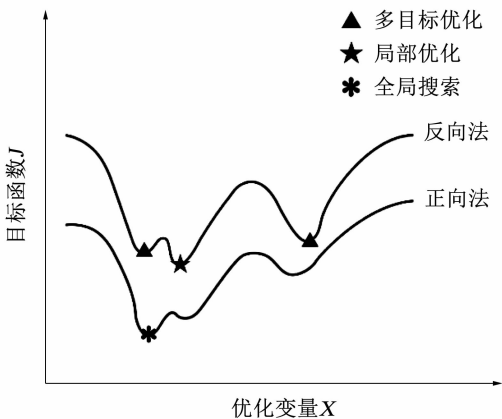


图 6 模型差异示意

Fig. 6 Illustration of difference between two models

3 仿真结果

3.1 算例 1

以探测 1989 ML 小行星为例, 开展月球借力逃逸转移轨道优化设计。1989 ML 的轨道根数见表 1。

正向法设置发射窗口为 2024 ~ 2027 年, 转移时间 100 ~ 600 d; 反向法设置发射窗口为 2025 年 5 月 ~ 2025 年 11 月, 转移时间 200 ~ 600 d。

设置遗传算法种群数 1 000,最大代数 500。仿真计算机 CPU 为 i7-7700,主频 3.60 GHz,四核并行。正向法、反向法、混合法的仿真结果见表 2。

表 1 1989 ML 历元及轨道根数(日心黄道坐标系)

Tab.1 Epoch and orbital elements of 1989 ML (referenced in the heliocentric ecliptic coordinate frame)

历元时刻	半长轴/ua	偏心率	轨道倾角/(°)	升交点赤经/(°)	近地点幅角/(°)	平近点角/(°)
2 457 600.5	1.272 144 6	0.136 358 8	4.377 93	104.350 70	183.348 44	306.869 99

表 2 1989 ML 各方法仿真结果

Tab.2 Results of 1989 ML obtained by different methods

方法	发射日期	借力高度/ km	借力前 C3/ (km ² ·s ⁻²)	借力后 C3/ (km ² ·s ⁻²)	转移时间/ d	速度增量/ (km·s ⁻¹)	单次优化平均 用时/s	运行 10 次 收敛次数
正向法	2025-07-14	100.00	5.370	6.590	444.4	1.362	688	2
反向法	2025-06-18	100.01	6.191	7.014	526.6	1.480	100	3
混合法	2025-07-14	100.00	5.447	6.586	443.8	1.362	333	8

从表 2 可以看出:直接利用遗传算法开展正向法优化,解的稳定性较差,10 次仿真只有 2 次收敛到最优解;并且单次优化用时 688 s,效率在几种方法中最低。直接利用遗传算法开展反向法优化,虽然单次优化用时只有 100 s,但从 1.480 km·s⁻¹的速度增量和其他量的值,可以看出并没有优化至最优解;并且 10 次优化只有 3 次收敛到该解,稳定性较差。混合法中,多目标优化两个优化目标分别是速度增量与发射 C3;设置保留 6 组多目标优化个体(N=6)。反向法多目标优化时 Pareto 前沿见图 7,当前前沿包含的解对应的轨道速度增量分布在 1.5~5.5 km·s⁻¹,C3 分布在 0~4.5 km²·s⁻²,可见,通过多目标优化能够获得具备多样性的解。局部优化后选择速度增量小的前 3 组解(M=3),再使用全局搜索算法优化。仿真结果显示,混合法对局部优化后的 3 组解进行了有效优化,10 次仿真中有 8 次收敛到最优解,混合优化法解的稳定性相比正向法提升 4 倍。单次优化用时相比正向法节省 355 s,用时缩短 50% 以上。

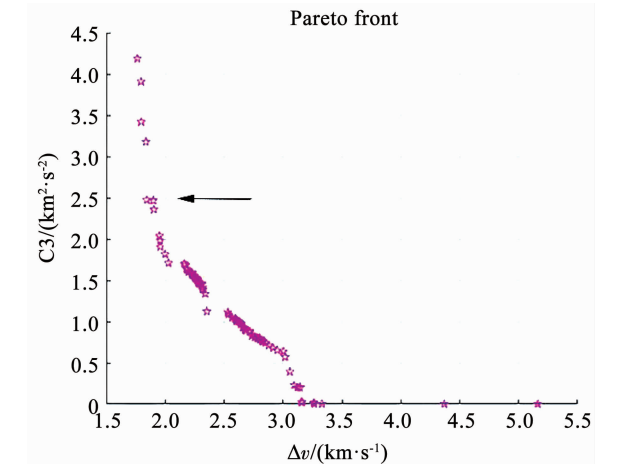


图 7 1989 ML 速度增量-C3 Pareto

Fig. 7 1989 ML Pareto front of Δv and C3

交会小行星 1989 ML 混合法优化结果对应的轨道见图 8、9。

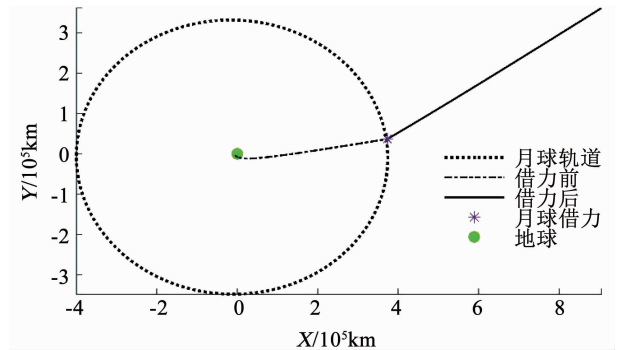


图 8 1989 ML 月球借力转移示意

Fig. 8 Illustration of LGA transfer to 1989 ML

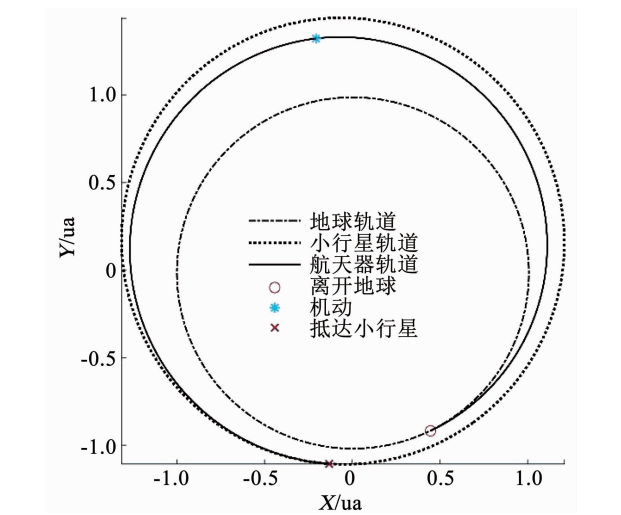


图 9 1989 ML 日心转移轨道示意

Fig. 9 Illustration of heliocentric transfer to 1989 ML

3.2 算例 2

以探测 2003 SM84 小行星为例,开展月球借力逃逸转移轨道优化设计。2003 SM84 的轨道根数见表 3。

正向法设置发射窗口为 2027~2030 年,转移时间 100~600 d;反向法设置发射窗口为 2027 年 5 月~

2027 年 11 月,转移时间 200 ~ 600 d。

仿真结果见表 4。从表 4 可以看出:利用遗传算法开展正向法优化,10 次仿真只有 2 次收敛到最优解,解的稳定性较差;平均单次优化用时 623 s,效率在几种方法中最低。利用遗传算法开展反向法优化,10 次仿真有 4 次收敛到最优解,虽然单次优化用时少,但由于反向法的模型简单,得出的轨道并不是最优解。混合法中,多目标优化时 Pareto 前沿见图 10。当前前沿包含的解对应的轨道速度增量分

布在 $1.5 \sim 3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, C3 分布在 $0 \sim 5 \text{ km}^2 \cdot \text{s}^{-2}$,可见,通过多目标优化获得了具备多样性的解。仿真结果显示,10 次仿真中有 6 次能收敛到最优解,稳定性相比正向法提升 3 倍。单次优化用时相比正向法节省 312 s,用时缩短约 50%。有效地提升了解的稳定性和计算效率。

交会小行星 2003 SM84 混合法优化结果对应的轨道见图 11、12。

表 3 2003 SM84 历元及轨道根数(日心黄道坐标系)

Tab. 3 Epoch and orbital elements of 2003 SM84 (referenced in the heliocentric ecliptic coordinate frame)

历元时刻	半长轴/ua	偏心率	轨道倾角/(°)	升交点赤经/(°)	近地点幅角/(°)	平近点角/(°)
2 456 400.5	1.125 476 00	0.082 085 90	2.795 197 00	87.401 733 15	186.715 664 70	1.455 312 79

表 4 2003 SM84 各方法仿真结果

Tab. 4 Results of 2003 SM84 obtained by different methods

方法	发射日期	借力高度/ km	借力前 C3/ ($\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)	借力后 C3/ ($\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)	转移时间/ d	速度增量/ ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)	单次优化平均 用时/s	运行 10 次 收敛次数
正向法	2027-06-21	100	5.503	7.318	464.9	1.068	623	2
反向法	2027-06-25	100	6.678	7.336	452.0	1.691	50	4
混合法	2027-06-21	100	5.661	7.326	464.8	1.068	311	6

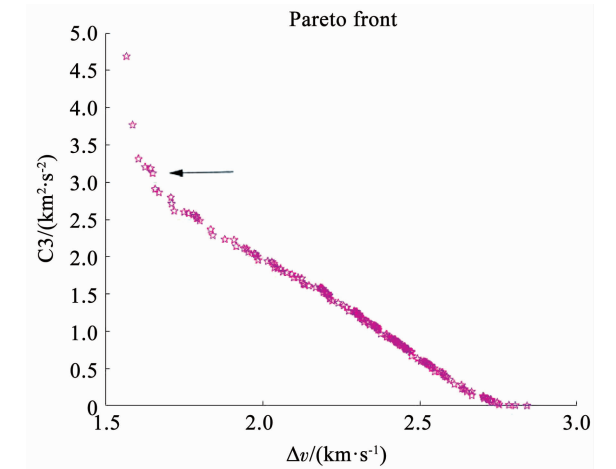


图 10 2003 SM84 速度增量 - C3 Pareto

Fig. 10 2003 SM84 Pareto front of Δv and C3

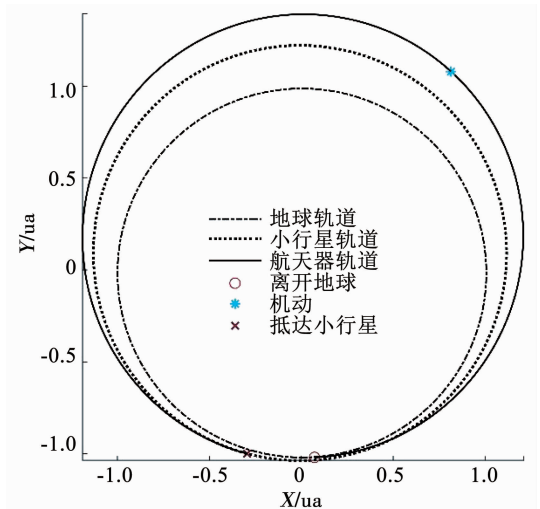


图 12 2003 SM84 日心转移轨道示意

Fig. 12 Illustration of heliocentric transfer to 2003 SM84

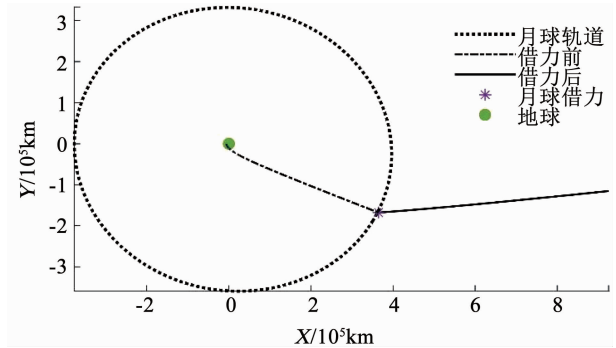


图 11 2003 SM84 月球借力转移示意

Fig. 11 Illustration of LGA transfer to 2003 SM84

4 结 论

针对正向法全局优化效率低、收敛稳定性差、反向法模型精度不高的缺点,为进一步提升算法收敛稳定性和收敛速度,本文提出了结合两种方法优点的混合优化方法:以多目标优化反向法快速求解出的 Pareto 解集为初始参考轨道,局部优化后再利用正向法精确模型下在参考轨道附近开展全局搜索,获得最优转移轨道。最后以 1989 ML 和 2003 SM84 小行星为探测目标进行仿真,结果显示解的收敛稳

定性相比正向法提升 3 倍以上, 计算用时缩短 50% 以上。验证了该方法的有效性。

参考文献

[1] JOHNSON T V, YEATES C M, YOUNG R. Space science reviews volume on Galileo Mission overview [J]. Space Science Review, 1992, 60: 3. DOI: 10.1007/BF00216848

[2] RUSSELL C T, CAPACCIONI F, CORADINI A, et al. Dawn Mission to Vesta and Ceres [J]. Earth, Moon, and Planets, 2007, 101: 65. DOI: 10.1007/s11038-007-9151-9

[3] LAURETTA D S, BALRAM-KNUTSON S S, BESHORE E, et al. OSIRIS-REx: sample return from asteroid (101955) Bennu [J]. Space Science Review, 2017, 212: 925. DOI: 10.1007/s11214-017-0405-1

[4] KAWAGUCHI J. The Hayabusa mission—its seven years flight [C]//Proceedings of 2011 Symposium on VLSI Circuits-Digest of Technical Papers. Kyoto: IEEE, 2011: 2

[5] WATANABE S I, TSUDA Y, YOSHIKAWA M, et al. Hayabusa2 mission overview [J]. Space Science Review, 2017, 208: 3. DOI: 10.1007/s11214-017-0377-1

[6] CAMPAGNOLA S, JEHN R, VAN DAMME C C, et al. Design of lunar gravity assist for the bepicolombo mission to mercury [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2005, 119: 427

[7] FARQUHAR R, MUHONEN D, CHURCH L. Trajectories and orbital maneuvers for the ISEE-3/ICE comet mission [C]//Astrodynamics Conference. Seattle: AIAA, 1984. DOI: 10.2514/6.1984-1976

[8] UESUGI K, MATSUO H, KAWAGUCHI J, et al. Japanese first double lunar swing-by mission “Hiten” [J]. Acta Astronautica, 1991, 25(7): 347. DOI: 10.1016/0094-5765(91)90014-V

[9] KAWAGUCHI J, YAMAKAWA H, UESUGI T, et al. On making use of lunar and solar gravity assists in LUNAR-A, PLANET-B missions [J]. Acta Astronautica, 1995, 35(9/10/11): 633. DOI: 10.1016/0094-5765(95)00013-p

[10] GIL-FERNÁNDEZ J, VAN DAMME C C, GRAZIANO M, et al. ExoMars alternative escape trajectories with Soyuz/Fregat [J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 2005, 1065: 15. DOI: 10.1196/annals.1370.011

[11] CASALINO L, LANTOINE G. Design of lunar-gravity-assisted escape trajectories [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 2020, 427: 21. DOI: 10.1007/s40295-020-00229-w

[12] HE Shengmao, ZHU Zhengfan, PENG Chao, et al. Optimal design of near-Earth asteroid sample-return trajectories in the Sun-Earth-

Moon system [J]. Acta Mechanica Sinica, 2016, 32(4): 753. DOI: 10.1007/s10409-015-0527-1

[13] 杨洪伟, 陈杨, 宝音贺西, 等. 共振引力辅助轨道的设计方法及应用 [C]//中国宇航学会深空探测技术专业委员会第九届学术年会论文集(上册). 北京: 中国宇航学会, 2012: 194

YANG Hongwei, CHEN Yang, BAOYIN Hexi, et al. Design method and application of resonant gravity assist orbit [C]//Proceedings of the 9th Annual Conference of Deep Space Exploration Technology Professional Committee of Chinese Astronautical Society (Volume 1). Beijing: Chinese Society of Astronautics, 2012: 194

[14] BREAKWELL J V, PERKO L M. Matched asymptotic expansions, patched conics, and the computation of interplanetary trajectories [J]. Progress in Astronautics and Rocketry, 1966, 17: 159. DOI: 10.1016/b978-1-4832-2729-0.50015-6

[15] 何巍, 茹家欣, 陈风雨. 月球借力发射火星探测器方法研究 [J]. 中国科学: 技术科学, 2009, 39(3): 516

HE Wei, RU Jiaxin, CHEN Fengyu. Research on the method of launching mars probe by lunar gravity assist [J]. Science China Technical Science, 2009, 39(3): 516

[16] CASALINO L, FILIZOLA. Design of high-energy escape trjectories with lunar gravity assist [C]//Proceedings of the 26th International Symposium on Space Flight Dynamics. Matsuyama; [s. n.], 2017

[17] 刘靖怡. 近地小行星取样返回任务转移轨道优化设计 [D]. 北京: 中国科学院大学, 2020

LIU Jingyi. Transfer trajectory optimization of near-Earth asteroid sample return mission [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2020

[18] DEB K, AGRAWAL S, PRATAP A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II [C]//Proceedings of International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. [S. l.]: Springer, 2000: 849. DOI: 10.1007/3-540-45356-3_83

[19] 刘红英, 夏勇, 周永生. 数学规划基础 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版, 2012

LIU Hongying, XIA Yong, ZHOU Yongsheng. Fundamentals of mathematical programming [M]. Beijing: Beihang University Press, 2012

[20] UGRAY Z, LASDON L, PLUMMER J, et al. Scatter search and local NLP solvers: a multistart framework for global optimization [J]. INFORMS Journal on Computing, 2007, 19(3): 328. DOI: 10.1287/ijoc.1060.0175

(编辑 苗秀芝)