

DOI:10.11918/202403054

# 参数未知的复混沌系统错位复修正函数投影同步

杨玉佩<sup>1</sup>, 王聪<sup>2</sup>, 张宏立<sup>2</sup>, 马萍<sup>2</sup>, 张绍华<sup>1</sup>

(1. 新疆大学 电气工程学院, 乌鲁木齐 830017; 2. 新疆大学 智能科学与技术学院, 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 为解决参数未知的复混沌系统在复杂状态变量无法分离情况下的同步控制问题, 提出了错位复修正函数投影同步 (misalignment complex correction function projection synchronization, MCCFPS) 控制方案。首先, 设计一种自适应跟踪控制器, 使其能够适应任意有界复混沌系统之间的差异。该控制器通过动态控制强度和收敛因子增强自适应能力并调节收敛速度, 通过 Lyapunov 理论证明该控制器的收敛性, 从而为控制方案的可靠性提供理论支持。然后, 对两个异构的复混沌系统进行动力学模型分析, 计算并比较混沌系统和复混沌系统时间序列的模糊熵, 验证复混沌系统的复杂度更高, 从而突显其同步控制在保密通信应用中的优越性, 并进一步设计其 MCCFPS 同步方案。最后, 通过数值仿真验证 MCCFPS 方案的有效性。结果表明: 该方案能够成功实现复混沌系统的同步控制, 并具有良好的同步效果和控制性能。总体来说, 相较于传统的混沌系统, 研究引入复变量, 并采用更复杂的 MCCFPS 同步控制方案, 直接在复域中实现混沌同步, 有效提高了系统的安全性。研究结果为复系统同步控制问题提供了新的思路和途径, 具有重要的应用价值。

**关键词:** 复混沌系统; 复变量; MCCFPS; 参数辨识; 模糊熵

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

文章编号: 0367-6234(2024)09-0065-11

## Misalignment complex correction function projection synchronization of complex chaotic systems with unknown parameters

YANG Yupei<sup>1</sup>, WANG Cong<sup>2</sup>, ZHANG Hongli<sup>2</sup>, MA Ping<sup>2</sup>, ZHANG Shaohua<sup>1</sup>

(1. College of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China;

2. College of Intelligent Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi 830017, China)

**Abstract:** To address the problem of synchronizing chaotic systems with unknown parameters and complex state variables that cannot be separated, a misalignment complex correction function projection synchronization (MCCFPS) control scheme is proposed. First, an adaptive tracking controller is designed to accommodate the differences between any bounded complex chaotic systems. This controller enhances adaptive capability and adjusts convergence speed through dynamic control strength and convergence factors, and proves the convergence of the controller through Lyapunov theory, providing theoretical support for the reliability of the control scheme. Subsequently, the dynamic models of two heterogeneous complex chaotic systems are analyzed. Fuzzy entropy of the time series of chaotic and complex chaotic systems is calculated and compared to validate that complex chaotic systems have higher complexity. This highlights the superiority of their synchronization control in secure communication applications. The MCCFPS synchronization scheme is further designed. Finally, the effectiveness of the MCCFPS scheme is verified through numerical simulations. The results demonstrate that the scheme successfully achieves synchronization control of complex chaotic systems, exhibiting good synchronization effects and control performance. Overall, compared to traditional chaotic systems, this study introduces complex variables and adopts a more sophisticated synchronization control scheme, MCCFPS, to directly achieve chaotic synchronization in the complex domain, effectively enhancing system security. This research provides new ideas and approaches to the synchronization control problem of complex systems, holding significant practical value.

**Keywords:** complex chaotic systems; complex variables; MCCFPS; parameter identification; fuzzy entropy

在当今科学与工程领域中, 复混沌系统的控制与同步已成为备受关注的热点议题。复混沌系统具

有复变量和复参数, 能够将变量数量翻倍并产生更复杂多变的动力学行为, 从而更准确地描述实际物

收稿日期: 2024-03-25; 录用日期: 2024-05-22; 网络首发日期: 2024-06-27

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/23.1235.T.20240626.1626.009>

基金项目: 自治区自然科学基金(2022D01C367); 天山英才培养计划(2023TSYCCX0037, 2023TSYCCQNTJ0020)

作者简介: 杨玉佩(1998—), 女, 硕士研究生; 王聪(1989—), 女, 副教授, 博士生导师

通信作者: 王聪, wangc@xju.edu.cn

理模型的特点<sup>[1-2]</sup>。由于其多变的动力学行为和丰富的混沌特性,在天气和气候预测、图像加密、信号处理等领域具有广泛的应用前景,特别是在保密通信领域,引入复变量能够增强系统的抗攻击能力,并提高传输效率<sup>[3]</sup>。

近年来,越来越多的研究者开始关注复混沌系统的动态行为、稳定性、控制和同步<sup>[4]</sup>。例如,Sun 等<sup>[5]</sup>研究了 3 个分数阶复混沌系统的实组合同步问题,通过稳定性理论将两个分数阶复混沌系统和 1 个分数阶复混沌系统渐近同步到两个标度矩阵;Zhang 等<sup>[6]</sup>提出了一种新的复组合多开关反同步控制方案,实现了 3 个分数阶复混沌系统和两个整数阶复混沌系统之间的同步;Sajid 等<sup>[7]</sup>研究了一种异构复分数阶混沌系统的混合复投影同步方案,通过利用复标度矩阵,增加了通信的不可预测性和图像加密安全性。然而,复混沌系统普遍存在参数未知问题。在实际工程应用中,参数的不确定性通常会对系统的控制和同步造成影响<sup>[8]</sup>。特别是在保密通信中,接收端的参数通常是不确定的,这将直接影响通信质量<sup>[9-10]</sup>。因此,研究具有不确定参数的复混沌系统的控制更具有现实意义。

为了解决这一问题,近年来学者们提出了一系列创新的同步方案。Wang 等<sup>[11]</sup>介绍了一种基于忆阻器的超混沌复 Lü 系统,并研究了其自适应复数广义同步,实现了对两个参数未知的相同超混沌复 Lü 系统的复杂广义同步和参数辨识;Zhang 等<sup>[12]</sup>提出了含未知参数复混沌系统的跟踪控制方案和参数识别方法,并通过仿真验证了方案的有效性。目前大部分研究依旧采用分离复混沌系统的实部和虚部的方法进行同步控制,这增加了计算的难度,且并非所有复混沌系统都能简化为实部和虚部。此外,从混沌同步方式越复杂越有利于保密性能的角度来看,选择更复杂的同步方案可以提高密钥生成的效率,增强数据加密和解密以及通信信道的安全保护功能,从而提高保密通信的隐蔽性和可靠性。

在各种同步方案中,修正投影同步<sup>[13]</sup>是一种重要的方式,其可以将主系统和从系统同步到一个特定尺度的对角矩阵,能够将二进制数字扩展到更高进制的数字,从而实现更快的传输速度,在保密通信中具有重要意义。完全同步、反同步以及投影同步均属于修正投影同步的特例。张平奎等<sup>[14]</sup>研究了分数阶神经网络的修正投影同步问题,通过选取适当的激励控制器辅助设计滑模控制器,并设计了合适的切换平面和有效的趋近率,最终实现了修正投影同步。这种同步方式相较于传统同步方式更复杂,但却更安全。修正投影同步增强了控制器在实

际工程应用中的随机性和不可预测性,从而进一步提高了系统的抗攻击能力。通过利用各种电子元件构建模拟电路,可以实现复杂控制器的实际应用。此外,复杂控制器引入更多的非线性项和参数,增加了混沌同步的复杂度,从而提高了系统的防御能力和稳健性。

受上述启发,本文提出一种基于自适应理论和 Lyapunov 理论的异构复混沌系统的错位复修正函数投影同步 (misalignment complex correction function projection synchronization, MCCFPS) 控制方案。该方案引入含复数的混沌系统,拥有更多的状态变量和复杂的动态特性,通过非线性函数耦合响应系统和驱动系统后,与响应系统实现错位函数投影同步,采用更精密的同步控制方案,充分利用复数域的特性,提高了同步控制的效率和精度,呈现出多样化的同步方式。进一步对经典复混沌系统进行模型分析,并设计 MCCFPS 控制器和参数更新律,数值仿真验证所提方案的有效性,为复混沌系统同步控制研究提供新的思路和方法。

## 1 MCCFPS 问题及控制器设计分析

### 1.1 MCCFPS 问题描述

考虑将如下形式的复混沌系统作为驱动系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  为复数状态变量, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r + \mathbf{j}\mathbf{x}^i$ ,  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$  为虚数单位,上标  $r$  和  $i$  分别标记实部和虚部; $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  为不确定的复参数矩阵; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  为连续非线性复函数。

考虑将以下复混沌系统作为响应系统

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  为复数状态变量, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^r + \mathbf{j}\mathbf{y}^i$ ;  $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  为复参数矩阵; $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  为连续非线性复函数; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^r + \mathbf{j}\mathbf{u}^i$  为控制器。

**定义 1** 状态变量误差为

$$\mathbf{e}_k = (\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t)y_k - \gamma_h(t)x_h) \quad (3)$$

式中: $x_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ )、 $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n, h \neq k$ ) 分别为  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$  的分量; $\mathbf{e}_k$  为  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$  的分量; $\alpha_k(t)$ 、 $\beta_k(t)$ 、 $\gamma_h(t)$  均为有界可微的连续函数。

本文的主要目标是设计驱动系统中未知参数的自适应更新规律和 MCCFPS 控制器  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  使得驱动系统(1)和响应系统(2)满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|(\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t)y_k - \gamma_h(t)x_h)\| = 0$ , 式中  $\|\cdot\|$  为一个矢量的欧几里得范数,则系统(1)和(2)实现 MCCFPS,不同的同步类型见表 1。

表1 同步类型

Tab.1 Function synchronization type

状态变量误差	同步类型
$e_h = y_h - kx_h (\gamma(t) = k)$	投影同步
$e_h = y_h - \gamma(t)x_h$	复函数投影同步
$e_h = y_h - \gamma_h(t)x_h$	复修正函数投影同步
$e_h = \alpha_h(t)y_h - \gamma_h(t)x_h$	广义修正函数投影同步

由表1可知,通过设置非线性连续函数  $\alpha_h(t)$ 、 $\gamma_h(t)$  从而实现不同类型的同步,错位复修正函数投影同步可看作是表中同步类型的推广。

1.2 MCCFPS 控制器的设计及稳定性分析

假设驱动系统的参数未知,由式(3)可得同步误差系统动力学方程为

$$\dot{e}_k = \dot{\alpha}_k(t)x_h y_k + \dot{\beta}_k(t)y_k + (\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t))\dot{y}_k - \dot{\gamma}_h(t)x_h + (\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))\dot{x}_h \quad (4)$$

定理1 含未知参数的驱动系统(1)和响应系统(2)的 MCCFPS 同步控制器为

$$u_k(x_h, y_k) = -[\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t)]^{-1}[(\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t))(By_k + g(y_k)) + \dot{\alpha}_k(t)x_h y_k + \dot{\beta}_k(t)y_k - \dot{\gamma}_h(t)x_h + \hat{A}_h(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))x_h + (\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))f(x_h) - L_k e_k] \quad (5)$$

式中: $\hat{A}_h$  为估计参数 $\hat{A}$ 的分量, $\hat{A}$ 为 $A$ 的估计值; $L_k$  为控制强度  $L = [L_1, L_2, \dots, L_n]^T$  的分量。其中 $\hat{A}_h$  和  $L_k$  的自适应更新律为

$$\begin{cases} \dot{\hat{A}}_h = \sigma_h [((\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))F(x_h))^r \\ ((\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))F(x_h))^i] \begin{bmatrix} e_k^r \\ e_k^i \end{bmatrix} \\ \dot{L}_k = -\zeta_k \|e_k\|^2 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\sigma_h$  和  $\zeta_k$  为正常数, $F(x_h)$  为非线性函数。利用式(5)、(6)可使系统(1)、(2)实现 MCCFPS,同时能够识别驱动系统中的未知参数,即对任意的初始值都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{A} = A$ 。

证明 构建 Lyapunov 函数  $V(t)$  为

$$V(t, e_k(t)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(e_k^r)^2 + (e_k^i)^2] + \frac{1}{2\zeta} \sum_{k=1}^n (L_k + L^*)^2 + \frac{1}{2\sigma} [(\tilde{A}^r)^T \tilde{A}^r + (\tilde{A}^i)^T \tilde{A}^i] \quad (7)$$

式中: $L^*$  为一个很大的正常数, $\tilde{A} = \hat{A} - A$ 。易知  $V(t)$  是正定的,其关于时间的变化率为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (\dot{e}^r)^T e^r + (\dot{e}^i)^T e^i - \sum_{k=1}^n (L_k + L^*)^2 \|e_k\|^2 + \\ &\frac{1}{\sigma} [(\tilde{A}^r)^T \tilde{A}^r + (\tilde{A}^i)^T \tilde{A}^i] = [(\dot{\alpha}_k(t)x_h y_k + \\ &\dot{\beta}_k(t)y_k + (\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t))\dot{y}_k - \dot{\gamma}_h(t)x_h + \\ &(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))\dot{x}_h)^r]^T e^r + [(\dot{\alpha}_k(t)x_h y_k + \\ &\dot{\beta}_k(t)y_k + (\alpha_k(t)x_h + \beta_k(t))\dot{y}_k - \dot{\gamma}_h(t)x_h + \\ &(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))\dot{x}_h)^i]^T e^i - \sum_{k=1}^n L^* \|e_k\|^2 - \\ &\sum_{k=1}^n L_k \|e_k\|^2 + \frac{1}{\sigma} [(\tilde{A}^r)^T \tilde{A}^r + (\tilde{A}^i)^T \tilde{A}^i] \end{aligned} \quad (8)$$

将式(1)、(2)、(5)、(6)代入式(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{k=1}^n [(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))(A_h - \hat{A}_h)F(x_h) + \\ &L_k e_k]^r e_k^r + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))(A_h - \\ &\hat{A}_h)F(x_h) + L_k e_k]^i e_k^i - \sum_{k=1}^n L^* \|e_k\|^2 - \\ &\sum_{k=1}^n L_k \|e_k\|^2 - \sum_{k=1}^n [(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))(A_h - \\ &\hat{A}_h)F(x_h)]^r e_k^r - \sum_{k=1}^n [(\alpha_k(t)y_k - \gamma_h(t))(A_h - \\ &\hat{A}_h)F(x_h)]^i e_k^i = - \sum_{k=1}^n L^* \|e_k\|^2 \leq 0 \quad (9) \end{aligned}$$

选择合适的控制参数  $\sigma$  和  $\zeta$ ,由于  $V(t)$  是一个正 Lyapunov 函数,其导数  $\dot{V}(t)$  为半负定,根据 Lyapunov 稳定性定理,同步误差  $e_k$  随时间趋于无穷渐近收敛于零,参数  $\hat{a}_1$ 、 $\hat{a}_2$  和  $\hat{a}_3$  随时间趋于无穷渐近收敛于固定参数,误差系统(4)在原点渐近稳定,成功地实现了系统(1)、(2)的 MCCFPS 和参数辨识。

2 复混沌系统的分析

2.1 复 Lü 混沌系统和复 Lorenz 系统动力学模型分析

选择复 Lü 混沌系统模型<sup>[15]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = (\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2)/2 - a_3 x_3 \end{cases} \quad (10)$$

式中参数  $a_1 = 30 + j$ 、 $a_2 = 26 + 0.3j$ 、 $a_3 = 1$  时,其时域波形和相图分别见图1和图2。

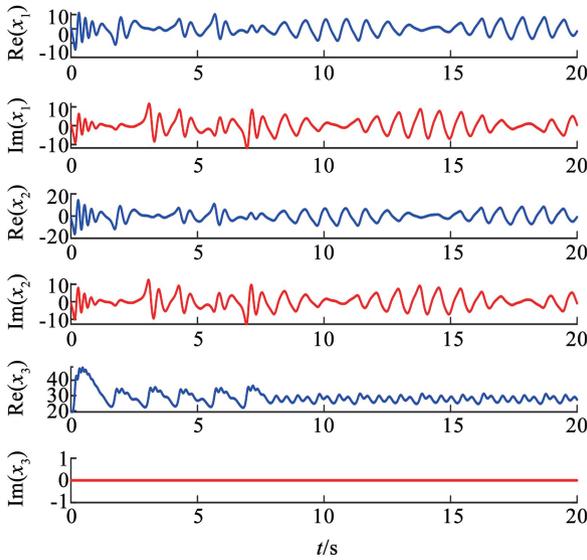
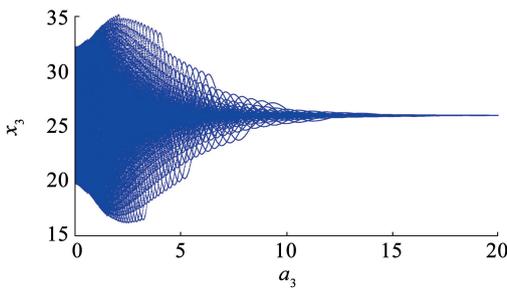


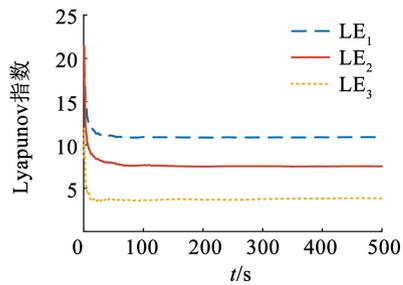
图 1 复参数 Lü 混沌系统时域波形

Fig. 1 Time domain waveform of complex parameter Lü chaotic system

除了上述的相图,还利用常规非线性分析手段中的分岔图和 Lyapunov 指数谱研究复混沌系统的动力学特性<sup>[16-17]</sup>。图 3 为复参数 Lü 混沌系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱。图 3(a)是系统(10)状态变量  $x_3$  的分岔图。随着  $a_3$  在  $[0, 10]$  内递增,系统先进入混沌状态,随后从复杂的行为转变为简单的周期性行为。图 3(b)是系统(10)的 Lyapunov 指数



(a) 复参数 Lü 混沌系统的分岔图



(b) 复参数 Lü 混沌系统的 Lyapunov 指数谱

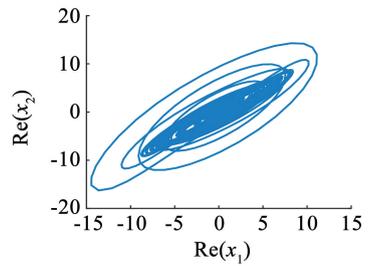
图 3 复参数 Lü 混沌系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱

Fig. 3 Bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum of the complex parameter Lü chaotic system

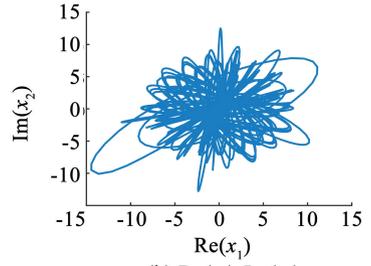
复 Lorenz 系统模型<sup>[18]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = b_1(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = b_2 y_1 - b_3 y_2 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 = (\bar{y}_1 y_2 + y_1 \bar{y}_2) / 2 - b_4 y_3 \end{cases} \quad (11)$$

式中参数  $b_1 = 10$ 、 $b_2 = 50 + 0.02j$ 、 $b_3 = 1 - 0.05j$ 、 $b_4 = 1$  时,时域波形和混沌吸引子相图见图 4 和



(a)  $Re(x_1)-Re(x_2)$



(b)  $Re(x_1)-Im(x_2)$

图 2 复参数 Lü 混沌系统混沌吸引子相图

Fig. 2 Chaotic attractor phase diagram of complex parameter Lü chaotic system

谱,其中 Lyapunov 指数分别为  $LE_1$ 、 $LE_2$ 、 $LE_3$ 。通过数值方法计算系统中每个状态变量的 Lyapunov 指数,若系统具有 1 个正的 Lyapunov 指数,其处于混沌状态;若其具有两个或以上正的 Lyapunov 指数,则处于超混沌状态。复混沌系统虽只有三维,但从图 3(b)可知其具有 3 个正的 Lyapunov 指数,表现出了超混沌系统的特征,因此,系统(10)处于混沌状态。

图 5。图 6 为复参数 Lorenz 混沌系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱。图 6(a)是系统(11)状态变量  $y_2$  的分岔图。随着  $b_1$  在  $[0, 15]$  内递增,系统由周期分岔通向混沌状态。图 6(b)是系统(11)的 Lyapunov 指数谱,其具有 3 个正的 Lyapunov 指数  $LE_4$ 、 $LE_5$ 、 $LE_6$ ,表现出超混沌特性,系统(11)处于混沌状态。

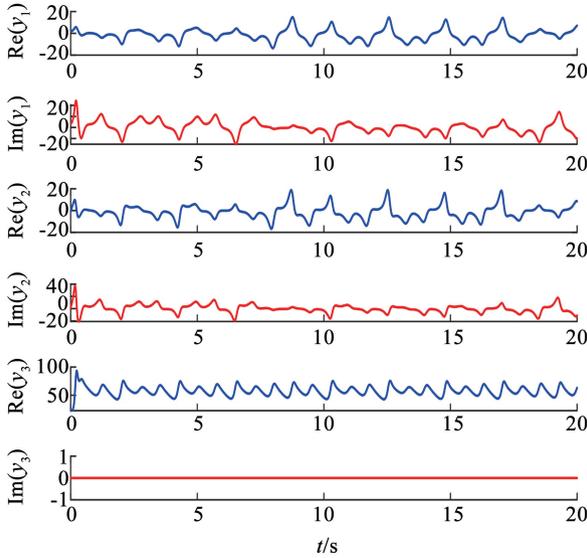


图4 复参数 Lorenz 混沌系统时域波形

Fig. 4 Time domain waveform of complex parameter Lorenz chaotic system

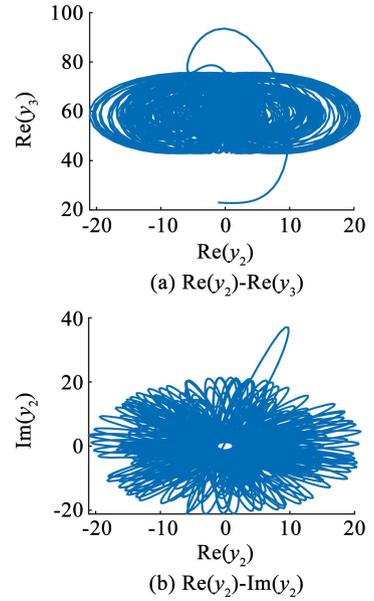
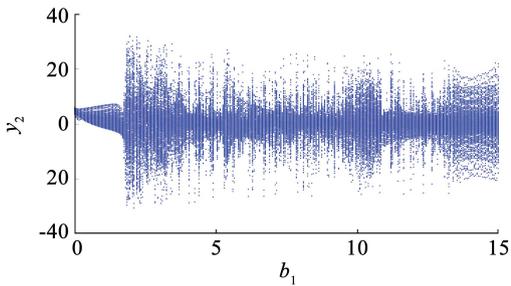
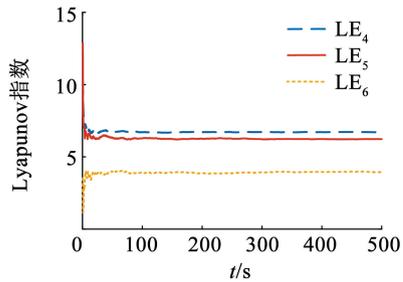


图5 复参数 Lorenz 混沌系统混沌吸引子相图

Fig. 5 Chaotic attractor phase diagram of complex parameter Lorenz chaotic system



(a) 复参数Lorenz混沌系统的分岔图



(b) 复参数Lorenz混沌系统的Lyapunov指数谱

图6 复参数 Lorenz 混沌系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱

Fig. 6 Bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum of the complex parameter Lorenz chaotic system

### 2.2 复杂度分析

在保密通信领域,混沌系统的复杂性至关重要,因为具有高复杂性的混沌系统通常代表着更高的安全性<sup>[19-20]</sup>。为了证明本文所研究的对象相较于实数域混沌系统的优越性,使用了模糊熵算法 (fuzzy entropy, FuzzyEn)<sup>[21]</sup>进行对比。模糊熵算法是一种用于衡量混沌时间序列复杂程度的测度算法。相较于样本熵、近似熵和谱熵,模糊熵对相似容限度、相空间维数和序列长度的敏感性和依赖性更低,具有更强的鲁棒性,同时其测量值具有更好的连续性。混沌时间序列的 FuzzyEn 值越大,表示其复杂度越高。利用 MATLAB 软件计算并对比 Lorenz 系统和复 Lorenz 系统的模糊熵。由于两个系统对初始值异常敏感,表现出了关于初始值多重稳定性的特性。因此,需要固定系统参数,并分析初始条件对复杂度的影响。

#### 2.2.1 Lorenz 系统复杂度分析

Lorenz 系统是一种经典的混沌系统,由 Edward 于 1963 年提出,是一种简化的大气对流模型,用于描述大气运动中的非线性动力学行为<sup>[22]</sup>。Lorenz 系统由以下 3 个常微分方程组成,模型为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 = c_2z_1 - z_1z_2 - z_1z_3 \\ \dot{z}_3 = z_1z_2 - c_2z_3 \end{cases} \quad (12)$$

式中  $z_1$ 、 $z_2$  和  $z_3$  分别为系统中的状态变量。当选择参数  $c_1 = 10$ 、 $c_2 = 28$ 、 $c_3 = 8/3$  时,Lorenz 系统处于混沌状态。图 7 显示了在上述固定参数条件下,选择初始值为  $[z_1(0), z_2(0), 2]$ 、 $[z_1(0), 2, z_3(0)]$ 、 $[2, z_2(0), z_3(0)]$  时,系统(12)的三维 FuzzyEn 复杂度,其中  $z_1(0)$ 、 $z_2(0)$ 、 $z_3(0)$  均处于  $[-20, 20]$ 。由图 7 可以直观地看出,该系统在这一固定参数条件下,初始值选择  $[-13, 15, 2]$  时,系统复杂度最高,为 0.137 7。

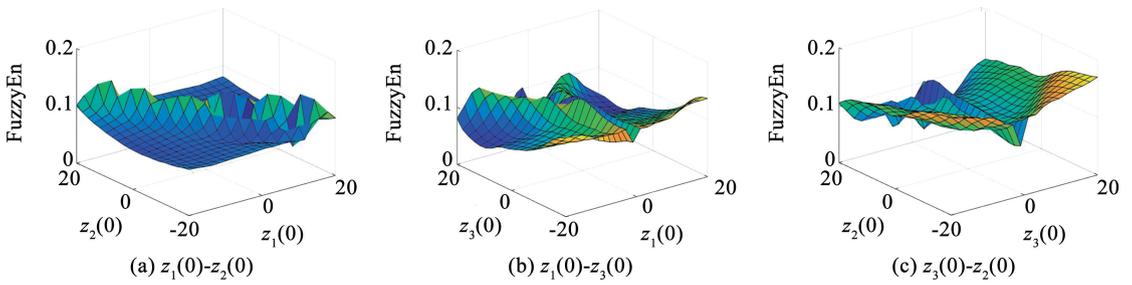


图 7 Lorenz 系统三维 FuzzyEn 复杂度

Fig. 7 Three-dimensional FuzzyEn complexity of the Lorenz system

2.2.2 复 Lorenz 系统复杂度分析

图 8 显示了在固定参数 ( $b_1 = 10, b_2 = 50 + 0.02j, b_3 = 1 - 0.05j, b_4 = 1$ ) 条件下, 选择初始值为  $[y_1^r(0) + y_1^i(0)j, -1 - j, -1 - j], [y_1^r(0) - j, -1 - y_2^i(0)j, -1 - j], [y_1^r(0) + j, -1 - j, -1 - y_3^i(0)j]$  时, 系

统(11)的三维 FuzzyEn 复杂度, 其中  $y_1^r(0), y_1^i(0), y_2^i(0), y_3^i(0)$  均处于  $[-20, 20]$ 。由图 8 可以直观地看出, 该系统在这一固定参数条件下, 初始值选择  $[-2 - 15j, -2 - 15j, -2 - 15j]$  时, 系统复杂度最高, 为 0.233 0。

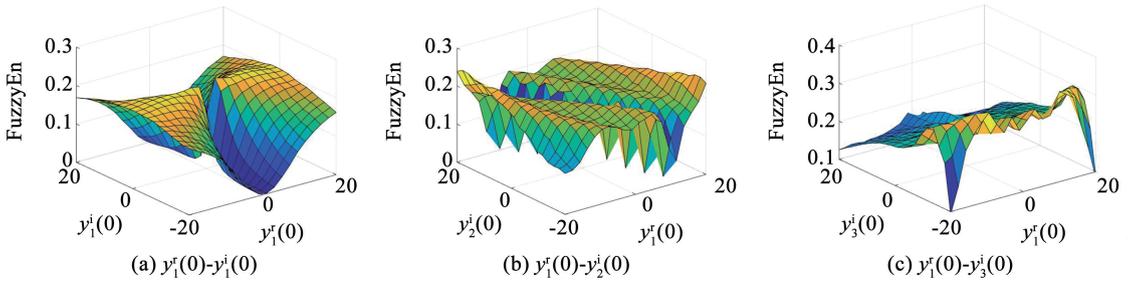


图 8 复 Lorenz 系统三维 FuzzyEn 复杂度

Fig. 8 Three-dimensional FuzzyEn complexity of the complex Lorenz system

综上所述, Lorenz 混沌系统的最高复杂度为 0.133 7, 而复 Lorenz 混沌系统的最高复杂度为 0.233 0。表明复 Lorenz 混沌系统在 FuzzyEn 算法下展现出更高的复杂度, 相较于 Lorenz 混沌系统,

本文所选择的复混沌系统更适合应用于混沌保密通信中, 进一步验证了复混沌系统的优越性。表 2 总结了上述两个混沌系统在固有参数下的 FuzzyEn 复杂度。

表 2 混沌时间序列的 FuzzyEn 值

Tab. 2 FuzzyEn values of chaotic time series

系统类型	参数	初始值	FuzzyEn 复杂度值
Lorenz 系统	$c_1 = 10, c_2 = 28, c_3 = 8/3$	$[-1, -1, -1]$	0.129 4
复 Lorenz 系统	$b_1 = 10, b_2 = 50 + 0.02j, b_3 = 1 - 0.05j, b_4 = 1$	$[-1 - j, -1 - j, -1 - j]$	0.171 3

3 错位复修正函数投影同步的实现

以系统(10)作为驱动系统, 系统(11)加入控制器后为响应系统, 响应系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = b_1(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = b_4 y_1 - b_3 y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = (\bar{y}_1 y_2 + y_1 \bar{y}_2) / 2 - b_4 y_3 + u_3 \end{cases} \quad (13)$$

式中  $u_k (k = 1, 2, 3)$  为待定的非线性反馈控制器。

根据 MCCFPS 的定义, 当驱动系统和响应系统的状态变量中有一对及以上不按照原有对应关系进

行组合时, 误差向量的组合方式更加多样化(驱动系统仅包含实部状态向量, 响应系统仅包含实部匹配)。系统(10)、(13)的 MCCFPS 误差的典型描述为

$$\begin{cases} e_1 = [\alpha_1(t)x_2 + \beta_1(t)]y_1 - \gamma_2(t)x_2 \\ e_2 = [\alpha_2(t)x_1 + \beta_2(t)]y_2 - \gamma_1(t)x_1 \\ e_3 = [\alpha_3(t)x_3 + \beta_3(t)]y_3 - \gamma_3(t)x_3 \end{cases} \quad (14)$$

式中  $\alpha_k(t), \beta_k(t), \gamma_h(t) (k, h = 1, 2, 3, k \neq h)$  均为不为零的非线性比例函数。

根据系统(10)、(13), 可得 MCCFPS 误差动力系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{\alpha}_1(t)x_2y_1 + \dot{\beta}_1(t)y_1 + b_1[\alpha_1(t)x_2 + \beta_1(t)](y_2 - y_1) + [\alpha_1(t)x_2 + \beta_1(t)]u_1 - \dot{\gamma}_2(t)x_2 + a_2[\alpha_1(t)y_1 - \gamma_2(t)]x_2 - [\alpha_1(t)y_1 - \gamma_2(t)]x_1x_3 \\ \dot{e}_2 = \dot{\alpha}_2(t)x_1y_2 + \dot{\beta}_2(t)y_2 + [\alpha_2(t)x_1 + \beta_2(t)](b_4y_1 - b_3y_2 - y_1y_3) + [\alpha_2(t)x_1 + \beta_2(t)]u_2 - \dot{\gamma}_1(t)x_1 + a_1[\alpha_2(t)y_2 - \gamma_1(t)](x_2 - x_1) \\ \dot{e}_3 = \dot{\alpha}_3(t)x_3y_3 + \dot{\beta}_3(t)y_3 + [\alpha_3(t)x_3 + \beta_3(t)][(\bar{y}_1y_2 + y_1\bar{y}_2)/2 - b_2y_3] + [\alpha_3(t)x_3 + \beta_3(t)]u_3 - \dot{\gamma}_3(t)x_3 + [\alpha_3(t)y_3 - \gamma_3(t)](\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2)/2 - a_3[\alpha_3(t)y_3 - \gamma_3(t)]x_3 \end{cases} \quad (15)$$

$$\dot{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{a}}_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 \\ \dot{\hat{a}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 [(\alpha_2(t)(x_2 - x_1)y_2 - \gamma_1(t)(x_2 - x_1))^r e_2^r + (\alpha_2(t)(x_2 - x_1)y_2 - \gamma_1(t)(x_2 - x_1))^i e_2^i] \\ \sigma_2 [(\alpha_1(t)x_2y_1 - \gamma_2(t)x_2)^r e_1^r + (\alpha_1(t)x_2y_1 - \gamma_2(t)x_2)^i e_1^i] \\ \sigma_3 (\gamma_3(t) - \alpha_3(t))y_3 x_3 e_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

构造控制强度为

$$\dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta_1 \|e_1\|^2 \\ -\zeta_2 \|e_2\|^2 \\ -\zeta_3 \|e_3\|^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

**定理 2** 对于任意非零比例函数  $\alpha_k(t)$ 、 $\beta_k(t)$ 、 $\gamma_k(t)$ ,在控制器(16)和自适应变化律(18)的作用下,驱动系统和响应系统的任意初始条件均能使驱动系统(10)和响应系统(12)实现 MCCFPS,且实现驱动系统未知参数的准确辨识。

## 4 数值分析

### 4.1 错位复修正函数投影同步数值仿真

采用 MATLAB R2023a 仿真平台进行仿真实验。选择复 Lü 混沌系统作为驱动系统,复 Lorenz 系统加入控制器后作为响应系统,选择仿真参数见表 3。

表 3 参数选取

Tab. 3 Relevant parameters selection

相关参数	取值
系统参数	$a_1 = 30, a_2 = 26, a_3 = 1, b_1 = 10, b_2 = 50 + 0.02j, b_3 = 1 - 0.05j, b_4 = 1$
初始值	$x(0) = [1 + j, 1 + j, 1 + j]^T, y(0) = [-1 - j, -1 - j, -1 - j]^T$
同比例函数	$\alpha_1 = 3 + \sin t, \alpha_2 = 2 - \cos 3t, \alpha_3 = 2 - \sin t, \beta_1 = 3 + 2\sin t, \beta_2 = \cos t, \beta_3 = \sin t, \gamma_1 = 2\sin t, \gamma_2 = -\cos 2t, \gamma_3 = 1 + 2\sin t$

$$\begin{cases} u_1 = -[\alpha_1(t)x_2 + \beta_1(t)]^{-1}[\dot{\alpha}_1(t)x_2y_1 + \dot{\beta}_1(t)y_1 + b_1(\alpha_1(t)x_2 + \beta_1(t))(y_2 - y_1) - \dot{\gamma}_2(t)x_2 + \hat{a}_2(\alpha_1(t)y_1 - \gamma_2(t))x_2 - (\alpha_1(t)y_1 - \gamma_2(t))x_1x_3 - l_1e_1] \\ u_2 = -[\alpha_2(t)x_1 + \beta_2(t)]^{-1}[\dot{\alpha}_2(t)x_1y_2 + \dot{\beta}_2(t)y_2 + (\alpha_2(t)x_1 + \beta_2(t))(b_4y_1 - b_3y_2 - y_1y_3) - \dot{\gamma}_1(t)x_1 + \hat{a}_1(\alpha_2(t)y_2 - \gamma_1(t))(x_2 - x_1) - l_2e_2] \\ u_3 = -[\alpha_3(t)x_3 + \beta_3(t)]^{-1}[\dot{\alpha}_3(t)x_3y_3 + \dot{\beta}_3(t)y_3 + (\alpha_3(t)x_3 + \beta_3(t))(\bar{y}_1y_2 + y_1\bar{y}_2)/2 - b_2(\alpha_3(t)x_3 + \beta_3(t))y_3 - \dot{\gamma}_3(t)x_3 + (\alpha_3(t)y_3 - \gamma_3(t))(\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2)/2 - \hat{a}_3(\alpha_3(t)y_3 - \gamma_3(t))x_3 - l_3e_3] \end{cases} \quad (16)$$

式中  $l_1, l_2, l_3$  均为控制强度。将式(16)代入式(15),可将 MCCFPS 的误差动力系统简化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = [\alpha_1(t)y_1 - \gamma_2(t)](a_2 - \hat{a}_2)x_2 + l_1e_1 \\ \dot{e}_2 = [\alpha_2(t)y_2 - \gamma_1(t)](a_1 - \hat{a}_1)(x_2 - x_1) + l_2e_2 \\ \dot{e}_3 = [\gamma_3(t) - \alpha_3(t)y_3](a_3 - \hat{a}_3)x_3 + l_3e_3 \end{cases} \quad (17)$$

式中  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  分别为驱动系统(10)的未知参数  $a_1, a_2, a_3$  的估计值,构造驱动系统中不确定参数  $A$  的自适应变化律为

根据驱动系统(10)和响应系统(13) MCCFPS 的误差式(14),代入取定的同步比例函数,可得 MCCFPS 的误差为

$$\begin{cases} e_1 = [(3 + \sin t)x_2 + 2\sin t + 3]y_1 + (\cos 2t)x_2 \\ e_2 = [(2 - \cos 3t)x_1 + \cos t]y_2 - (2\sin t)x_1 \\ e_3 = [(2 - \sin t)x_3 + \sin t]y_3 - (2\sin t + 1)x_3 \end{cases} \quad (20)$$

各状态变量误差曲线见图 9,可以观察到驱动系统(10)和响应系统(13) MCCFPS 的同步误差刚开始表现出一些振荡,但随后迅速趋于零。系统的

仿真结果与理论分析一致,这种快速的收敛速度表明所设计的控制器(16)具备良好的控制能力。因此,同步系统能够迅速而有效地实现 MCCFPS,为系统的稳定和性能提供了可靠的保证。

图 10 为未知参数的自适应估计值。由图 10 可知,在自适应控制律(18)作用下,自适应参数  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  估计值能够很好地估计出系统参数固有值  $a_1 = 30$ 、 $a_2 = 26$ 、 $a_3 = 1$ ,验证了自适应律的正确性,表明设计的自适应控制律具有较好的实用性。

图 11 是响应系统(13)和驱动系统(10)的时域波形曲线。首先通过函数耦合响应系统和驱动系统

得到驱动信号  $((\alpha_k x_h + \beta_k) y_k)$ ,随后通过耦合函数和响应系统得到响应信号  $(\gamma_h x_h)$

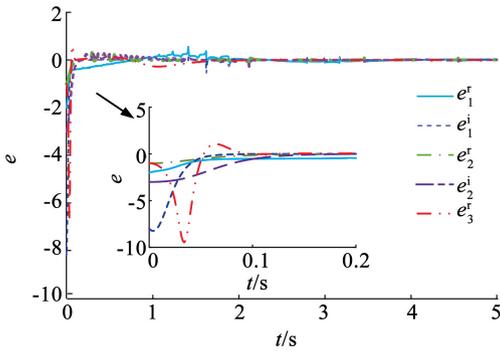


图 9 MCCFPS 误差曲线

Fig. 9 MCCFPS error curve

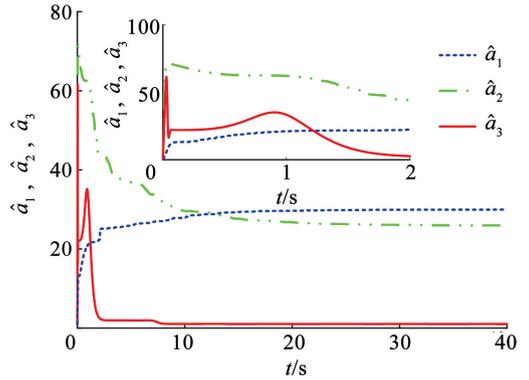
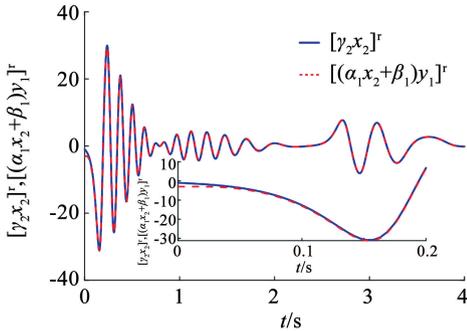
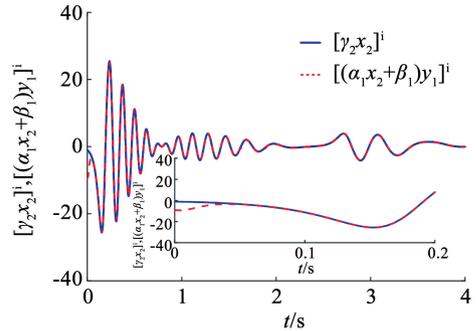


图 10 未知参数的自适应估计值

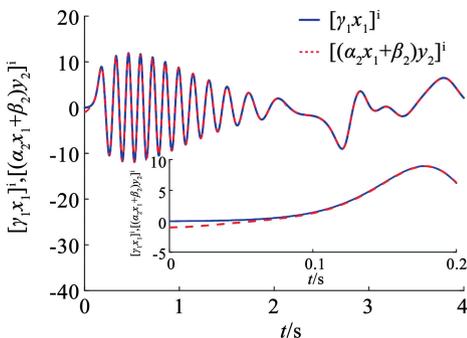
Fig. 10 Adaptive estimation of unknown parameters



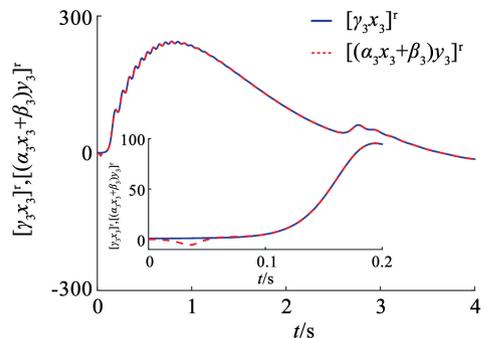
(a)  $[\gamma_2 x_2]^r$ 和 $[(\alpha_1 x_2 + \beta_1) y_1]^r$ 时域波形



(b)  $[\gamma_2 x_2]^i$ 和 $[(\alpha_1 x_2 + \beta_1) y_1]^i$ 时域波形



(c)  $[\gamma_1 x_1]^i$ 和 $[(\alpha_2 x_1 + \beta_2) y_2]^i$ 时域波形



(d)  $[\gamma_3 x_3]^r$ 和 $[(\alpha_3 x_3 + \beta_3) y_3]^r$ 时域波形

图 11 复 Lü 混沌系统跟踪复 Lorenz 系统时域波形

Fig. 11 Time domain waveform of complex parameter Lü chaotic system tracking complex parameter Lorenz system

### 4.2 同步方案抗延迟性能测试

混沌系统对时间极为敏感,而在实际情况下,混沌同步的延迟主要是由信息传输或反馈延迟引起的。在混沌系统中,即使微小的扰动也可能导致系统行为发生显著变化,这使得同步过程对时间的精确性要求极高。因此,选择在系统运行一段时间后(8 s)再引入控制器。图12展示了在第8秒引入控制器后系统的同步性能。由图12(c)和(d)可知,在没有控制器的情况下系统未出现同步,且混沌动

态特性处于自由演变状态。在第8秒引入控制器可以确保系统在稳定状态之前有足够的时间进行演变,并且之后可以迅速达到同步状态,从而证明了方案的可靠性和可重复性。此外,这种延迟还有助于评估控制器的响应时间,以及其对混沌系统同步性能的影响,为后续的控制器的设计提供了更全面的信息。综上所述,延迟引入控制器有助于更好地理解系统的动态行为,并确保实验设计的合理性,进一步评估了同步控制方案的性能。

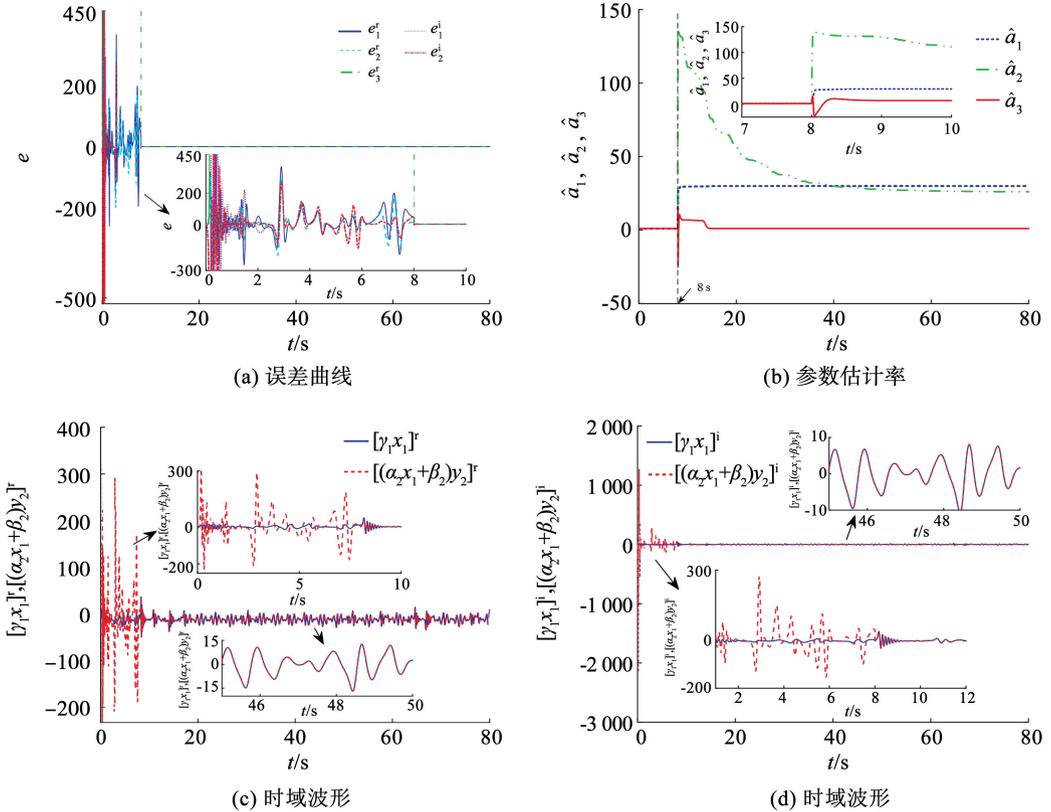


图12 延迟8 s加入控制器后混沌同步控制性能

Fig. 12 Performance of chaos synchronization control after introducing the delay of 8 seconds

### 4.3 复混沌系统投影同步

选择文献[18]中 Sprott B 系统作为研究对象,其中  $w_1 = w_{11} + jw_{12}$ 、 $w_2 = w_{13} + jw_{14}$  为复函数,  $w_3 = w_{15}$  为实函数。将所得等效数学模型作为驱动系统

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -w_1 + w_2 \\ \dot{w}_2 = -w_1 w_3 \\ \dot{w}_3 = (\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2)/2 - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{w}_{11} = -w_{11} + w_{13} \\ \dot{w}_{12} = -w_{12} + w_{14} \\ \dot{w}_{13} = -w_{11} w_{15} \\ \dot{w}_{14} = -w_{12} w_{15} \\ \dot{w}_{15} = w_{11} w_{13} + w_{12} w_{14} - d \end{cases} \quad (21)$$

式中选择参数  $d = 4.45$  时,系统的 Lyapunov 指数分别为 0.156、0.001、0、-1.001 和 -1.155,存在两个大于零的 Lyapunov 指数,系统处于混沌状态。

令系统(11)中状态变量  $y_1 = y_{21} + jy_{22}$ 、 $y_2 = y_{23} + jy_{24}$  为复函数,  $y_3 = y_{25}$  为实函数。将所得等效数学模型作为响应系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = b_1(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = b_2 y_1 - b_3 y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = (\bar{y}_1 y_2 + y_1 \bar{y}_2)/2 - b_4 y_3 + u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_{21} = b_1(y_{23} - y_{21}) + u_{11} \\ \dot{y}_{22} = b_1(y_{24} - y_{22}) + u_{12} \\ \dot{y}_{23} = b_2 y_{21} - b_3 y_{23} - y_{21} y_{25} + u_{13} \\ \dot{y}_{24} = b_2 y_{22} - b_3 y_{24} - y_{22} y_{25} + u_{14} \\ \dot{y}_{25} = y_{21} y_{23} + y_{22} y_{24} - b_4 y_{25} + u_{15} \end{cases} \quad (22)$$

式中选择参数  $b_1 = 10, b_2 = 28, b_3 = 1, b_4 = 1$  时,系统的 Lyapunov 指数分别为 0.496、0.002、0.007、-11.000 和 -12.501,则存在 3 个大于零的 Lyapunov 指数,系统处于混沌状态。定义误差系统为  $e'_s = y_{2s} - qw_{1d}$  ( $s, d = 1, 2, 3, 4, 5$ ), 比例因子  $q = -3$ , 选择控制器

$u_{1s} = qg(y_{2s}) - p(w_{1d}) - K_s e'_s$ , 其中  $K_s$  为大于零的反馈增益系数,  $g(y_{2s}), p(w_{1d})$  为连续的非线性函数, 部分状态时序波形和误差曲线见图 13。由图 13 可知, 误差系统在施加控制器后 1.4 s 收敛于零, 即实现投影同步。

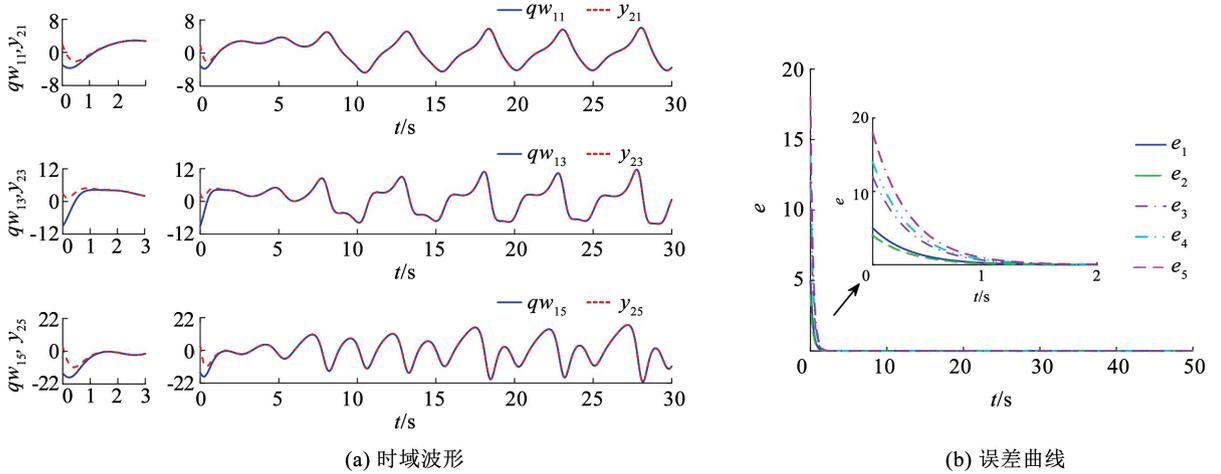


图 13 系统 (21) 和系统 (22) 部分状态时域波形和误差曲线

Fig. 13 Partial state time domain waveforms and error curves of systems (21) and (22)

#### 4.4 讨论与分析

为了详细阐述实验结果, 选择了复 Sprott B 系统和系统 (11) 作为示例进行比较分析, 通过控制器的设计, 实现了系统 (21) 和系统 (22) 的投影同步。这种传统的复混沌系统控制方案通常需要分离实部和虚部, 增加了计算负担, 并且这种分离会降低原有系统的复杂性。此外, 实验结果显示, 传统的投影同步方案需要 1.4 s 才能实现同步, 同步速度较慢。相比之下, 本文提出的控制策略无需分离实部和虚部, 从而降低了计算负担, 并且在明确定义的控制强度下, 仅需 0.2 s 即可实现同步。同时, 选择了较为复杂的控制器实现 MCCFPS, 其复杂性和延迟使用都未影响控制过程的有效性。

通过数值模拟, 所提方案在时域波形图中系统轨迹高度重合, 表明控制策略的可行性。此外, MCCFPS 同步速度小于传统方案的速度, 展示了所提方案具有在复杂混沌系统中实现快速和稳定同步的优越性。本文所选的驱动系统和响应系统的角色可以互换, 而控制策略仍然保持不变。这是因为混沌同步控制的目标是通过控制信号实现两个混沌系统的状态同步, 而不是依赖于特定系统作为驱动或响应系统。因此, 无论选择何种系统作为驱动或响应系统, 都可以实现本文的同步控制方案。即便控制器的设计略有不同, 也可以在数值仿真中实现类似的同步效果。

#### 5 结 论

1) 针对复混沌系统, 提出了无需将系统分解为实部和虚部的同步控制方案, 结果表明该方案在保持系统复杂性的同时显著提高了计算效率。为复混沌系统在复数域中直接进行高效同步控制提供了新思路, 有效降低了计算和分析的复杂度, 简化了传统方案中的繁琐步骤。

2) 通过引入了 MCCFPS 控制器和未知参数的辨识法则, 调节动态控制强度和收敛因子, 进一步优化了收敛速度, 增强了控制器的自适应能力, 使得系统能够快速实现 MCCFPS 同步。结果表明, 该方案不仅实现了复混沌系统的快速同步, 还提高了系统的稳定性和自适应能力, 验证了所设计控制器在复杂系统同步控制中的有效性。

3) 使用的复杂控制器满足了对系统动态行为更精细调节的需求, 同时为提高混沌遮掩保密通信的安全级别提供了借鉴。所提控制方案为提高复混沌系统同步控制效果提供了理论支持, 在提高系统安全性和效率方面具有显著优势, 应用前景广阔。

#### 参考文献

[1] 韩敏, 张雅美. 具有  $1 + N$  节点的多重加权驱动响应复杂网络复域函数投影同步[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 935  
HAN Min, ZHANG Yamei. Complex function projective synchronization in drive-response complex networks with  $1 + N$  nodes and multi-links

- [J]. *Control and Decision*, 2017, 32(5): 935. DOI:10.13195/j.kzyjc.2016.0350
- [2] 张芳芳, 张帅虎, 马凤英, 等. 复混沌系统的稳态控制[J]. *控制理论与应用*, 2023, 40(4): 744  
ZHANG Fangfang, ZHANG Shuaihu, MA Fengying, et al. Steady state control of complex chaotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(4): 744. DOI:10.7641/CTA.2022.11257
- [3] 杜以成, 张蓉, 王龙生, 等. 共同噪声驱动分布式布拉格反射半导体激光器混沌同步研究[J]. *光学学报*, 2022, 42(23): 154  
DU Yicheng, ZHANG Rong, WANG Longsheng, et al. Chaos synchronization of distributed bragg reflection semiconductor lasers driven by common noise [J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(23): 154. DOI: 10.3788/AOS202242.2314003
- [4] 张艳龙, 崇富权, 王丽, 等. 多涡卷振荡体系的复杂动力学行为及控制[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(7): 268  
ZHANG Yanlong, CHONG Fuquan, WANG Li, et al. Complex dynamic behavior and control of a multi-scroll oscillation system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(7): 268. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2020.07.037
- [5] SUN Junwei, DENG Wei, CUI Guangzhao, et al. Real combination synchronization of three fractional-order complex-variable chaotic systems [J]. *Optik*, 2016, 127(23): 11460. DOI: 10.1016/j.ijleo.2016.08.025
- [6] ZHANG Xiaoqing, XIAO Jian. Complex compound-combination multi switching anti-synchronization of fractional-order complex chaotic systems and integer-order complex chaotic systems [J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2022, 10(2): 525. DOI:10.1007/s40435-021-00816-1
- [7] SAJJID M, CHAUDHARY H, KAUSHIK S. Chaos controllability in non-identical complex fractional order chaotic systems via active complex synchronization technique [J]. *Axioms*, 2023, 12(6): 530. DOI:10.3390/axioms12060530
- [8] 周世炯, 李耀华, 史黎明, 等. 分段式双三相永磁直线同步电机的无模型电流预测控制[J]. *电工技术学报*, 2024, 39(4): 996  
ZHOU Shijiong, LI Yaohua, SHI Liming, et al. Model-free predictive current control of segmented dual three-phase permanent magnet linear synchronous motor [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2024, 39(4): 996. DOI: 10.19595/j.cnki.1000-6753.tces.222131
- [9] 张尧, 桑博涵, 王晨, 等. 基于 LSTM 非线性均衡的 64QAM 波分复用通信相干传输系统[J/OL]. *中国激光*. (2024-01-26)[2024-03-20]. <https://link.cnki.net/urlid/31.1339.TN.20240220.1354.072>  
ZHANG Yao, SANG Bohan, WANG Chen, et al. 64QAM WDM-MDM coherent transmission system based on LSTM nonlinear equalizat [J/OL]. *Chinese Journal of Lasers*. (2024-01-26)[2024-03-20]. <https://link.cnki.net/urlid/31.1339.TN.20240220.1354.072>
- [10] 张光伟, 白建东, 颜琦, 等. 连续变量量子密钥分发系统中动态偏振控制研究[J]. *物理学报*, 2024, 73(6): 18  
ZHANG Guangwei, BAI Jiandong, XIE Qi, et al. Research on dynamic polarization control in continuous variable quantum key distribution systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2024, 73(6): 18. DOI:10.7498/aps.73.20231890
- [11] WANG Shibing, WANG Xingyuan, ZHOU Yufei, et al. A memristor-based hyperchaotic complex Lü system and its adaptive complex generalized synchronization [J]. *Entropy*, 2016, 18(2): 58. DOI:10.3390/e18020058
- [12] ZHANG Fangfang, SUN Kai, CHEN Yawen, et al. Parameters identification and adaptive tracking control of uncertain complex-variable chaotic systems with complex parameters [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(4): 3161. DOI:10.1007/s11071-018-04747-z
- [13] 张友安, 余名哲, 吴华丽. 不确定分数阶多驱动一响应混沌系统同步[J]. *电子学报*, 2016, 44(3): 607  
ZHANG Youan, YU Mingzhe, WU Huali. Multi-drive-one response synchronization of fractional-order chaotic systems with uncertainties [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(3): 607. DOI:10.3969/j.issn.0372-2112.2016.03.017
- [14] 张平奎, 杨绪君. 基于激励滑模控制的分数阶神经网络的修正投影同步研究[J]. *应用数学和力学*, 2018, 39(3): 343  
ZHANG Pingkui, YANG Xujun. Modified projective synchronization of a class of fractional-order neural networks based on active sliding mode control [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(3): 343. DOI:10.21656/1000-0887.380098
- [15] SUN Junwei, WU Yuanyuan, CUI Guangzhao, et al. Finite-time real combination synchronization of three complex-variable chaotic systems with unknown parameters via sliding mode control [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88: 1677. DOI: 10.1007/s11071-017-3338-z
- [16] 徐昌彪, 何颖辉, 吴霞, 等. 多种多翼吸引子共存的新型三维分数阶混沌系统[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2020, 52(5): 92  
XU Changbiao, HE Yinghui, WU Xia, et al. A novel 3D fractional order chaotic system with coexistence of multiple types of multi-wing attractors [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2020, 52(5): 92. DOI:10.11918/201905213
- [17] 李晓霞, 郑驰, 王雪, 等. 一个新的具有超级多稳态的五维忆阻超混沌系统[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2022, 54(3): 163  
LI Xiaoxia, ZHENG Chi, WANG Xue, et al. A novel five-dimensional memristive hyperchaotic system with extreme multistability [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2022, 54(3): 163. DOI:10.11918/202103091
- [18] ZHAO Xiu, LIU Jian, ZHANG Fangfang, et al. Complex generalized synchronization of complex-variable chaotic systems [J]. *European Physical Journal-Special Topics*, 2021, 230(7): 2035. DOI:10.1140/epjs/s11734-021-00129-6
- [19] JAHANSHAHI H, SHAHRIARI-KAHKESHI M, ALCARAZ R, et al. Entropy analysis and neural network-based adaptive control of a non-equilibrium four-dimensional chaotic system with hidden attractors [J]. *Entropy*, 2019, 21(2): 156. DOI: 10.3390/e21020156
- [20] PAPPU C S, FLORES B C. High resolution imaging of chaotic bistatic radar [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(2): 871. DOI: 10.1109/TAES.2019.2923299
- [21] WANG Zhenya, LI Gaosong, YAO Ligang, et al. Intelligent fault detection scheme for constant-speed wind turbines based on improved multiscale fuzzy entropy and adaptive chaotic aquila optimization-based support vector machine [J]. *ISA Transactions*, 2023, 138: 582. DOI:10.1016/j.isatra.2023.03.022
- [22] LEONOV G A. Lyapunov dimension formulas for lorenz-like systems [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, 26(14): 1650240. DOI:10.1142/S0218127416502400